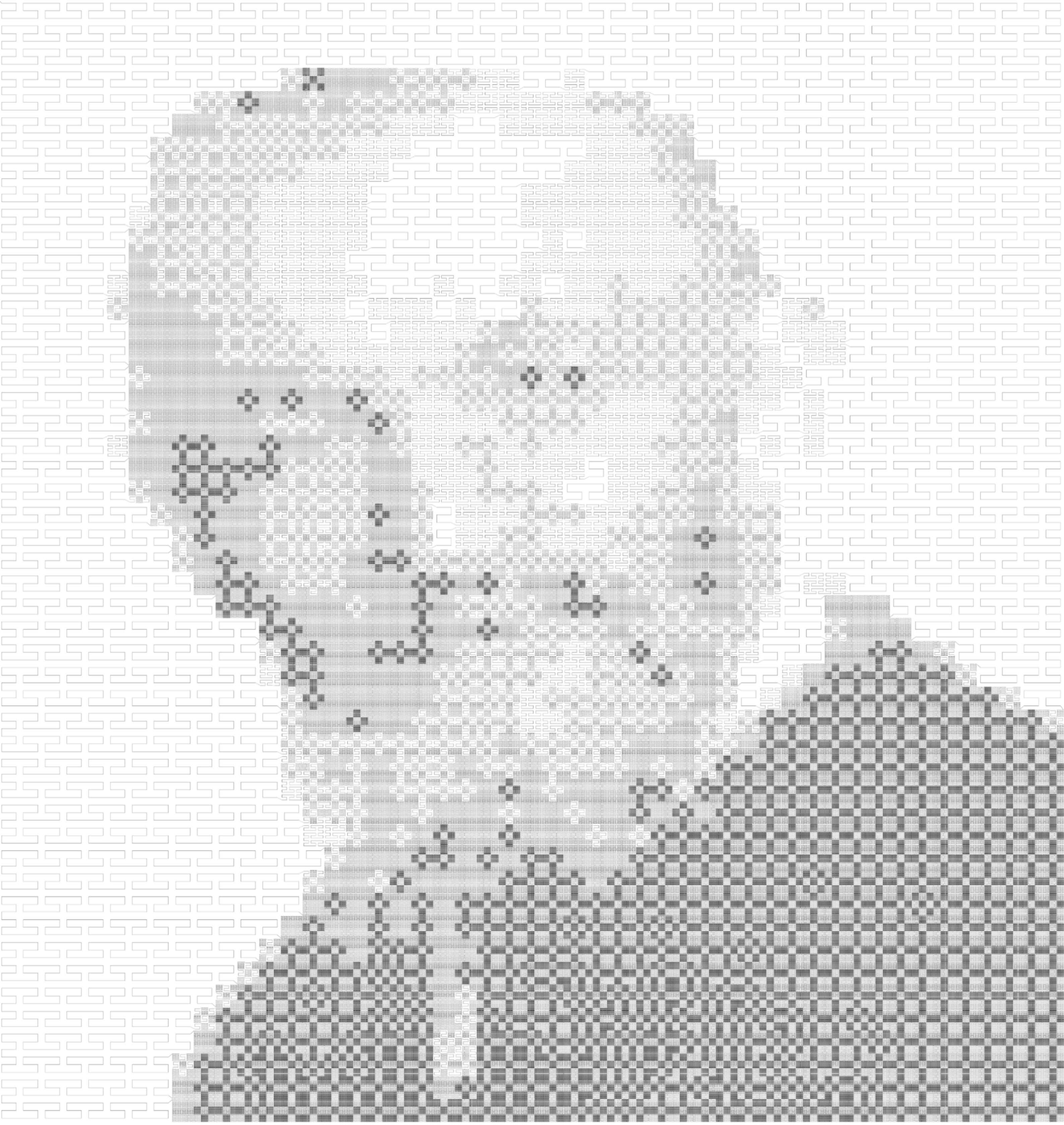
The Dark Side of Forcing



Vol. 13

目次

ペアノ創世記

淡中 圏

はじめに神は**メタレベル**と**オブジェクトレベル**とを創造された。

オブジェクトレベルは形なく、むなしく、無が**ドメイン**のおもてにあり、神の霊が**シグネチャ**のおもてをおおっていた。

神は「はじまり、あれ」と言われた。するとはじまりがあった。

神はそのはじまりを見て、良しとされた。神はそのはじまりに 0 と名づけた。夕となり、また朝となった。第 0 日である。

神はまた言われた。「全てのものに後者があって、それらの全ての後者にまた後者があれ」。

そのようになった。神は後者関数 S を作って、ドメインとドメイン自身とを繋げた。

神は 0 の後者 $S0$ を 1 と名づけられた。夕となり、また朝となった。第 $1 = S0$ 日である。

神はまた言われた。「0 を後者に持つものは全て消え、存在しなくなれ」。そのようになった。

すると

定理 1 $1 \neq 0$

となった。

証明 $1 = 0$ とすると、$S0 = 0$ である。

これは 0 が 0 の後者であることになり、神に反する。

この系として、第 1 日が第 0 日とは違う日であることが明らかになった。神はそれを見て、良しとされた。

夕となり、また朝となった。第 $2 := S1 = SS0$ 日である。

神はまた言われた。「異なるものは異なる後者を持て:$\forall a, b(a \neq b \Rightarrow Sa \neq Sb)$」。そのようになった。

すると

定理 2 $2 \neq 1$

となった。

証明 定理 *1* と、神により、$S1 \neq S0$ である。

よって $2 \neq 1$ である。

この系として、第 2 日が第 1 日とは違う日であることが明らかになった。神はそれを見て、良しとされた。

夕となり、また朝となった。第 $3 := S2 = SS1 = SSS0$ 日である。

神は最後に言われた。「0 がある性質を満たし、任意のもの a がある性質を満たせばその後者 Sa もその性質を満たすとき、全てのものはその性質を満たすようにしろ」。そのようになった。

これにより、無数の概念が生まれた。素数、完全数、婚約数、友愛数、社交数、etc。

神はこれらを祝福して言われた。「生めよ、ふえよ、予想せよ、証明せよ、反証せよ」

夕となり、また朝となった。また夕となり、また朝となり、それが続いた。第 n 日である。

こうして神はメタレベルとオブジェクトレベルと、その全ての自然数を完成された。

これにより**進捗**が定義できるようになり、神は自らの進捗を甚だ良しとされた。

そして神は進捗を聖別され、全ての存在の命運を司るものとされた。

これが進捗の由来である。

「進捗を生めよ、進捗を増やせよ、進捗を地に満たせよ」

アーメン。

第 1 章

空間充填曲線の世界　反直感から直感へ

淡中 圏

かつて「病的対象」と看做されていた数学的対象が、数学的直感を育てれば、少しも病的病的ではなかった、という例として、空間充填曲線をとりあげる。
その話の中で、数学的直感の育て方について考えたい。

1.1　イントロダクション

空間充填曲線とは、二次元以上の空間、例えば正方形のような平面図形を埋め尽すような曲線である。

紙に四角いマスがあったとする。鉛筆でマスを真っ黒に塗りつぶすことは、そんなに難しくないように思えるかもしれない。

しかし、その鉛筆の太さが 0 であったらどうだろう。太さ 0 の数学的な線をどれだけ引いても、マスの中には白い部分が残るような気がしないであろうか。

空間充填曲線はこのように、私たちの直感を揺さぶってくれるとても不思議な曲線である。

この曲線を実際に目で見ることはできない。もし見ても、真っ黒い四角が見えるだけだろう。

またその曲線を描くこともできない。それを描く鉛筆の先は速度を持たないのだ。[*1]

そんなものを曲線と呼んでいいのだろうか。

「紙からペン先を離さずに動かしたときに描かれる図形」というような日常的な曲線観からは随分離れている。

そう考えると、そんな曲線は存在しなさそうだ、という先ほどの直感は、実はある意味正しかったのだ。

この曲線の構成は、日常的な直感が無意識に仮定していたことを、ϵ-δ 論法によって取

[*1] 曲線上の全ての点において速度が定義できない。このことはあとで説明する。

り除くことによって可能となる。

このような反直感的な例は、それだけで娯楽になるので、読み物などでも、よく取り挙げられる。常識を揺さぶられるのは楽しいのだ。

しかしこの反直感的な例は、別の見方をすると、実はとても直感的なものなのだ。

その見方とは**再帰**を中心にものを見る見方である。

再帰とはなんだろうか。

コンピュータの中には「箱の中に元の箱そっくりの箱がある」という入れ子の構造がたくさんある。それは現代数学の中にもたくさん現れる構造だ。

そして自然界にも。

樹の枝の形は樹の形によく似ているし、葉の葉脈の形もまた樹の形によく似ている。

マトリョーシカというロシアの人形を思い出した方もいるかもしれない。

自分の中に自分そっくりのものがある。そんな曲線を描いてみると、簡単なルールでものすごく複雑な図形が描ける。そして不思議なパターンを描きながら、画面を埋め尽していく。再帰的なアルゴリズムで考えると奇妙に思えた空間充填曲線がとても自然に構成できるのだ。

実はこの「入れ子の構造」は有限のパターンを組み合わせて、無限のパターンを作るときによく現れる構造なのだ。

自然界の生物は厳しい環境の中を効率よく生き残り子孫を増やすために、コンピュータは大きな計算を小さなプログラムでこなすために、数学はまさに無限を有限の言葉で扱うために、この構造を使っている。

この見方を身につけると、単に奇妙な例に思えていた空間充填曲線に、様々な工学的応用があることが分かるし、様々な概念との思いもよらなかった関連も見えてくる。

直感を揺さぶるだけでは、もったいない。揺さぶったからには、新しい直感を育てるところまで行きたいと、私は思っている。

1.2　定義と歴史的背景

1.2.1　定義

ではまず空間充填曲線の定義をする。

素朴集合論と連続の定義、ペアノ・ジョルダン測度を既知とし、「実数とは何か」については不問とする。

曲線とは、単位区間 $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 1\}$ からの連続写像、

$$c : [0,1] \to \mathbb{R}^n$$

である。

定義 1 曲線 $c : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ が**空間充填曲線**であるとは、c の像 $c([0,1])$ が R^n 内で、R^n での正のペアノ・ジョルダン測度を持つことである。

とくに今回考えたいのは、c が単位正方形 $[0,1]^2$ への全射になるような曲線だ。$[0,1]^2$ の面積は 1 なので、これは空間充填曲線になる。

1.2.2 問題の背景

空間充填曲線が最初に産まれたのは 1890 年、集合論による数学の形式化が始まっていたころだ。

フーリエ級数の収束について考察していたゲオルグ・カントールは、フーリエ級数が各点収束の意味では収束していない点を数えようとした。その点は除いても、フーリエ級数自体は変わらない。無限個にもなりうるそれらの点を全て除いたあと、それらの点の集積点を除いても、フーリエ級数は変わらない。では、どれくらい除いてもフーリエ級数は変わらないのであろうか。

ここでカントールは無限個数え終わっても、まだ次があるような無限を考える必要にかられた。

これによりカントールは順序数の概念を発明する。

集合論の始まりである。

カントールは友人のデデキントとともに、集合論を数学の基礎付けをすることに使い始める。

それぞれの実数の構成は有名であろう。

カントールは 1877 年にデデキントへの手紙において、次元の違う空間の間に全単射が存在することを証明した。(1978 にその結果を論文 [4] として発表する。)

簡単な例として、$[0,1]$ と $[0,1]^2$ の間の全単射を作ってみよう。

証明 $x \in [0,1]$ を、2 進小数展開する。例えば、$x = \frac{1}{6}$ なら

$$\frac{1}{6} = 0.0010101..._2$$

となる。

このように 10 以外の基数を使用するときは、添字で基数を表すことにしよう。

このとき、0 以外の有限小数で表せる数は全て途中から '1' が続く無限小数として表すことにする。

この数字の並びを一つおきに取っていき、二つの小数展開を作る。

例えば上記の $\frac{1}{6}$ に対しては、

$$0.0010101..._2 \mapsto (0.01111..._2, 0.00000..._2) = (\frac{1}{2}, 0)$$

となる。

逆に二つの 2 進小数展開の数の列を交互に合わせれば、逆写像も作れる。

カントールはデデキントへの手紙で、自分で証明したこの結果に対して「証明しても、信じられない」と書いた。しかし、カントールは前掲の論文では、この写像が連続でないことを強調した。

すると次に問題になるのは、連続な全単射があるのか、という問題だ。[*2]

[*2] これは位相同型があるかどうか、という問題とは別である。連続な全単射でも位相同型、すなわち逆写像も連続であるとは限らない。$[0,1]$ と $[0,1]^2$ が位相同型ではないことは、任意の 1 点を除いたときの連結成分を数えれば、すぐに分かる。

早くも 1879 年にネットが $[0,1]$ と $[0,1]^2$ の間に連続な全単射が存在しないことを証明する。[5]

では、全射なだけの写像はどうか？というところで空間充填曲線の出番がやってくる。

ペアノが最初の空間充填曲線を定義したのは 1890 年 [6]、ヒルベルトが別の空間充填曲線を定義したのは 1891 年 [7] だ。

これらは統一的なアイディアで作られているので、その後も同種の曲線はいくつも作られた。

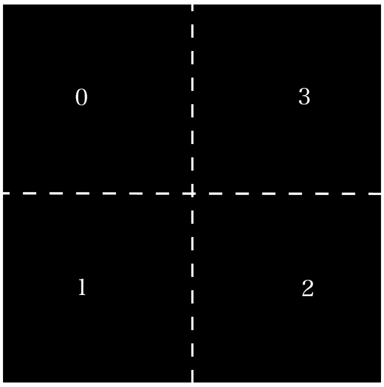
しかし、その裏に豊かな応用の世界が広がっていることが知られるには、コンピュータの発達を待つしかなかったのだ。

1.3　再帰的に空間充填曲線を構成していく

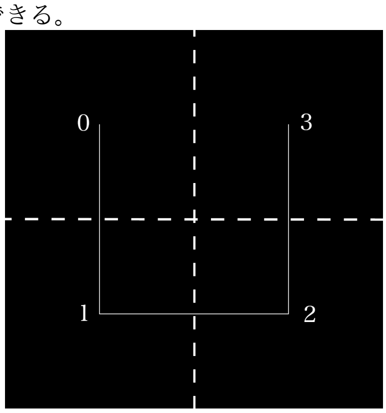
それでは、空間充填曲線の一つヒルベルト曲線を再帰的に構成していこう。ここでの議論は、ほぼ同じ形でペアノ曲線や、他の空間充填曲線にも適用可能である。

空間充填曲線の作り方の基本は空間を再帰的に分割していくことだ。

ヒルベルト曲線なら、正方形を 2×2 個の正方形に分割する。そして、できた 4 つの正方形（深さ 1 の正方形と呼ぶことにしよう）に左上から反時計回りに 0 から 3 の番号をつけていく。



そして $0 \to 1 \to 2 \to 3$ という順に正方形の中心を結ぶと、深さ 1 のヒルベルト曲線ができる。

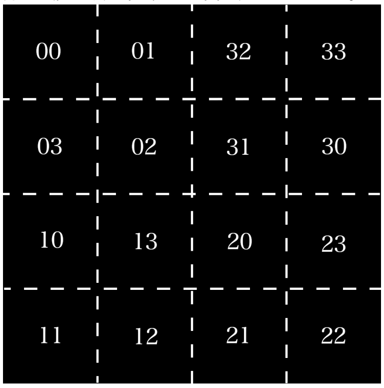


分割後の図形もまた正方形なので、全て同じように分割することができる。

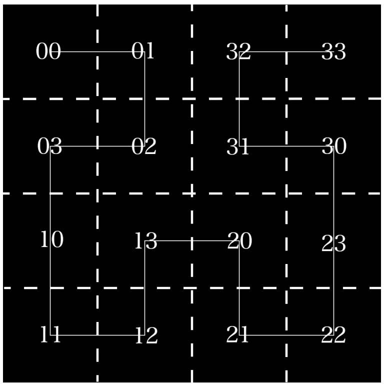
左上の正方形 0 を分解してできた 4 個の正方形に、また 0 から 4 の数字をつけ足し、$00, 01, 02, 03$ と番号をつける。ただし、番号の付け方は左上から時計回り（つまり親の正方形と反対方向）にする。

同様の方法で他の深さ 1 の正方形を分割してできた正方形（深さ 2 の正方形と呼ぶことにしよう）に番号をつけていく。

ただし、1, 2 の正方形を分割したものは、左下から反時計回り（つまり親の正方形と同じ方向）に番号をつけ、3 の正方形を分割したものは、右下から時計回り（つまり親の正方形と反対方向）に番号をつける。

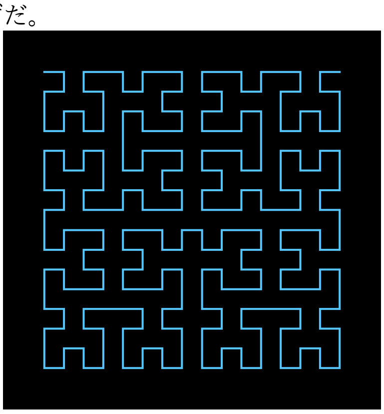
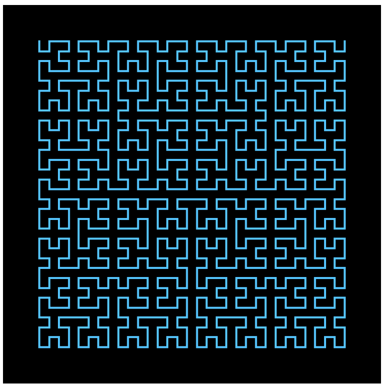


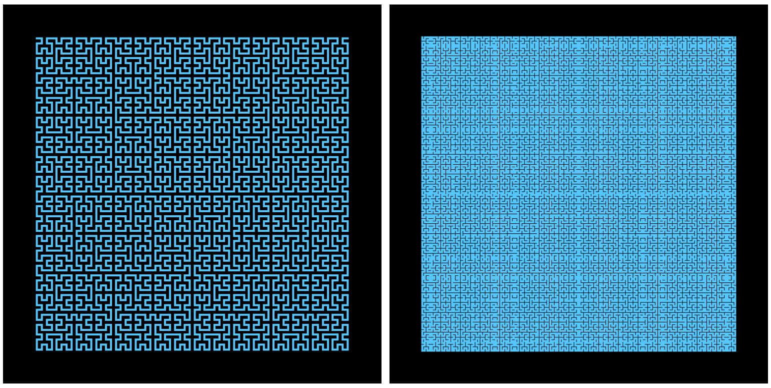
そして、00 → 01 → 02 → 03 → 10 → 11 → 12 → 13 → 20 → 21 → 22 → 23 → 30 → 31 → 32 → 33 という順に正方形の中心を結ぶと、深さ 2 のヒルベルト曲線ができる。



これは無限に続けていく。ただし、分割を細かくしていくたびに、番号の末尾が 0, 1, 2 の正方形は左上から、3 の正方形は右下から番号を付けはじめ、番号の末尾が 0, 3 の正方形は親と反対方向、1, 2 の正方形は親と同じ方向の回転で、番号をつけていく。

これを続けると、だんだんと正方形が線で埋め尽くされていくことが視覚にも分かるはずだ。



この操作の極限が**真のヒルベルト曲線**であり、それが空間充填曲線になる。[*3]

1.3.1 小数の n 進展開との関係（身近に現れる再帰）

気づいたかもしれないが、今の説明にはごまかしがある。

$[0,1]$ からの写像がどのような形になるか、この説明ではまだはっきりしない。

それを説明するために、まず先ほどの方法で番号付けられた正方形 S_i（i は番号）の包含列が正方形 $[0,1]^2$ の一点に収束することを確認しておこう。

例えば、

$$[0,1]^2 \supset S_0 \supset S_{00} \supset S_{000} \supset \cdots$$

と無限に 0 を並べれば、これは正方形の左上の点 $(0,1)$ に収束していくだろう。

どの正方形の列についてもある点に収束していくことについては、ϵ-δ 論法で考えればすぐに分かるはずである。

次にこれと同様に、線分を 4 分割していく。この場合の番号付けは、左から順に $0,1,2,3$ とするのが自然であろう。そして、それぞれの線分をまた 4 分割して、左から番号をつけていく。

これを無限に繰り返すと、だんだんと小さくなっていく線分の包含の列

$$[0,1] \supset I \supset I' \supset \cdots$$

はある実数へと収束していく。

例えば、

$$1 \to 13 \to 133 \to 1333 \to \cdots$$

と番号づけられた線分の列は、$\frac{1}{2}$ へと収束していく。

これは要は実数の 4 進展開において、

$$0.1333\cdots_4 = \frac{1}{2}$$

が成り立つことを意味している。

逆に $[0,1]$ の点は全て、4 進小数展開できるから、番号付けられた線分の列で表せる。

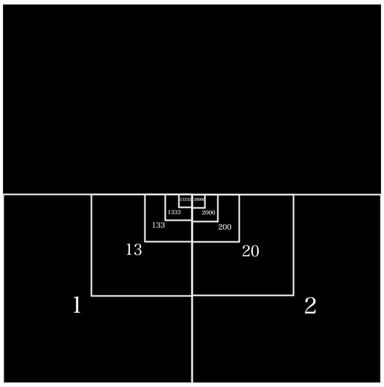
そしてそれを同じ番号を付けられた正方形の列の収束先に移す。

[*3] この曲線は株式会社ぺあのしすてむ製の iOS/Android アプリによって制作した。くわしくは、公式 Twitter アカウントの@PeanoCurves（`https://twitter.com/PeanoCurves`）を見て欲しい。

こうして、ヒルベルト曲線の写像が構成される。

もちろん厳密には、$\frac{1}{2} = 0.1333\cdots_4 = 0.2000\cdots_4$ のような、同じ実数を表す 2 通りの 4 進展開の仕方に対して、対応する正方形の列が同じ点に収束することを確認しなければ、この写像は well-defined ではない。

ここでは一つだけ例を出して、済ませよう。上に例として出した $\frac{1}{2}$ に対応する 2 つの正方形の列が、全体の正方形の中心に収束するのは、図を描いてみると、それほど難しくないはずだ。



ここで思い出して欲しいのは、カントールによる、線分と正方形の全単射の構成である。あそこでも小数展開が現れた。

実は私は初めてカントールによる線分と正方形の全単射の構成を見たとき、小数展開に「不自然」「恣意的」という印象を受けた。

しかしヒルベルト曲線の構成を見てみると、小数展開が実数にとって実に自然な構造の表し方であることが分かる。

それは小数展開の「再帰性」をこの構成が自然に使っているからである。

もう一度書くと再帰とは、ある構造の中に、同じ構造が含まれている「入れ子の構造」のことである。

「再帰とは、再帰のことである」のように、自分で自分を定義したりすることも再帰である。

プログラミングなどではよく現れるが、多くのプログラマはプログラミングで初めて出会ったと思っているのかもしれない。高校の漸化式や数学的機能法が再帰の一種であったと理解していればいい方なのではないだろうか。

実は小学校で習った 10 進記法は立派な再帰的構造だ。1 の位、10 の位、100 の位、と同じ手順でどこまでも続けることができる。このように有限の記号で無限個の数が効率よく記述できるのは、再帰の大きな力である。ギリシャ数字やローマ数字や漢数字で際限ない数の記号が必要なのと対照的だ。

さらに「自然数とは何か」に遡って考えてみると、ペアノの公理に現れているように、自然数自体が再帰的な構造を持っている。*4

小数展開は直線の側の話だが、平面の側の再帰的構造にも注目しよう。

今回現れた「正方形の中に正方形がある」という再帰的な構造は、平面を必要な精度で効率よく分解する手法である。

平面の図形を正方形で細かい部分まで出来るだけ正確に近似しようとしたとする。

*4 を参照。このように、ただ一種類の記号を並べて数を表現することを、1 進法と読んだりする。

これは普通に考えれば画像の解像度を高くしていくということだが、これはある意味では、一様な部分では無駄な情報を抱えることになる。

そういう無駄な情報を抱えた表現をした後にデータ圧縮するのももちろん一手ではあるが、ここでは最初から効率的な表現を考えてみよう。

無駄をなくすために、細かい部分は小さな正方形まで分割し、大雑把な部分は出来るだけ大きな正方形への分割で止めることにする。すると、単に同じ形の図形が並んだベクトルや行列ではなく、今回構成したのと同じような再帰的な木構造が現れる。*5

これを**四分木（quadtree）**と呼ぶ。

これは例えば、ゲームにおける当たり判定の効率的な方法などに応用されている。

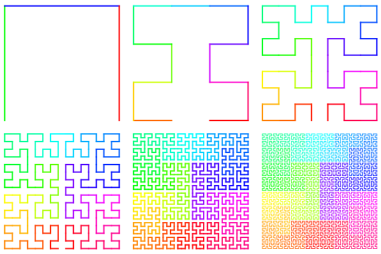
この木構造の枝の先を順に辿っていくような操作が必要になったとする。するとそれはヒルベルト曲線などの空間充填曲線へと収束していく曲線を描くはずだ。

そういう意味で空間充填曲線はプログラミングにおける**深さ優先探索**という手法と関係が深い。*6

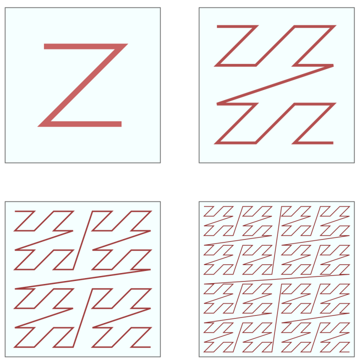
2分木の深さ優先探索では、前順・中順・後順の三種類の探索方法があった。

平面の場合は、さらに多くの順序付けがありうる。そして順序付けを帰ることによって、異なる空間充填曲線が生まれる。

例えば、ムーアは**ムーア曲線**というヒルベルト曲線の変種を定義した。[8] *7



またルベーグもまた**ルベーグ曲線**と呼ばれる空間充填曲線を定義した。[9] *8



この曲線は1966年にモートンによって再発見され**Z階数曲線**、**モートン平面充填曲線**と呼ばれるほか、関数として、**Z階数**、**モートン階数**、**モートン符号**とも呼ばれている。[10]

モートンは地理学的データベースの研究において、二次元空間上で近い場所のデータを一次元のファイルシステム上でも近い位置に格納するために、この概念を再発見した。曲

*5 今回はペアノ尽くしだが、この手法もどこかペアノ・ジョルダン測度に似ているのが、少し面白い。
*6 正方形の中の出来るだけ小さな正方形を全て辿ってから、次の正方形へ行くので、これは深さ優先である。
*7 ムーア曲線の画像は Wikipedia から
*8 ルベーグ曲線の画像は Wikipedia から

線が Z の字を描きながら平面を走破していくことから名前がついた。

これは現代の GPU による CG 映像の作成技術にも応用されている。

また三次元において同様の手法を考えると**八分木（octree）**が現れる。四分木と同様に三次元での当たり判定を始め、様々な場面に応用されている。

では再帰的に分割した八分木を深さ優先探索する方法を考え、その順序に沿って立方体の中心を結んでいったらどうなるであろうか。もちろん、三次元の空間充填曲線ができるわけである。

1.3.2　表紙解説

ではここで表紙を見てみよう。何かぼやけた人の顔が見えるであろうか。

これはペアノの写真を加工したものだ。

この表紙のサイズでは線が潰れてしまって、正しく辿れないが、実はこの絵は一筆書きで書かれている。

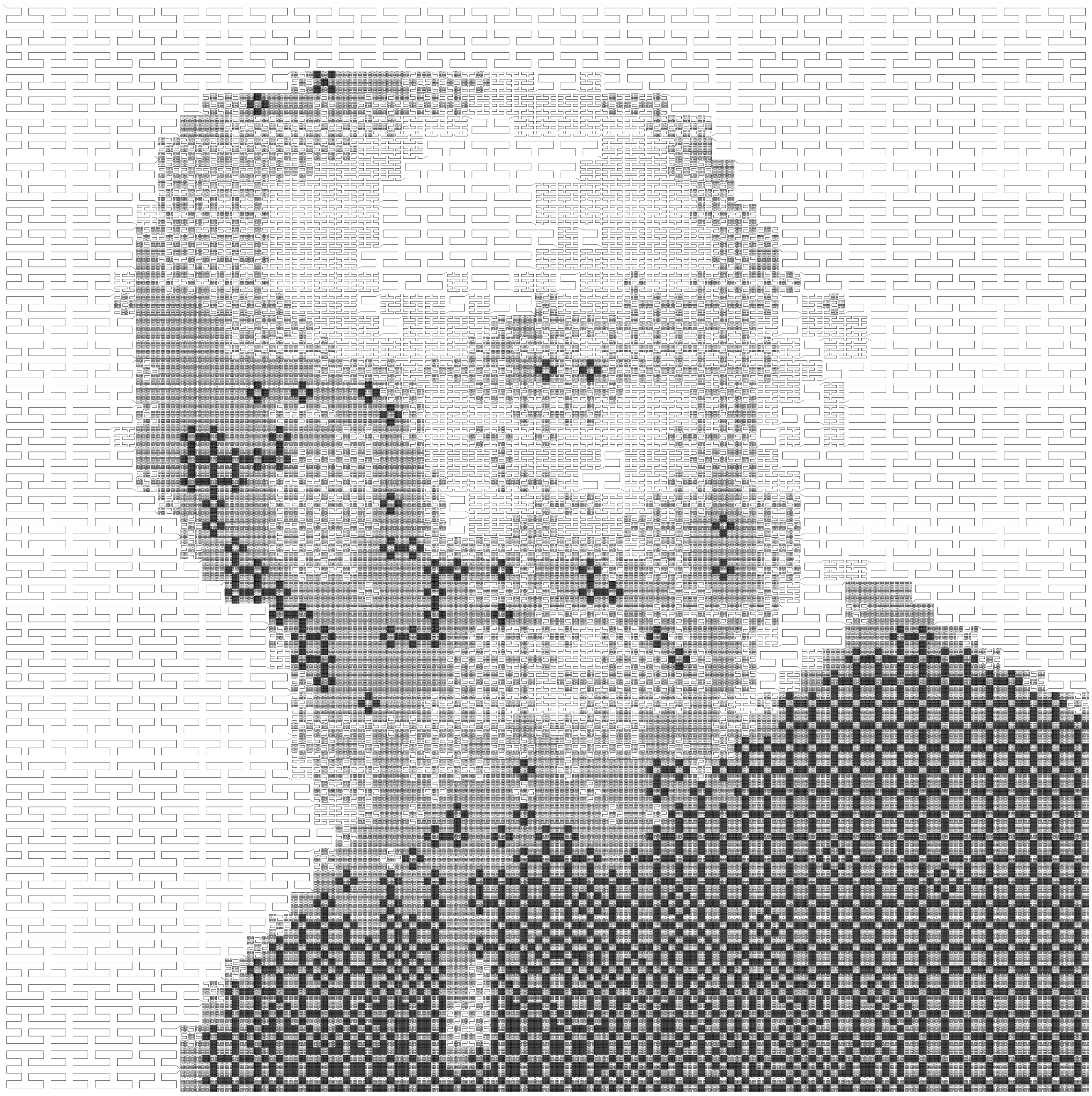
そのやり方はまさに今説明した、四分木と同じ方法だ。ただしペアノ曲線の場合は $3 \times 3 = 9$ 個に分割するので、正確には九分木であるが。

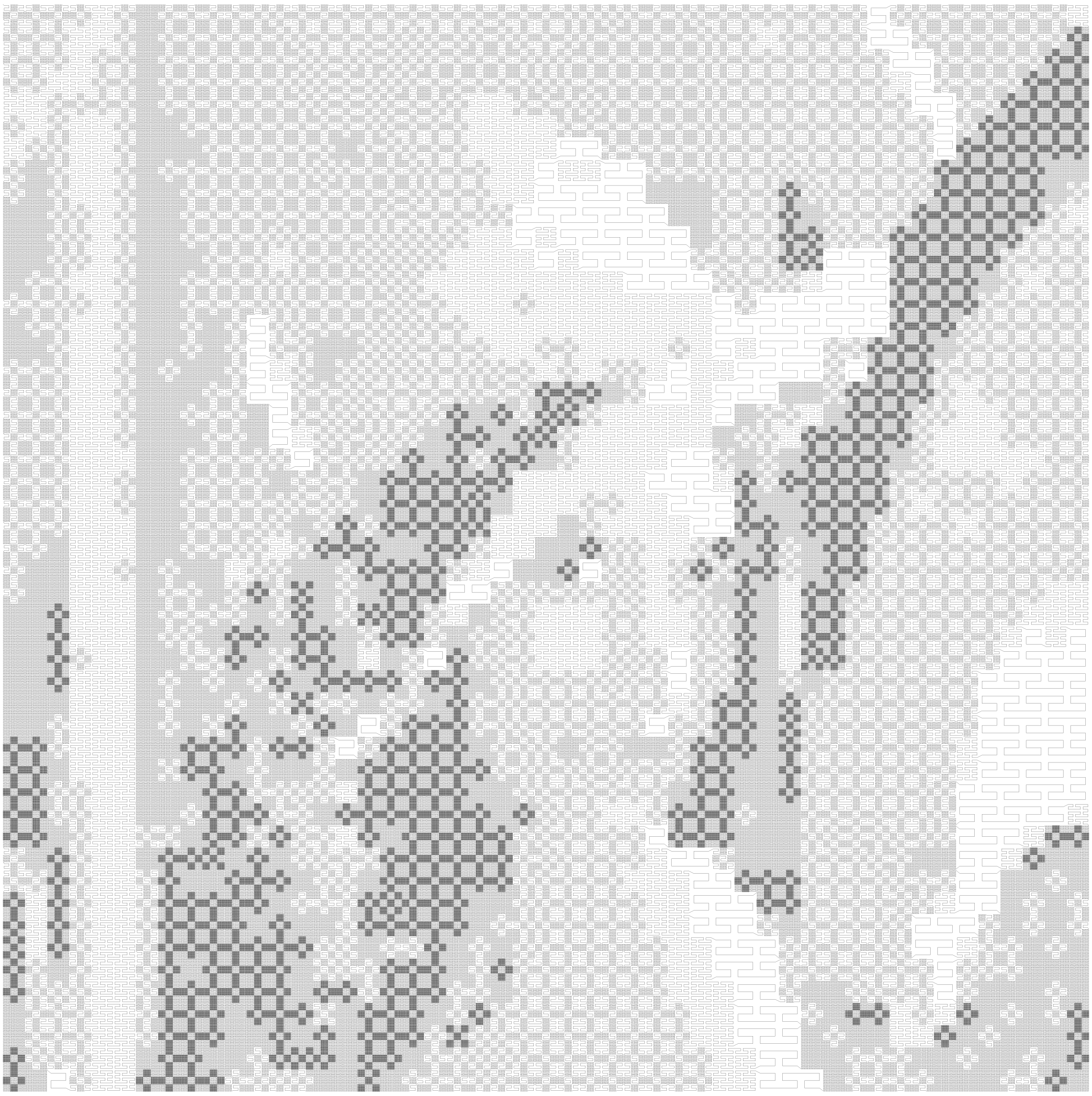
色が黒い部分は出来るだけ細かく分割して線を多くして、色が白い部分は出来るだけ大雑把に分割して線を少なくする。

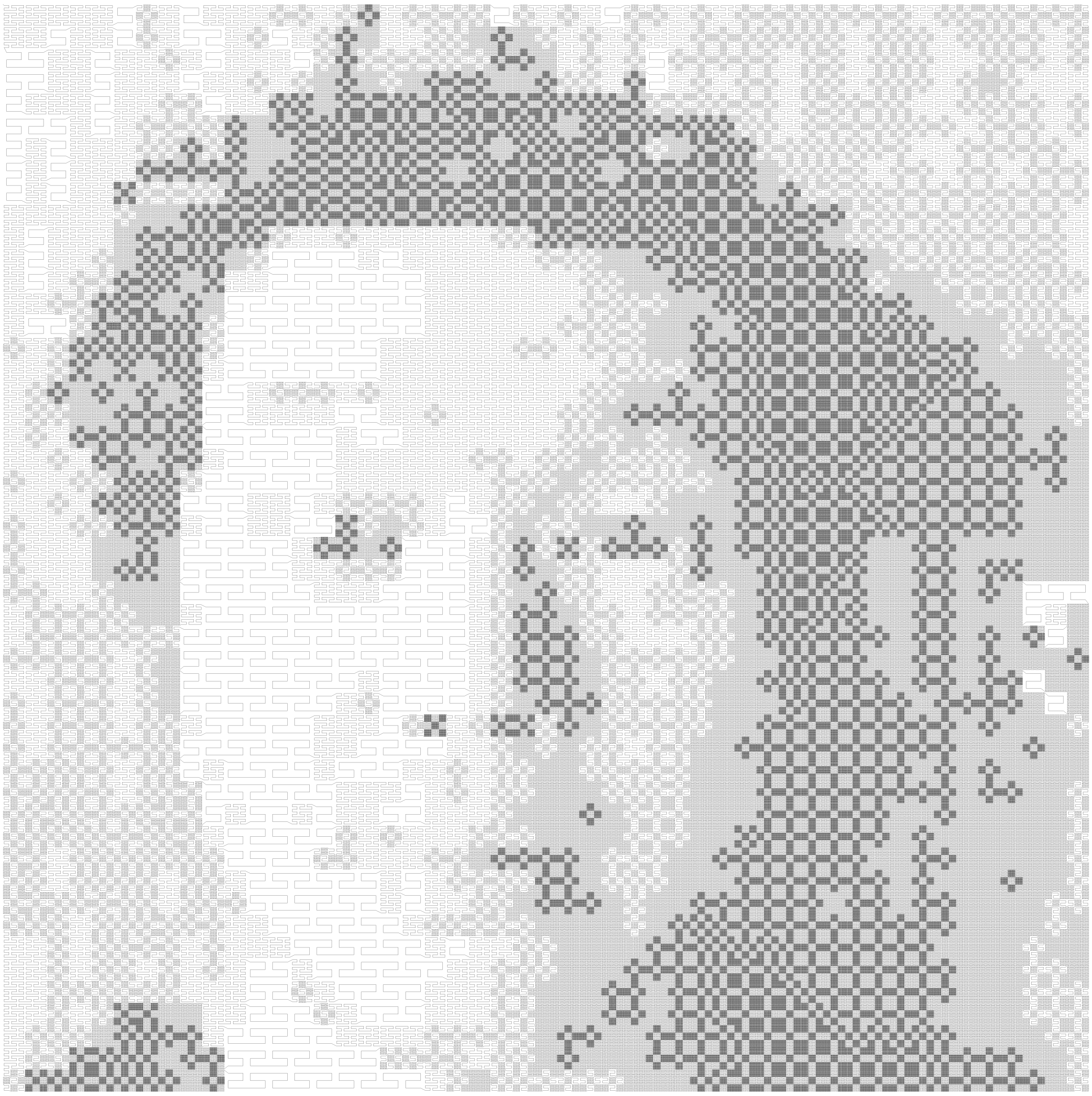
このようにして、色の黒い白いを表現した結果、任意のモノクロ画像を一筆書きで表現するアルゴリズムができた。

次の画像は順に G. ペアノ、画像処理のモデルとして有名なプレイガールのレナ、そして私を加工した画像である。[*9]

[*9] ペアノの写真とレナの写真は Wikipedia から。私の写真も Wikipeadia にいい写真がないか探したのだが、なかったので、自分で撮った。この写真は出典を明らかにしてくれたら、つまりこの本から引用したと明記し、`https://forcing.nagoya` の URL を添付すれば、お好きな用途に使ってもらって構いません。







書き捨てながら、コードは https://github.com/tannakaken/peanocurvestroke にある。

1.3.3 連続性、微分不可能性

連続性の証明をまだやり残している。それをしないと、この関数が曲線であるとは言えない。

ここでは厳密な証明ではなく、簡単な説明で済まそう。詳しくは文献の [2] や [3] を見て欲しい。

ある平面上のある点を中心とした開円板を考えたとき、その点を含む十分な深さの正方形を考えれば、その正方形は開円板の中に入ることがわかる。

そして正方形に対応する線分の中の点は全て、その正方形の中に写像されるので、自動的に開円板に入ることになる。

これは ϵ-δ 論法による連続性の定義そのものだ。

それに対してこの曲線は全ての点で微分ができない。これも簡単に説明する。[*10]

線分を 4 分割にすると、点と点の間の距離の最大値は $\frac{1}{4}$ になる。

しかし正方形を 2×2 に 4 分割しても、距離の最大値は $\frac{1}{2}$ にしかならない。

微分は定義域での誤差と値域での誤差の比例係数であり、微分が存在するということは、定義域での誤差と値域での誤差が比例しているということなので、上の観察はまさに微分が存在しないことを意味している。

ここからこの曲線には長さが存在しないことがわかる。長さは微分から定義するので、曲線が長さを持つには、「区分的に微分可能」という性質が必要になるが、この曲線はそれを満たしていない。

ただ近似するための深さ有限のヒルベルト曲線の長さがだんだんと増加していく様子を考えると「長さが無限」という直感も、あながち間違っていないとも思える。

1.4　自己相似図形としての空間充填曲線

1.4.1　近似多角形の列

これでヒルベルト曲線を定義できたわけだが、しかし私たちが見ることができるヒルベルト曲線は、深さ有限のヒルベルト曲線にすぎず、空間充填曲線である真のヒルベルト曲線ではない。

あくまで真のヒルベルト曲線を近似していく曲線の列にすぎないのだ。

そして近似の仕方は一通りではありえない。無数の仕方があり得る。

そのどれもが、目に見えない抽象的な真のヒルベルト曲線の「現れ」「表現」なのである。別の表現は、ヒルベルト曲線の別の側面を私たちに見せてくれるかもしれないのだ。

例えば上で定義した近似の仕方では、ヒルベルト曲線が実際にどこを通るのか全くわからない。

ネットの定理よりヒルベルト曲線は全射ではあるが単射ではありえない。つまりヒルベルト曲線はどこかで自分と交わっているはずなのだが、それがどこかは先ほどの方法では見えてこないのだ。

では別の近似方法を考えてみよう。

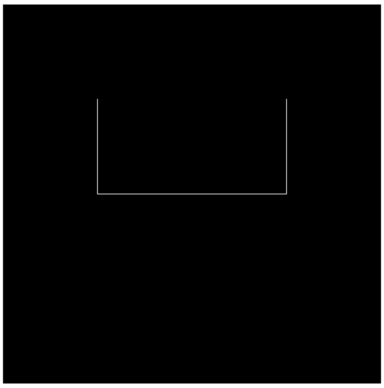
先ほど $\frac{1}{2}$ は真のヒルベルト曲線によって、全体の正方形の中心 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ に写像されることを確かめた。

同様に $\frac{1}{4}$ は全体の正方形の左側の辺の中点 $(0, \frac{1}{2})$ に、$\frac{3}{4}$ は全体の正方形の右側の辺の中点 $(1, \frac{1}{2})$ に写像される。

そして始点 0 は全体の正方形の左上の点 $(0, 1)$ に、終点 1 は正方形の右上の点 $(1, 1)$ に写像される。

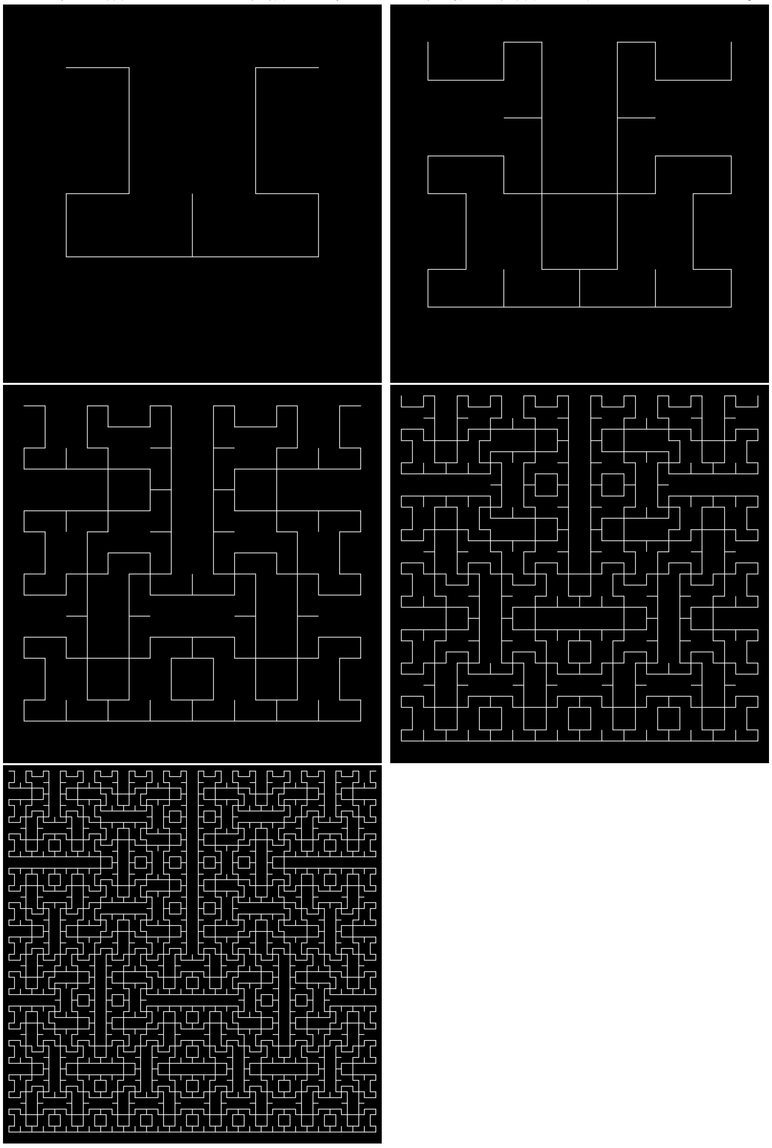
この 5 つの点を結んでみよう。

[*10] [2] によるとこの主張はヒルベルトが論文に証明なしで書いてから１００年近く、誰も証明を文章の形で公表しなかったらしい。レベルとしては大学一年程度なので、まさか誰も証明が書かれていないとは思わなかったのだろうか。



これを深さ 1 の**近似多角形（approximating polygon）**と呼ぼう。

同様に $[0,1]$ を 4^n 等分したときの区切りの点を真のヒルベルト曲線で写像した点を、左から順に結んでいった図形を深さ n の近似多角形と呼ぶことにする。



この曲線を見ると深さ 2 の時点でこの曲線が同じ角を二回以上通っていることが分かる。

この曲線の角は全て実際に真のヒルベルト曲線が通る点である。

つまりその点で真のヒルベルト曲線は実際に自己交叉していることが見て分かるのだ。[*11][*12]

1.4.2 コッホ曲線との関係

近似多角形を深くしていく過程を見ていくと、興味深いことに気づく。

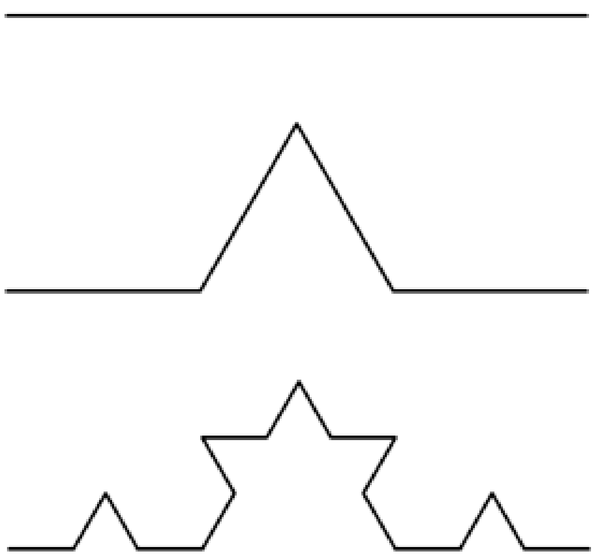
深さ 0 の近似多角形とは、全体の正方形の左上の点から右上の点への直線、つまり全体の正方形の上の辺である。

それが深さ 1 の近似多角形、つまり、正方形の上半分の直方体から上の辺を取り除いたような、箱のような形に変わる。

この変化に注目した後、深さ 2 の近似多角形を見ると、深さ 1 の近似多角形の各辺に同じ変化が起きていることが分かるだろうか。

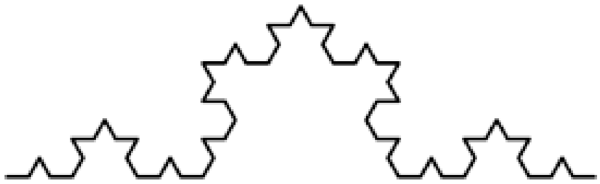
フラクタルについて読んだことがある人なら、これがコッホ曲線の作り方と似ていることに気づくかもしれない。

コッホ曲線も各辺（深さ 0 のコッホ曲線）を深さ 1 のコッホ曲線に変換する操作を適用し続けることによって生成される。



[*11] この曲線も株式会社ぺあのしすてむ製の iOS/Android アプリによって制作した。

[*12] この小節に関係のある小説が 2 章である。

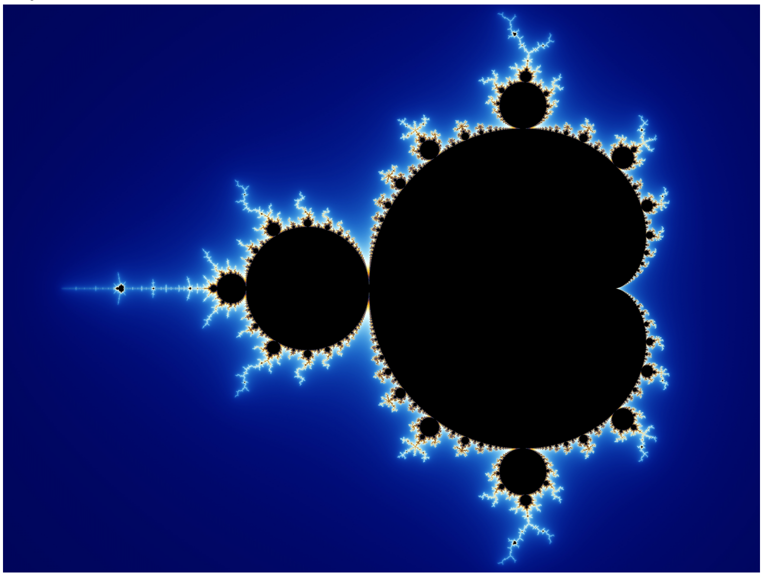


正確に言えば、その操作の不動点として、真のコッホ曲線が定義される。[*13]

コッホ曲線は全体の一部に注目すると全体と相似な図形が現れる。このような図形を自己相似図形という。

自己相似図形は典型的なフラクタルである。この二つの概念はよく混同されるが、実際には違うものだ。

例えば海岸や有名なマンデルブロ集合は厳密には自己相似なわけではないが、フラクタルだ。[*14]



フラクタルの厳密な定義はフラクタル次元というものが、通常の次元とずれることである。

コッホ曲線のような自己相似図形は簡単にフラクタル次元が計算できる。

正方形の長さを 2 倍すると、もともとの図形のコピーが 4 つ現れる。$4 = 2^2$ なので、ここからフラクタル次元が 2 であることが分かる。通常の次元とフラクタル次元が同じなので、正方形はフラクタルではない。[*15]

コッホ曲線の長さを 3 倍すると、元々の図形が 4 つ現れる。これはコッホ曲線のフラクタル次元が $1 < \frac{\log 4}{\log 3} < 2$ であることを意味し、これは通常の意味でのコッホ曲線の次元でる 1 より大きいので、この図形はフラクタルであることが分かる。

---

*13 曲線なのに不動点というのは少し笑える。

*14 マンデルブロ集合の画像は Wikipedia から

*15 『トゥレップ　「海獣の子供」を探して』という映画の中で理論物理学者の鈴鹿短期大学名誉学長佐治晴夫は「渦巻きは拡大しても渦巻きなのでフラクタル」とおかしな解釈をし、それを自分の人生論的な訓話に繋げているが、これは明らかに間違っている。

　自己相似という言葉に引っ張られすぎるとこのように勘違いが発生するので注意が必要である。

これを平易に言い換えると、「コッホ曲線を作っていく操作は、元の線分を 3 等分した線分を 4 つ組み合わせるから次元は $\frac{\log 4}{\log 3}$ である」ということである。

それではヒルベルト曲線のフラクタル次元をこの手法で求めてみよう。

ヒルベルト曲線の近似多角形を作っていく操作は、線分を 2 つに分けて 4 つ組み合わせていく。つまりフラクタル次元は $\frac{\log 4}{\log 2} = 2$ であることがわかる。これはヒルベルト曲線の通常の次元である 1 よりも大きいので、フラクタル図形であることを意味している。

ヒルベルト曲線がある意味では平面的であることが、次元の側面からも分かったというわけだ。

実際、曲線が n 次元の空間充填曲線であるためには、フラクタル次元が n 以上である必要があることが証明できる。

1.5　文法ベースの手法

さて、実際にどのように空間充填曲線を描いていくかについても、考えてみよう。

それもできる限り汎用性の高い手法が欲しい。

実際にペアノ曲線やヒルベルト曲線を描くプログラムを作ったことがある人は分かると思うが、これらの曲線を描くアルゴリズムは色々と試行錯誤をしていると、割とできてしまう。しかし、毎回毎回試行錯誤するのは芸がない、ということだ。

ここでは出来るだけ特定の空間充填曲線やその近似法に縛られず、様々な場合に対応可能な手法を考えたい。

そこで**文法ベース**の手法というものを紹介しよう。

なぜここで「文法」などという場違いな概念が登場するのか不思議に思う人もいるかもしれない。

ここにも実は「再帰」が絡んでいる。

深さ 1 のヒルベルト曲線から深さ 2 のヒルベルト曲線を作る操作について考えてみる。

深さ 1 のヒルベルト曲線は「左上から反時計回り」と説明できる。

すると深さ 2 のヒルベルト曲線は、左上から反時計回りに、「左上から時計回り」、「左上から反時計回り」「左上から反時計回り」「右下から反時計回り」と説明できるパターンでできている。

この観察を続けると、実はこのパターンは合計 4 つしか存在しないことがわかる。

- 「左上から反時計回り」を H
- 「左上から時計回り」を A
- 「右下から時計周り」を B
- 「右下から反時計回り」を C

と名付けるとき、

深さを 1 増やすのは

- H は、$A \downarrow H \rightarrow H \uparrow B$
- A は、$H \rightarrow A \downarrow A \leftarrow C$
- B は、$C \leftarrow B \uparrow B \rightarrow H$
- C は、$B \uparrow C \leftarrow C \downarrow A$

へと変化させることになる。

この矢印はパターンと次のパターンを結ぶ線分の方向を表している。

これがヒルベルト曲線をどんどん細かくしていくルールであり、こののように項を別の項へと再帰的に変換していくルールは、形式言語の理論において「文脈自由文法」と呼ばれているものである。

このアプローチの何が嬉しいかというと、この文法と基本パターンの形のデータがあれば、あとは汎用的なアルゴリズムで、近似曲線を描いていくことができるのだ。

つまり大幅な共通化ができるのだ。

例えばペアノ曲線についても同様のルールを書き下すことができる。それとペアノ曲線の基本パターンを文法ベースのアルゴリズムに入力すると、たちまちペアノ曲線を描くアルゴリズムができる。これはムーア曲線やルベーグ曲線、またはシェルピンスキー曲線等の他の空間充填曲線についても同様である。

ここまで来たら、なぜ「文法」などという場違いな概念が登場したか、なんとなく分かってきたであろうか。

よくよく考えると、私たちが普段話している「言語」というものも再帰的構造を持っているのだ。

例えば名詞が必要な場所に「〜〜であること」などのような名詞節を入れることができる。その中にはもちろんまた名詞が必要な場所がある。

このような入れ子の構想からチョムスキーは、文脈自由文法という再帰的構造を抽象化したのだ。

だからこそ、有限の音と融点のルールから、限りない表現を作り続けていくことができる。

そして逆に、非常に複雑に見える現象も、その再帰的構造に注目することにより、単純なルール（文法）で描写できるわけである。

1.6　まとめ

空間充填曲線をテーマに「再帰」が様々な場所に現れていることが分かってもらえたであろうか。

そして空間充填曲線が位取り記数法や我々の言語と同じくらい自然なものであることも。

このような見方ができるようになったのは、歴史的にはまだ最近のことである。

空間充填曲線が発見されたのは 19 世紀の終わりであるが、その性質が深く追求されたのは第二次大戦後である。特に大きく発展したのは、マンデルブロがそれらに「フラクタル」と名前を付けて以降だ。

しかし名前を付けたことだけが発展の理由とは考えにくい。

逆に発展しなかった理由を考えると、理由の一つは、空間充填曲線が微分と相性が悪かったことによるのかもしれない。

例えばエルミートはスティルチェスへの 1893 年の手紙に「導関数を持たない関数という、この災厄から恐怖と戦慄で顔を背けたくなる」と書いている（ [1] 第 6 章からの孫引き）。この手紙を書いていた時期にエルミートが、接平面を持たない曲面に関するルベーグの論文の雑誌への収録に異議を唱えていたと、ルベーグはのちに書いている（これも [1]

第 6 章の記述。この節に使われている「病的」「怪物」という言葉もこの本に使われている言葉)。

数学者たちも、これらを「病的な例」としかみない習慣によって、理解を妨げられていたことがここから分かる。

マンデルブロがそれら病的とか怪物とか言われてきた例に共通点を見つけ「フラクタル」と名付けて、深く研究した。その結果、それらの背後に深くて広大な理論が存在し、少しも理解不可能な存在ではないことが分かったのである。

それはまさに、数学者が新しい直感を得た、ということだと私は考えている。

マンデルブロがその新しい直感を得られた理由には当時急速な発達を始めて研究に取り入れられ始めていたコンピュータの存在が大きいと私は思っている。

考えてみれば数学の概念は全て、抽象化された結果である。義務教育で習う初等幾何の直線も、目に見えるものでも、実際に描くことのできるものでもない。これらが自然なものに思えてくるのは、私たちがその取り扱いに慣れ、それを現実世界に応用する方法を知っているからだ。

つまり「手を動かしたことがあるから」だ。

手を動かさないと直感は育たない。

再帰的な構造について手を動かして考えるのは、コンピュータ出現まで難しかった。それが、再帰についての直感を現在も多くの人があまり育てられていない理由であろう。

再帰はプログラミングでは難しい概念と言われやすい。

また、再帰はより非形式的な話題では「自己言及」という名前で呼ばれることも多いが、こちらは「悪循環」「パラドックス」等と絡めてあからさまに病的な概念として取り扱われることもある。

例えば最近「否定的自己言及は矛盾を必ずはらみます。これは数学的にも証明されてるんですよ。不完全定理（原文ママ）といいます」というとんでもない発言が、一部で話題になった。([11] における池谷裕二氏の発言）

これは非直感的な例を受容した後、結局新しい直感を育てられなかった例と考えることもできるのではないだろうか。

ここでは、「不完全定理（原文ママ)」という「病的な例」は、発言者の硬直化した直感を補強する役目しか果たしていないし、理解もしていないのに、例として挙げるのは、「知的ファッション」のアクセサリーとしかこの例を見ていないと、誹りを受けても仕方ないのではないだろうか。

しかし、新しい直感を育てるのが難しいことも、事実だ。

1970 年代に科学の世界に新風を吹き込んだカオスやフラクタルの概念が、1990 年代に一般向け読み物の世界でブームを起こしたことがあった。

しかし『ジュラシックパーク』におけるカオスの扱いに端的に現れているように、結局多くの場合、新しい直感を育てるのではなく、「科学にもわからないことがあるんだ」程度の古い直感を再生産するに終わってしまいがちだった。

常識や直感はとても頑丈でしなやかなので、ちょっとやそっと揺さぶられたくらいではビクともせず、むしろそれを吸収して自らをより頑丈にすることに使ってしまいかねないのだ。

最初に書いたように、常識を揺さぶられることそれ自体が娯楽になりうるので、フィクションに対してそれほど文句を言っても仕方ない面があるだろう。

しかし、この文章で二つほど例に出したような、本来正しい知識を提供して、新しい直感の成長を後押しし、その向こう側にある豊かな理論の世界に誘うべき知識人が、古い直感の再生産ばかりに手を貸し、「不思議な例」を「ファッショナブルナンセンス」のアクセサリー程度に扱うのは、とても褒められたことではない。

愚痴ばかり言っても仕方ないから、結論を言おう。

しかし結論はすでに言ってある。

直感を育てるために手を動かそう。

そして手を動かすための道具はあなたのすぐ近くにある。

1.6.1 数学ランドへの入り口

MIT メディアラボの元となる組織の創設者であるシーモア・パパートは、「フランスで育てばフランス語は完全に学習できるから、数学ランドで遊べば、数学は完全に学習できる」と言った。

数学ランド、そこでは数学の抽象的な概念が、目に見えて、手で触れるものになって、私たちの前に現れる。まるでレゴのように、組み合わせたり、分解したりできれば、数学の概念はもっと身近なものになり、普段我々が操っている概念と、それほど違わないことが分かるだろう。

何も学ぶ必要はない。何かを学びたくてそこを訪れる人もいれば、ただ観光旅行に行く人もいる。

そう気楽で楽しい場所なのだ。

数学ランドはどこにあるのだろうか？それはパソコン、スマートフォン、あなたの周りの家電の中にあるあらゆるコンピュータの中だ。

ただ数学ランドを見るのには技術が必要で、長い間、その技術は多くに人にとって縁遠いものだった。

私やその仲間はどにかその入り口を大きく、そしてもっとたくさん増やすために活動をしている。下に、数学を触れるようにするためのサイトやアプリで私が関わってるものを二つほど紹介する。

- 私が所属している株式会社ペアのしすてむがリリースする、空間充填曲線で遊べる iOS/Android アプリ。詳しくは公式 Twitter アカウント@PeanoCurves（`https://twitter.com/PeanoCurves`）まで。
- 私が作ったいくつかの Web アプリやスマートフォンアプリを陳列している場所 `https://tannakaken.xyz/gallery`

そして、もし少しでもコンピュータの中の数学ランドに興味を持った人がいたら、できれば自分でプログラミングしてほしい。

Python でも Scratch でもいい。プログラミングは数学を触るための最高の道具だ。

必要なのは、数学ランドへ目を開いて、触って、遊んでみることだけだ。

顔を上げれば入り口はたくさんあるはずだ。

参考文献

[1] マンデルブロ, B./ 広中平佑 監訳./ フラクタル幾何学. ちくま学芸文庫. 2011.

[2] Sagan, Hans./ Space-Filling Curves (Universitext) (English Edition). Springer. 1994.

[3] Bader, Michael./ Space-Filling Curves: An Introduction with Applications in Scientific Computing (Texts in Computational Science and Engineering Book 9) (English Edition). Springer. 2013.

[4] Cantor, G./ Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. Crelle J. 84, 242-258.1878.

[5] Netto, E./ Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. Crele J. 86, 263-268. 1879.

[6] Peano, G./ Sur une courbe qui remplit toute une aire plane. Math. Annln. 36, 157-160. 1890.

[7] Hilbert, D./ Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück. Math, Annln. 38, 459-460. 1891.

[8] Moore, E.H./On certain crinkly curves. Trans. Amer. Math. Soc. 1, 72-90. 1900.

[9] Lebesgue, J./Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives. Gauthier-Villars. Paris. pp. 44-45.

[10] Morton, G. M./A computer Oriented Geodetic Data Base; and a New Technique in File Sequencing, Technical Report. Ottawa, Canada: IBM Ltd. 1966.

[11] ほぼ日刊イトイ新聞 養老孟司×池谷裕二 定義 =「生きている」第１４回. `https://www.1101.com/yoro_ikegaya/2019-05-20.html`. 2019/08/01 に閲覧.

第 2 章

ペアノ・ラビュリントス

淡中 圏

その昔は九つの舞踏広場でマロの大舞踏がおこなわれ、それが毎夜九日間ぶっ通しにつづいた。人々のうち九つの家族がこれに参加した。彼らは踊るとき、巨大な九重に巻いた渦巻になった。

Ad. E. イェンゼン『ハイヌヴェレ。モルッカ諸島セーラムの民話』

案内された洞窟の中で、ようやく私は目隠しを外すことを許された。

目が見えないまま随分長いこと歩かされた気がする。

松明の明かりによって、そこそこ広い空間が照らされている。

床が平に整えられて、四角形に区切られていた。

何が起こるか分からないまま、何かが起こるのを待っていると、闇の中から女たちが現れた。みな、似たような服を着て、似たように髪を結い上げ、遠目には区別がしづらかった。

私の目の前で、女たちは奇妙な踊りを踊りはじめる。綱を持って、一つのうねる線のようにになりながら。

何回も直角に曲がって、向かい合いになり背中合わせになり、自分の中に自分を折り畳んでいく。

そのたびに女たちが増えている。綱も気付けばどんどん長くなっている。

私は次第にその法則性を理解しはじめた。重要な数字は九だ。

女たちが蛇行しながら巡回する四角形のブロックが、九つの四角形に分解され、それぞれの四角形の中を同じルールで蛇行しながら巡回する。そうして蛇行のブロックはどんどん小さくなる。

女たちを個別に認識することは私の目にはもう無理になり、混じりあった長い長い蛇のように見えはじめる。

限りなく長い蛇が有限の面積の四角形の中に収まっている光景は、私に眩暈を起こさせた。

女たちの区別がしづらいだけではない。全体と部分の区別も、すでに無理になっていた。

全体に目を向けたあと、九つに分けられたその部分に目を向けると、全体と全く同じ光

景が広がっているように見えた。その部分をまた九つに分けると、また同じ光景が現れる。あまりに細かい部分に目を向けていることに気付いて、慌てて引き返そうとするが、どこまで頭を引いても全体を見ることはできない。

まるで迷宮の奥に入り込んで、あわてて道を引き返そうとしても、どこまで戻っても入口に辿りつけないような感じだ。

いや、感じではない。

私は実際に迷宮に迷い込んでしまったのだ。

私は急いで鞄の中から本を取り出した。

ケネス・ケレーニイは著書『迷宮と神話』[1] において、「本来なら迷宮に関するあらゆる研究は舞踏から出発するのでなくてはならない」という挑戦的な文章を書いている（八章冒頭)。

ラビリンスの訳語である**迷宮**と、通常の**迷路**とは、実は全く異なるものなのである。

迷路はいくつもの別れ道や行き止まりを持つ建築物だ。

それに対して本来の意味での迷宮には、別れ道も行き止まりもなかった。それはうねうねと螺旋を描きながら、どこまでも奥へ奥へと続いているかのような建築物の呼び名であったのだ。

神話の中で、英雄は迷宮の中へ深く潜り、怪物を倒して、再び外界へと帰還する。その行為によって、自らが英雄であることの徴となすのだ。

ここにおいて迷宮とは「死の世界」である。英雄は死の世界へと降り、儀礼的に一度死んで、再び生き返る。

ケレーニイの考えるところの迷宮とは、「死の向こう側の生」を表す象徴なのだ。

象徴としての迷宮は建築物だけではなく、生物の内臓や、地下の洞窟など、様々なものに憑依する。

また表現方法としても建築だけではなく、日常の道具の装飾などにも表れる。

それらが当時の人にとってどういう意味を持っていたかは想像するしかないが、ケレーニイは墳墓の装飾として螺旋の迷宮紋様が使われたケースなどから、それらの神話的意味に思いを馳せている。

そしてケレーニイは、迷宮の主要な表現方法が**舞踏**であった、と言う刺激的な考えを述べる。

その証拠としてケレーニイはインドネシアのセーラム島に伝わるハイヌウェレ神話について説明し、その神話に登場する舞踏が螺旋を成すこと、そしてこの死と再生の神話に登場する彼岸への入口が螺旋状の紋様によって表現されること、等の理由から、この舞踏がまさに「舞踏化された迷宮である」であることを示そうとする。

もちろんケレーニイの提示する迷宮と舞踏の関係の証拠はそれだけではない。

迷宮といえば、なによりギリシャ神話に登場する「ミノタウロス神話」であろう。

その迷宮を作ったのは、名工ダイダロスである。

ダイダロスの天才を示すエピソードとして、糸を結んだ蟻を使って蝸牛の殻に糸を通した、というものがある。これは、迷宮とアリアドネーの糸のモチーフと相似を成し、迷宮と螺旋の関係の証拠の一つとなる。

そしてホメーロスによれば、ダイダロスは王女アリアドネーのための舞踏場の建造者でもあるのだ。

ここでどのような踊りが踊られたかについて、ケレーニイはヘーパイストスがアキレウ

スの盾の上で表現した舞踏場における若者と乙女たちの踊りによって説明している。

> たがいに手首と手首を握り合い、〈陶工がすわったままで手頃の轆轤が上手に回るかどうかを試すときのように、こよなく軽やかに〉踊ったのである。つながり合った一団の全体は、したがってあの旋盤の縁のように、輪を描いて動いた。だがそれは長い列であったに相違ない。なぜならまもなく、彼らは¡一団一団がたがいに向い合わせになって踊るようになる¿からである。

これは螺旋状に回りながら踊っていたことを表すという。

またテーセウスがミノタウロスを倒したあと、救助された生贄の少年少女とともに、迷宮への入場と脱出を模して舞踏を演じたという。そしてその夥しい曲折に富んだ舞踏の技術をテーセウスに教えたのはダイダロスであるともいうのだ。

さらに、デーロス島には、アプロディーテーに捧げる舞踏が伝わっていたという。

アリアドネーは元々は女神の名であったというし、アルゴスには、アプロディーテー・ウラニアの社殿の傍らにアリアドネーの墓が存在していたように、アリアドネーとアプロディーテーの関係は深い。

デーロス島の祭祀伝説によると、アプロディーテーの礼拝像をこの島に伝えたのはテーセウスであり、それはもともとはダイダロスが作りアリアドネーが彼に贈ったものだったのだ。そして、迷宮の屈折を表した舞踏もまた、テーセウスとお供の者たちによってはじめて演じられたという。

発見された勘定書から、その舞踏には綱が使われたことが分かっている。

これは死と再生の神話の女神、ペルセポネーの祭典の舞踏を想い起こさせる。

> 手から手へ綱が渡されつつ、乙女らは声の調子を足のステップで整えながら進んだ

ここまで読んでいただいた方にはもう分かっていただけたであろう。

私の目の前で行われていた舞踏もまた、「舞踏化された迷宮」であったのだ。

そして私はまんまと誘いこまれたこの迷宮の真っ只中に迷って、途方に暮れているのだ。

ここからどうにかして逃げ出さないといけない。

しかし、周囲を見ても、どこまでもどこまでも自分たちの中に自分たちを折り畳んでいく女たちの姿しか見えない。そんな光景を見て、とても落ちついてなんかいられない。

私は何かヒントを得ようと、再び本に目を落とした。

読んでいたアプロディーテーの踊りに関する文章の最後に、その踊りがゲラノス、つまり「鶴の踊り」と呼ばれていることが書いてあった。

ケレーニイによると、これもまた迷宮の象徴体系の一部を成すものだという。

ダイダロスはイーカロス伝説でも有名である。テーセウスに迷宮を脱出する方法を教えたことにより、ダイダロスは息子イーカロスとともに、幽閉されてしまう。ダイダロスは、人口の翼を作って脱出を図るが、イーカロスは太陽に近づきすぎて墜落してしまう。

ダイダロスと鳥の関係はそれだけではない。伝説によるとダイダロスはクレータ島より前にアテーナイに住んでいたが、甥であるペルディクス（山鶉を意味する）の発明家としての才能に嫉妬して、アクロポリスの岩から突き落してしまったのだという。[*1]

[*1] ケレーニイは高所から落ちることが、死と再生の儀式と同様に、イニシエーションの儀式のよくある形の一つであることに注意を促している。

そしてペルディクスは、アテーナーによって山鶉へと変えられたのだ。

ダイダロスはその罰で、アテーナーによって右肩に山鶉に似た傷を付けられ、アテーナイを追放された。

このようにダイダロスと鳥は単なる偶然とは言えない深い関係があるようだ。

ケレーニイによると、迷宮と鳥の関係は、死に対する再生の関係と相似だという。

死の向こう側に新しい生があるように、一度迷宮の中に降り、そこから飛び立つことにより、新しい生の世界へと辿りつく。

そこまで読んで私は、目の前に起こっていることの意味を完全に理解した。

これは次元を超えるための儀式だったのだ。

多くの動物が、地表に縛られた二次元的な生活を送るしかないなか、鳥は三次元の世界を自由に動き回る。鳥は次元を超えたのだ。

そして目の前の舞踏も、自らを九つに分け、その中に自らを折り畳み続けることにより、一次元の図形である曲線で平面を埋め尽して、二次元の図形へと跳躍させようとしているのだ。

その過程で、曲線の長さは無限に長くなり、極限においては定義できないことになる。

連続であるにもかかわらず、全ての点で微分不可能、つまり、全ての場所が曲がり角になってしまうのだ。

無限もまた、ケレーニイが考える象徴としての迷宮が指向するものである。

死ぬたびに再生するなら、それは不死である。

迷宮は死を意味すると同時に、再生しつづける不死を意味するのだ。

それによって迷宮は無限の象徴ともなりうる。

一定の面積の空間の中で、螺旋の道筋はどこまでも長くなり続ける。その結果として、平面の中は、どんどん迷宮の道によって埋め尽されていく。

そのことが、この迷宮を解くヒントになる。

なぜなら次元を超える極限において、迷宮は迷宮であることをやめてしまうはずだからである。

定理 3 (Netto、 1879) 閉区間 $[0,1]$ から単位正方形 $[0,1]^2$ への連続な全単射は存在しない。*[2]*

そして、この舞踏が極限において作り出そうとしているのは、G. Peano が 1890 年に定義した、最初の空間充填曲線、その名も**ペアノ曲線**そのものである。

定義 2 曲線とは、位相空間 X への連続写像

$$c : [0,1] \to X$$

のことである。

曲線 $c : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ が**空間充填曲線**であるとは、c の像 $c([0,1])$ が、$\mathbb{R}^n$ の正のペアノ・ジョルダン測度を持つことである。*[2]*

これは $n=2$ ならば、c の像が面積を持つこと、$n=3$ ならば、c の像が体積を持つことである。

この定義と定理 3 から、次の系がすぐに分かる。

系 1 空間充填曲線は単射ではない。つまり、自己交差を持つ。

私たちは空間充填曲線を直接想像することはできない。

そんなことをしても、真っ黒の空間しか想い浮かばないだろう。

代わりに私たちは、空間充填曲線へと収束していく有限の長さの曲線の列を考えて、空間充填曲線を把握しようとする。

そして多くの場合、それは自己交差を含まない曲線になりがちだ。理由の一つは単純に、そちらのほうが曲線単体として分かりやすいからであろう。

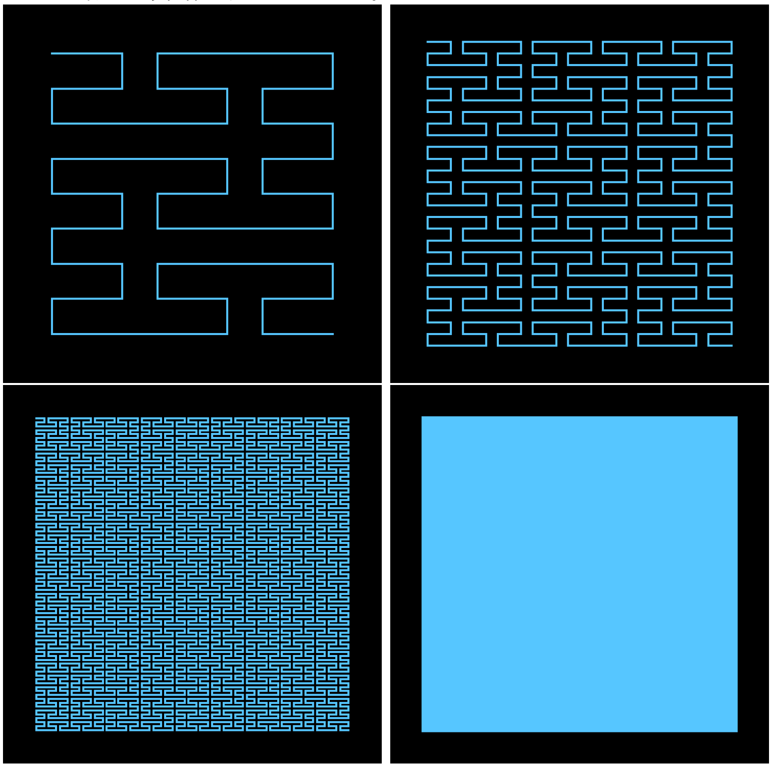
しかし、この曲線の列は、あくまで空間充填曲線を近似する列の一例にすぎないことを、理解しなくてはいけない。これは、極限について考えるとき全般にかかわる問題である。

その他にも同じ空間充填曲線への、無数の近似列が存在しえて、それぞれが一つの図形の別の側面を表している可能性があるのだ。

数学について考えるときに、数学はどこまでも抽象的な概念について扱う学問でありながら、どこかに「この視点から見ればこれが具体」という足場を用意し、その足場を使って「具体と抽象を登り降りする」という手続きが必要になる。[*2]

これが現代数学において、**表現**が重要な理由であり、また特定の表現だけではなく、**表現全体**をいつも気にしなくてはいけない理由である。

ペアノ曲線のよく見る表現は次のようなものだ。そしてこれこそ、まさに私の目の前で女たちが踊った舞踏の軌道である[*3]。



これは分かりやすいが、しかしペアノ曲線の自己交差については何も教えてくれない。

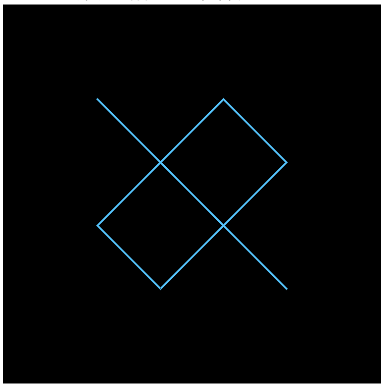
そこで、別の近似列を考えよう。

[*2] もちろん、別の足場をとると、なにが抽象でなにが具体かは、ひっくり返るということにも注意すべきだ。例えば多くの数学者から見ると、数学的対象は具体物で記号は抽象物だが、数理論理学から見れば記号こそ具体物である。もちろん、どちらでもない人から見れば、五十歩百歩であろう。

[*3] この曲線は株式会社ぺあのしすてむ製の iOS/Android アプリによって制作した。くわしくは、公式 Twitter アカウントの@PeanoCurves（`https://twitter.com/PeanoCurves`）を見て欲しい。

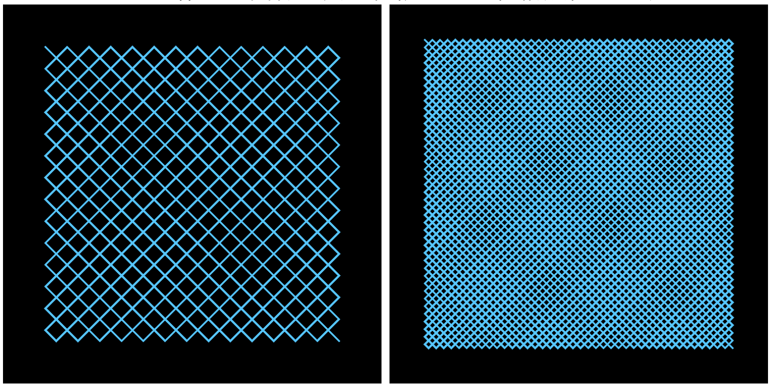
ペアノ曲線の構成は、定義域である線分と値域である正方形とを九つに分解し続けるので、$0, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \ldots, \frac{8}{9}, 1$ の点が、ペアノ曲線[*4]により、正方形のどの点に写像されるかは、割合分かりやすい。

それを順に結んだ曲線がこれである。[*5]



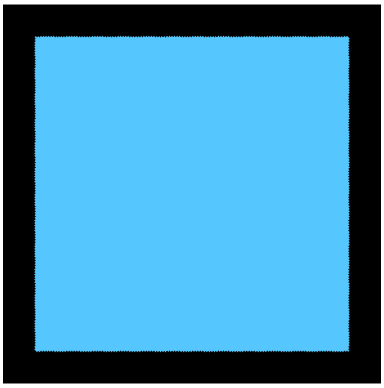
同様に線分を $9^2 = 81$ 等分した点がどこに写像されるかを計算して、順に結ぶとこうなる。

このようにして作った曲線の列の極限もまた、構成法より明らかにペアノ曲線になる。



[*4] ペアノ曲線を近似する曲線ではなく、その極限の本当のペアノ曲線

[*5] この図形は近似曲線（Approximating Polygon）と呼ばれる。



そして、この曲線の角は全てペアノ曲線が実際に通る点ばかりなので、この曲線の自己交差は全てペアノ曲線の本当の自己交差である。

これが無数の分岐を持ち、迷宮でなくなってしまったペアノ曲線の姿である。

これを見れば、私の進むべき道は一目瞭然であろう。斜めに真っ直つっきればいいのだ。

目の前の踊る女たちは、ペアノ曲線の表れの一つにすぎない。それに惑わされてはいけなかったのだ。

私は本に目を落したまま進む。いつも、道路でやっているように。

これにより、単なる表れの一つに縛られるのを避け、その向こう側の、永遠なる抽象物へと、心を飛ばすのだ。

気がつくと私は舞踏の外に出ていた。そしてまた目隠しをされて、洞窟の外へと連れ出され、疲れた目をこすりながら、ようやく家路につくことができた。

帰り道の途中、夜明けの光を便りに本を読みながら歩いていたら、溝に落ちて脛をすりむいてしまった。

痛い。

参考文献

[1] ケレーニイ, ケネス./種村季弘 訳. 迷宮と神話–迷宮の研究–ある親和的観念の線反射としての迷宮. 弘文堂. 1986.

[2] Sagan, Hans./Space-Filling Curves (Universitext) (English Edition). Springer. 1994.

[3] Bader, Michael./ Space-Filling Curves: An Introduction with Applications in Scientific Computing (Texts in Computational Science and Engineering Book 9) (English Edition). Springer. 2013.

第 3 章

ペアノ鉄道の旅

淡中 圏

♣ うー、乗り換えめんどくせー。暑いのにホームで待ってたくねー
♠ 文句の多いやつだなあ
♣ そうだ。鉄道の路線を一本にしちまえばいいんだよ
♠ とうとう暑さに頭をやられたか、と思ったが、いつもこいつはこんな感じだった
♣ 悪くないアイディアだろ？
♠ 路線の近くに住んでいない住人がひどく不便そうに思えるが
♣ そこで数学よ
♠ そこで数学なのか
♣ ペアノ曲線とかヒルベルト曲線のアルゴリズムを応用して、街の全域にくまなく一本の路線を走らせられる、と言う寸法よ
♠ 近くに行くのにもものすごい時間がかかりそうだが
♣ いや大丈夫。これらの空間充填曲線は近くの場所はちゃんと近いように通るんだ
♠ そうなのか？
♣ その代わり街の反対側へ行こうとするとものすごい時間がかかるだろうな
♠ ダメじゃないか
♣ そうだなあ。こう考えたらどうだろうか
♠ ものの見方を変えて物事を解決したふりをするのやめろ
♣ 人間はな、やはり土地に根ざしてなくちゃいけないんだよ
♠ なんの話？
♣ だから自分の土地から離れちゃダメなんだ
♠ 街の反対側へ行く程度も？
♣ うー乗り換えめんどくせー
♠ バカなこと言ってるうちに電車来たぞ。置いてくぞ

一緒に数学とプログラミングの会社で働きませんか

淡中 圏

今回はペアノ尽くしなので、ついでに私が現在所属している株式会社ぺあのしすてむについても軽く紹介しておこう。

私はまだ入って半年ほどだが、会社が今の体制を取り始めたのは、私が入ってからだ。それまでは、社長の個人事業だったのだが、突然啓示でも落ちてきたのかなんなのか、数学とプログラミングを「学問として」好きな連中を集めて楽しいことをやりながらビジネスもやってしまおう、という会社が爆誕した。

メンバーは皆、数学か計算科学のバックグラウンドを持つものばかりで、売っていく商品としては、F#と Clojure のマルチプラットフォーム関数型プログラミングと、Ocaml と Coq の組み合わせや、ACL2 や、Alloy などの論理学を使った形式検証、そしてデータ分析や機械学習だ。

と、大きなことを言ってみたものの、色々仕事を探して頑張っている。今の所は上記に当てはまらない仕事もたくさん取って、どうにか糊口をしのいでいる形だ。例えば、私はこの会社で PHP も書いたし、Python も書いたし、Objective-C も書いた。関数型はどこ行った、という感じだが、ようやく Ocaml と Coq で仕事が入るかもしれない。

先行きは厳しいが、いく価値のある道である。

学ぶことも多いし、達成感も大きい。

そんなぺあのしすてむは現在、数学徒を募集している。

数学徒とはなんだろうか？難しい言葉だが、説明してみよう。

数学徒とは、単に「数学を勉強しているもの」という意味だ。数学徒になるために資格は必要ないし、大学なりの機関に所属する必要もない。ただ（任意のレベルの）数学を勉強していればいいのだ（ただし、ぺあのの数学徒ポストに応募するには数学の master 以上が必要である。悪しからず)。

数学徒が数学を活かして生きるためには二つの道がある。

1 つは数学者になること、もう 1 つは数学屋になることだ。

数学者とは、ただ数学をしているだけで、誰かからお金をもらえる人間だ。そんな人間に私もなりたかった。

数学屋、別名数理エンジニアとは、数学を使って作った成果物を、需要を見つけて売ることによって、生計を立てる人間だ。

これらになることは、数学徒をやめることではない。2000 年以上の研究の歴史があり

ながら、問題が増えることはあっても減ることはなさそうな数学を前にすれば、全ての人間は永遠に数学徒であるとも言える。

2019 年 08 月 11 日現在、ぺあのしすてむの現在の社員は一人残らず数学徒である。そして我々は数学屋の会社としてやっていこうと第一歩を踏み出したばかりである。

我々はまた、前途ある数学徒が数学者や数学屋として生きていくことを支援したいと思っている。数学者として生きていくことを選んだ人たちは、どこかで会社から巣立っていくのかもしれない。数学屋として生きていくことを選んだ人たちは、我々と共に会社を盛り上げ続けてくれるのかもしれない。先のことはわからないが、我々は数学徒が楽しく働ける会社を目指している。

今回紹介したペアノ曲線の構成法による一筆書きも、学部レベルの大学数学と、ちょっとしたプログラミングができれば誰でもできる。しかし、この程度でも結構人を驚かせることができる。まだまだやれることはたくさん残っていることの証拠ではなかろうか。

数学は Art（美しく、そして面白い）、Science（正しく、そして新しい）、Technology（強力で、便利）のいずれにも、もっと応用できる。

数学徒の皆さんは、株式会社ぺあのしすてむで、ちょっと他とは違うことをしませんか？

以下の QR コードより公式ページにアクセスできます。

淡中 圏　本名：田中健策

一次創作、二次創作、数学、論理学、哲学、プログラミング、で何か楽しくて無駄なことをやる、オッカムの剃刀の錆、骨と肉でできたルーブ・ゴールドバーグマシン、止まるまで自分で自分を回す独身者の摩尼車。

よく分からない自作サイト　https://tannakaken.xyz

編集後記: 今年から私は、数学と論理学とプログラミングで商売をやっていく会社をこの同人誌の仲間もいる会社でやっているので、今までになく忙しい毎日でした。

これまで仕事にはあまり主体的に関わらず、趣味の方に全力投球していましたが、そういうわけにも行かなくなってしまったわけです。

そんな中、死にそうになりながら作った同人誌がこれです。今までよりも薄いかもしれませんが、ご賞味ください。【淡中　圏】

発行者 ： The Dark Side of Forcing

連絡先 ： https://forcing.nagoya

発行日 ： 2019 年 08 月 11 日

Here is the math

to the dark side