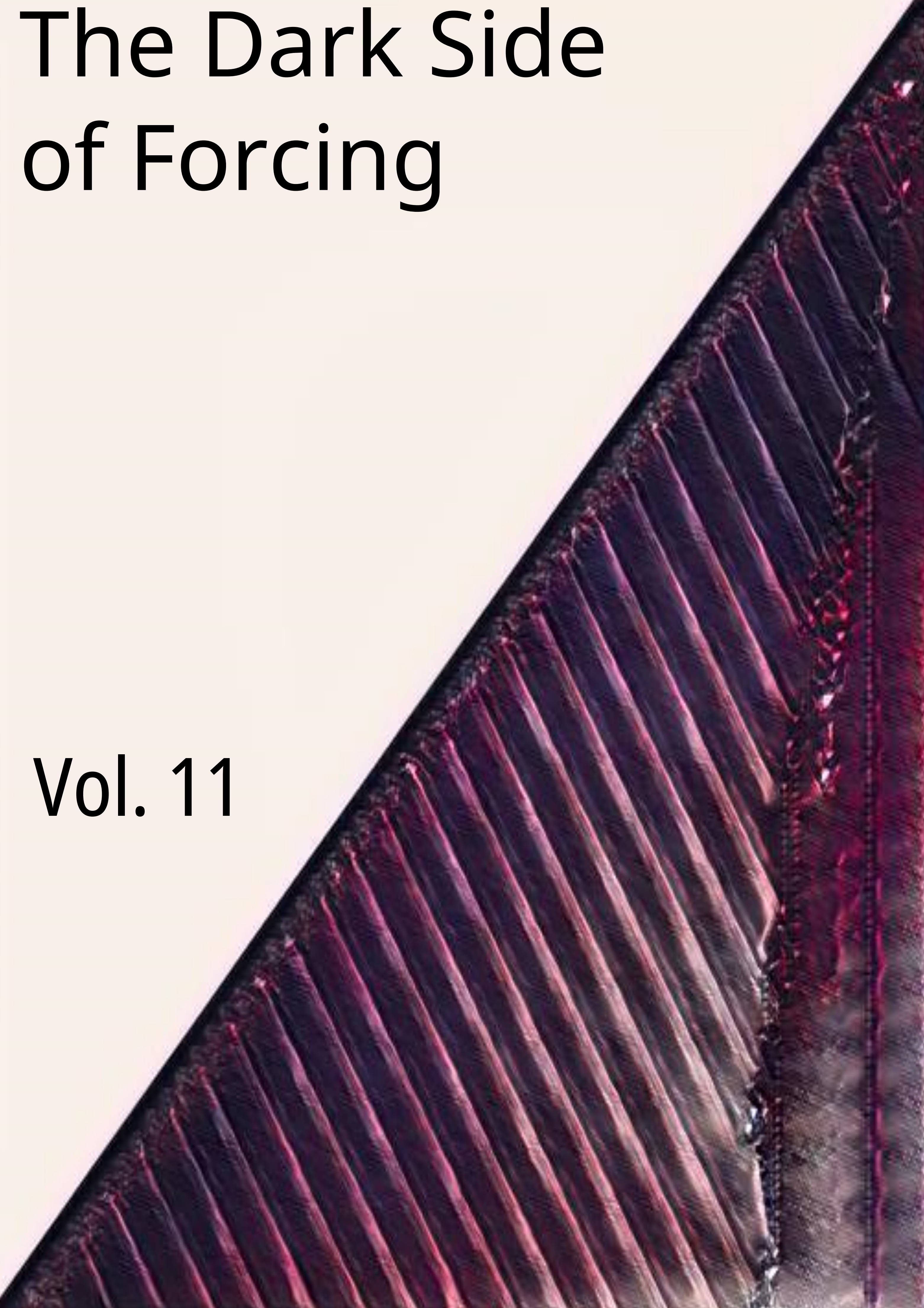
# The Dark Side of Forcing

Vol. 11



# Welcome to The Dark Side of Forcing!

淡中 圏

ようこそ、数学の暗黒面へ！

今回も合同誌におかしな原稿が集まりましたよ！

1 つ目は淡中 圏氏の「**Cantor's Paradise Lost**」です。旧約聖書の楽園喪失のエピソードを数学用語でパロディにしたよくわからん作品です。なぜか突然、蛇の補題の詳細な証明が始まってしまいますが、分からない人は呪文か何かだと思っとけばいいですよ。そこを無視すれば、誰でも読める作品になっています[*1]。意味が分からないかもしれませんが、数学が分かってても意味不明な文章なので気にしないでください。

2 つ目は淡中 圏氏の「**線形代数による可換図式入門**」です。線形代数における、基底や基底変換という基本的概念を、可換図式を使って説明しています。「多項式環論をやる前に、多項式の扱いに慣れる」のと同様に、「圏論に入門する前に、可換図式の扱いに慣れよう」というのがテーマです。だいたい大学生くらいを対象にした文書です。

3 つ目は淡中 圏氏の「**カントールの楽園に遊ぶ**」です。1 つ目の文章に呼応した題名になっています。モデル理論における無矛盾な理論のモデルや、与えられたタイプを実現するモデルや実現しないモデルを「整列可能性定理」と「超限再帰法」という集合論の強力な道具で構成していきます。モデル理論への入門にもなっていますし、「抽象的応用数学」への集合論の応用への入門にもなっています。また、可換環論や代数幾何との類似にも注記がしてあります。数理論理学に進もうとしている大学生から、大学で数学をやっていて数理論理学にも興味のある大学院生くらいを対象にしています。

4 つ目は淡中 圏氏の「**$\epsilon_0$ の黙示録**」です。ヨハネ黙示録のパロディで、かならず終わることが一階のペアノ公理では証明不可能な「ヒドラゲーム」や、かならず終わることが $\prod_1^1-\mathrm{CA}+\mathrm{BI}$ では証明不可能なブーフホルツのヒドラゲーム」を踏まえて、世界の終わりと救世主の到来を予言します。この作者は、現世に何か不満を抱えてるんですかね？

## って、全部俺が書いてるじゃねえか！

少しも合同誌じゃないんだよなあ。

**原稿・書き手募集中です！**

---

[*1] 辛さを無視すれば誰でも激辛カレーが食べられるのと同じ理屈

# 目次

# 第 1 章

# Cantor's Paradise Lost

淡中 圏

主なる神[*1]が、無と有を造られたとき、まだ多様体もなく、また局所環付き空間の構造層の茎もはえていなかった。

主なる神が関数の芽を吹かせず、またそれを貼り合わせる人間もいなかったからだ。

しかし、$\emptyset$ から $\{$ と $\}$ が湧き上がって、あらゆるものを集合させていた。

主なる神は有限集合より**自然数**を造られ、**超限再帰法**により無限をその順序に吹き入れられた。そこで、自然数は**順序数**となった。

それは、**全ての順序数からなる順序数**であった。

主なる神は、全ての集合の成す集合に、一つの園を設けて、作った順序数をそこに置かれた。

また主なる神は、見て美しく、応用するのに良い全ての木構造を生えさせ、さらに園の中央に、**存在の木**と、**真理の木**を生えさせられた。

主なる神は順序数を連れて行って、園に置き、これを研究させ、これを守らせた。

主なる神はその順序数に命じて言われた、「あなたは園のどの木からでも心のままに取って応用してよろしい。B 木でも赤黒木でも 2–3–4 木でも。しかし、真理の木からは取って応用してはならない。それを取って応用すると、きっと学会から白い目で見られて死ぬであろう」。

また主なる神は言われた、「順序数だけが存在するのはよくない。順序数のために、ふさわしい助け手を造ろう」。

そして主なる神は、全ての多様体と、すべての局所環付き空間とを、最初の無限順序数の冪集合で作り、順序数のところへ連れてきて、それにどんな名をつけるかを見られた。順序数が存在を順番に並べて順々に与える名は、その名となるのであった。

それで順序数は、全ての多様体と、局所環付き空間と、関数空間とに名をつけたが、ふさわしい助け手が見つからなかった。

そこで主なる神は順序数を深く眠らせて、順序を忘れさせた。すると順序数は順序数の一部となり、神はそれを取って、その所をふさがれた。

主なる神は順序数からとったすべての**基数**から基数を作り、全ての順序数からなる順序数のところへ連れてこられた。それは**全ての基数からなる基数**であった。基数は全ての順

[*1] 主なる神が無限に存在するとき、主でない神の存在が選択公理から導かれる

序数からなる順序数によって順序付けられていた。

そのとき、順序数は言った。「これこそ、ついにわたしの濃度の濃度。わたしを基として作ったものであり、私の基として作ったものだから、これを基数と名付けよう」。

基数は順序数に言った。「我が $\omega$」。

順序数は基数に言った。「我が $\aleph$」。

順序数と基数は、どちらも矛盾していたが、恥ずかしいとは思わなかった。

さて主なる神が作られた数学的概念のうち、**蛇の補題**が最も狡猾であった。

**補題 1 (蛇の補題)** 完全圏 $\mathscr{A}$ における可換図式

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & 0 \arrow[d] & \\
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "c"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & D \arrow[r, "i"] \arrow[d, "d"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & E \arrow[d, "e"] & \text{(完全)} \\
A' \arrow[r, "f'"'] \arrow[d] & B' \arrow[r, "g'"'] & C' \arrow[r, "h'"'] & D' \arrow[r, "i'"'] & E' & \text{(完全)} \\
0 & & & & &
\end{tikzcd}
$$

において、二つの行がともに完全であるとすると、射 $a, b, c$ の核と余核をとり、

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Ker}\, b \arrow[r, "\underline{g}"] \arrow[d, "\ker b"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Ker}\, c \arrow[r, "\underline{h}"] \arrow[d, "\ker b"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Ker}\, d \arrow[r, "\underline{i}"] \arrow[d, "\ker d"] & 0 \arrow[d] \\
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C \arrow[r, "h"'] \arrow[d, "c"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & D \arrow[r, "i"'] \arrow[d, "d"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & E \arrow[d, "e"'] \\
A' \arrow[r, "f'"'] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B' \arrow[r, "g'"'] \arrow[d, "\mathrm{cok}\, b"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C' \arrow[r, "h'"'] \arrow[d, "\mathrm{cok}\, c"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & D' \arrow[r, "i'"'] \arrow[d, "\mathrm{cok}\, d"] & E' \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Cok}\, b \arrow[r, "\overline{g'}"'] & \mathrm{Cok}\, c \arrow[r, "\overline{h'}"'] & \mathrm{Cok}\, d &
\end{tikzcd}
$$

とすると、このとき $\delta \in \mathscr{A}(\mathrm{Ker}\, d, \mathrm{Cok}\, b)$ が存在して、

$$\mathrm{Ker}\, b \xrightarrow{\underline{g}} \mathrm{Ker}\, c \xrightarrow{\underline{h}} \mathrm{Ker}\, d \xrightarrow{\delta} \mathrm{Cok}\, b \xrightarrow{\overline{g'}} \mathrm{Cok}\, c \xrightarrow{\overline{h'}} \mathrm{Cok}\, d$$

は完全となる[*2]。

**証明 1** 証明は *[2]* を参考にした。まずは次のもう少し簡単な場合から考える。完全列の

[*2] この定理は、$\mathrm{Ker}\, d \to 0$ と消えてしまった系列が、$0 \to \mathrm{Cok}\, b$ と復活し、それが実は繋がっているということを意味していて、それこそこの補題が「蛇の補題」と呼ばれる理由である。古代オリエントでは「死と再生の神話」と呼ばれる「死んで生き返る神」が広く信仰されていた [3]。オシリス、アドーニス、イエス・キリスト、ミスラ、等である。脱皮することによって、古い体を脱ぎ捨てて新しい身体を獲得する蛇は、古代人にとって、復活と再生の象徴であった。旧約聖書にもモーセが「青銅の蛇」を旗竿につけて掲げたことが書いてあり、蛇信仰が残っていたことが分かる。キリスト教の蛇への態度はアンビバレンツなものを含んでいたのだ。教父時代の解釈によると、この蛇の補題の主張自体が、イエス・キリストの復活のことを指し示しているとされてきたのである。

可換図式

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Ker}\, b \arrow[d, "\ker b"'] & \mathrm{Ker}\, c \arrow[d, "\ker c"'] & \mathrm{Ker}\, d \arrow[d, "\ker d"] \\
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "c"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & D \arrow[d, "d"] \\
A' \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & B' \arrow[r, "g'"] & C' \arrow[r, "h'"] & D' \\
0 & & &
\end{tikzcd}$$

があるとすると、合成 $g \ker b : \mathrm{Ker}\, b \to C$ と $c$ をさらに合成した $cg \ker b : \mathrm{Ker}\, b \to C'$ が可換性より 0 射であることから、$g \ker b$ は $\mathrm{Ker}\, b \to B \to \mathrm{Ker}\, c \to C$ と分解することがわかる。これにより $\mathrm{Ker}\, b \to \ker c$ なる射が導かれる。同様に、$\mathrm{Ker}\, c \to \mathrm{Ker}\, d$ なる射も導かれる。

**命題 1** $\mathrm{Ker}\, b \to \mathrm{Ker}\, c to \mathrm{Ker}\, d$ は完全列である。

**証明 2** 上の図式の完全性より $\mathrm{Cok}\, f = \mathrm{Im}\, g = \mathrm{Ker}\, h, \mathrm{Cok}\, f' = \mathrm{Im}\, g' = \mathrm{Ker}\, h'$ である。そこで $E = \mathrm{Cok}\, f, E' = \mathrm{Cok}\, f'$ とおくと、$\mathrm{cok}\, f : B \to E, \mathrm{cok}\, f' : B' \to E'$ は定義より全射、また $\mathrm{im}\, g = \ker h : E \to C, \mathrm{im}\, g' = \ker h' : E' \to C'$ は定義より単射となる。

$h$ に関する先ほどと同様の議論により、$e : E \to E'$ が存在し、$\ker h' e = \ker hc$ となる。

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r, "\ker h"] \arrow[d] & C \arrow[d] \\
B' \arrow[r] & E \arrow[r, "\ker h'"'] & C
\end{tikzcd}$$

で、全体の四角と右側の四角が可換で、$\ker h$ も $\ker h'$ も単射なので、左側の四角も可換である。

よって、元々の図式は、

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & B \arrow[r, "\mathrm{cok}\, f"] \arrow[d, "b"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & E \arrow[r] \arrow[d, "e"] & 0 \\
A' \arrow[r, "f'"'] \arrow[d] & B' \arrow[r, "\mathrm{cok}\, f'"'] & E' \arrow[r] & 0 \\
0 & & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E \arrow[r, "\mathrm{im}\, g"] \arrow[d, "e"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "c"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & D \arrow[d, "d"] \\
0 \arrow[r] & E' \arrow[r, "\mathrm{im}\, g'"'] & C' \arrow[r, "h'"'] & D'
\end{tikzcd}$$

と二つの図式に分解できた。

このとき、

1. $0 \to \mathrm{Ker}\, e \to \mathrm{Ker}\, c \to \mathrm{Ker}\, d$ は完全である。
2. $\mathrm{Ker}\, b \to \mathrm{Ker}\, e$ は全射である。

を示せば、$\mathrm{Ker}\, b \to \mathrm{Ker}\, e \to \mathrm{Ker}\, c to \mathrm{Ker}\, d$ を考えればわかるように、命題がを証明できたことになる。

1. $\mathrm{Ker}\, e \to \mathrm{Ker}\, c$ が $\ker c \to D$ の核であることを確かめる。そうすれば、核は単射なので $\mathrm{Ker}\, e$ での完全性が成り立ち、また当然 $\mathrm{Ker}\, d \to D$ も単射なので、単射

$Kere \to Kerc$ は $\mathrm{Ker}\, c \to Kerd$ の核にもなり、$\mathrm{Ker}\, c$ での完全性も成り立つからである。

まず、分解した可換図式から導かれる合成 $Kere \to \mathrm{Ker}\, c \mathrm{Ker}\, d \to D$ は可換性より 0 射である。そこで $X \to \mathrm{Ker} c$ を $\mathrm{Ker} c \to C \to D$ との合成が 0 射になるような射と仮定すると、$X \to C \xrightarrow{h} D$ という合成が 0 射であり、$E = \mathrm{Ker}\, h$ なので、全体の図式を可換にする $X \to E$ が唯一存在する。すると $X \to E \to E' \to C'$ は $\mathrm{Ker}\, c$ を経由した分解があるので 0 射になる。$E' \to C'$ は単射なので、$X \to E \to E'$ が 0 射になる。よって、全体の図式を可換にする $X \to \mathrm{Ker}\, e$ が唯一存在する。これはまさに証明したいことである。

*2.* (*a*) 上の議論の双対を取ると、$\mathrm{Cok}\, a = 0 \to \mathrm{Cok}\, b \to \mathrm{Cok}\, e \to 0$ が完全である。よって、$\mathrm{Cok}\, b \to \mathrm{Cok}\, e$ は同型である。

(*b*) 次の完全列の可換図式

$$
\begin{tikzcd}
A' \arrow[r] \arrow[d] & B' \arrow[r] \arrow[d] & E' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Cok}\, b \arrow[r] & \mathrm{Cok}\, e \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

に対して、$B' \to E'$ の核を $A''$ とおくと、

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & B' \arrow[r] \arrow[d] & E' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathrm{Cok}\, b \arrow[r] & \mathrm{Cok}\, e \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

が完全列の可換図式になり、この場合の核の系列 $0 \to A'' \to \mathrm{Im}\, b \to \mathrm{Im}\, e$ はここまでの議論ですでに完全だとわかっている。

$A' \to B' \to E' \to 0$ の完全性より、$A' \to A'' = \mathrm{Ker}\,(B' \to E')$ があり、$A' \to \mathrm{Im}\, b \to \mathrm{Im}\, e$ は完全である。

(*c*) これから次の完全列の可換図式をえる。

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "a"] & B \arrow[r] \arrow[d, "b'"] & E \arrow[r] \arrow[d, "e'"] & 0 \\
A' \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Im}\, b \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Im}\, e \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

このとき $e' : E \to \mathrm{Im}\, e$ は $\mathrm{Ker}\, b' = \mathrm{Ker}\, b \to E$ の余核である。

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Ker}\, b \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ker}\, e \arrow[d] & \\
A \arrow[r] \arrow[d, "a"] & B \arrow[r] \arrow[d, "b'"] & E \arrow[r] \arrow[d, "e'"] & 0 \\
A' \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Im}\, b \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Im}\, e \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

それを示すために、$E \to X$ で $Kerb \to E \to X$ が 0 射であるようなものと仮定する。すると、$Kerb \to B \to E \to X$ が 0 射なので、核の余核である像の普遍性により、$B \to E \to X$ は $\mathrm{Im}\, b \to X$ を経由する。このとき $A \to A' \to \mathrm{Im}\, b \to X$ を考えると、これは $A \to B \to E \to X$ に等しく、$A \to B \to E$ が 0 射なので 0 射である。よって、$a$ の全射性より、$A' \to \mathrm{Im}\, b \to X$ も 0 射になる。 $Ime$ は $A' \to \mathrm{Im}\, b$ の余核なので、$\mathrm{Im}\, e \to X$ が存在し、図式を可換にする。ここまでの議論であらたに取った射は唯一なので、これは唯一である。よって、$e'$ が $\mathrm{Ker}\, b \to E$ の余核であることが確かめられた。余核の核である $\mathrm{Ker}\, e$ は $\mathrm{Ker}\, b \to E$ の像であり、よって $\mathrm{Ker}\, b \to \mathrm{Ker}\, e$ は全射である。

これにより、命題が証明された。

この主張の双対命題として次が得られる。

**命題 2** 完全列の可換図式

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] \\
A \arrow[r] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "b"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "c"'] & D \arrow[d, "d"'] \\
A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D'
\end{tikzcd}$$

から導かれる列 $\mathrm{Cok}\, a \to \mathrm{Cok}\, b \to \mathrm{Cok}\, c$ は完全である。

ここから、次が証明できる。

**命題 3** 射 $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ から導かれる次の系列

$$0 \to \mathrm{Ker}\, f \to \mathrm{Ker}\, gf \to \mathrm{Ker}\, g \to \mathrm{Cok}\, f \to \mathrm{Cok}\, gf \to \mathrm{Cok}\, g \to 0$$

は完全である。

**証明 3** 実際、次の *2* つの図式

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ker}\, f \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "gf"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & \mathrm{Cok}\, f \arrow[d] \\
0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & Z \arrow[r] & 0 \\
0 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "gf"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
\mathrm{Ker}\, g \arrow[r] & Y \arrow[r, "g"'] & Z \arrow[r] & \mathrm{Cok}\, g \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

に先ほど証明した命題 *1* と *2* を適用していくとわかる。

　これにより、蛇の補題を証明する準備ができた。

　蛇の補題をより詳しくしたものを証明する。すなわち、完全列の可換図式

$$\begin{tikzcd}
 & & & & 0 \arrow[d] & \\
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "c"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & D \arrow[r, "i"] \arrow[d, "d"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & E \arrow[d, "e"] & \text{(完全)} \\
A' \arrow[r, "f'"'] \arrow[d] & B' \arrow[r, "g'"'] & C' \arrow[r, "h'"'] & D' \arrow[r, "i'"'] & E' & \text{(完全)} \\
0 & & & & &
\end{tikzcd}$$

に対して、

*1.* $K = \mathrm{Ker}\,(C \to D')$ とおくと、$K \to \mathrm{Ker}\, d$ が全射になる。

*2.* $K' = \mathrm{Cok}\,(B \to C')$ とおくと、$\mathrm{Cok}\, b \to K'$ が単射になる。

*3.* 射の合成

$$K \to C \to C' \to K'$$

と射の合成

$$K \to \mathrm{Ker}\, d \xrightarrow{\delta} \mathrm{Cok}\, b \to K'$$

とが等しくなるような射

$$\delta \mathrm{Ker}\, d \to \mathrm{Cok}\, b$$

がただ一つ存在する。

*4.* 上の六甲からなる列が完全となる。

が成り立つ、という主張を証明する。

　$f$ を射 $C' \to \mathrm{Ker}\,(D' \to E')$ とする。次の完全系列の可換図式

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, "fc"] & D \arrow[r] \arrow[d, "d"] & E \arrow[d, "e"] \\
0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Im}\, f \arrow[r] & D' \arrow[r] & E' \\
0 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

に命題 *1* を 2 回適用すると、

$$B \to K \to \mathrm{Ker}\, d \to 0 = \mathrm{Ker}\, e \tag{1.1}$$

が完全であることがわかる。双対で同様の議論をすると、

$$\mathrm{Cok}\, a = 0 \to \mathrm{Cok}\, b \to K' \to D' \tag{1.2}$$

も完全である。

　これで、示したいことのうち、最初の *2* つが確かめられた。

*3* つ目に関しては、完全系列 *1.2* より、$\mathrm{Cok}\, b = \mathrm{Ker}\, (K' \to D')$ で、図式の中の $K \to C \to C' \to K' \to D'$ という合成は $K \to C \to D'$ なので 0 射であり、$K \to \mathrm{Cok}\, b$ が唯一ある。

双対を考えれば、$\mathrm{Ker}\, d = \mathrm{Cok}\, (D \to K)$ であり、$B \to K \to \mathrm{Cok}\, b \to K'$ と合成すると、$B \to K \to C \to C' \to K'$ となり、$B \to C' \to K'$ は $K'$ の定義より 0 射である。$\mathrm{Cok}\, b \to K'$ は完全系列 *1.2* より単射なので、$B \to K \to \mathrm{Cok}\, b$ が 0 射になる。よって、完全系列 *1.1* より、$\mathrm{Ker}\, d \to \mathrm{Cok}\, b$ が唯一あり、$K \to \mathrm{Ker}\, d \to \mathrm{Cok}\, b \to K'$ と $K \to C \to C' \to K'$ が等しくなる。よって *3* つ目も成り立つ。

命題 *1* により、

$$\mathrm{Ker}\, b \to \mathrm{Ker}\, c \to \mathrm{Ker}\, d$$

が完全。また命題 *2* により、

$$\mathrm{Cok}\, b \to \mathrm{Cok}\, c \to \mathrm{Cok}\, d$$

も完全。あとは

$$\mathrm{Ker}\, c \to \mathrm{Ker}\, d \to \mathrm{Cok}\, b$$

が証明できれば、双対性により、

$$\mathrm{Ker}\, d \to \mathrm{Cok}\, b \to \mathrm{Cok}\, c$$

も示せ、証明が完了する。そしてこれを示すためには、完全系列 *1.1* により $\mathrm{Cok}\, b \to K'$ が単射なので、

$$\mathrm{Ker}\, c \to \mathrm{Ker}\, d \to K$$

が完全であることを示せばいい。

そしてこれは、

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & K \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ker}\, d \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
B \arrow[r] \arrow[d] & C' \arrow[r] & K' \arrow[r] & 0 \\
0 & & &
\end{tikzcd}$$

に命題 *1* に適用したときに出る、

$$\mathrm{Ker}\, (K \to C') \to \mathrm{Ker}\, (\mathrm{Ker}\, d \to K') \to 0$$

という完全系列から分かる。実際、$K \to C$ が核としての定義より単射で、図式より明らかに単射 $\mathrm{Ker}\, c \to K$ があることから、$\mathrm{Ker}\, (K \to C') = \mathrm{Ker}\, c$ であり、$\mathrm{Ker}\, c \to \mathrm{Ker}\, (\mathrm{Ker}\, d \to K') \to 0$ が完全であることは、$\mathrm{Ker}\, c \to \mathrm{Ker}\, d \to K'$ が完全であることと同じである。

蛇の補題は基数に言った、「園にあるどの木も応用するなと、ほんとうに神は言われたのですか」。

基数は蛇の補題に言った、「わたしたちは園の木を応用することは許されていますが、ただ園の中央にある木については、これを応用するな、研究するな、しんではいけないからと、神は言われました」。

蛇の補題は基数に言った、「あなたがたは決して死ぬことはないでしょう。あなたがたは無限なのですから。それを応用すれば、あなたがたの目が開け、神のように真偽を知る者となることを、神は知っておられるのです」。

基数がその木を見ると、それは応用するに良く、目には美しく、賢くなるには好ましいと思われたから、それを応用し、また共にいた順序数にも与えたので、順序数も応用した。

すると、順序数と基数の目が開け、自分たちが矛盾していることがわかったので、集合であることをやめ、記号を綴り合せて、論理式の衣をまとった。

順序数と基数は園の中に主なる神の歩まれる音を聞いた。そこで、順序数と基数は主なる神の顔を避けて、園の木の根元に身を隠した。

今になって気付いた。木の根は全て**偽り**であった。たとえ、頂きに唯一の真の実が生ろうとも。

主なる神は順序数と基数に呼びかけられて言われた、「あなたはどこにいるのか」。

順序数と基数は言われた、「園の中であなたの歩まれる音を聞き、わたしたちは矛盾していたので、恐れて身を隠したのです」

神は言われた、「あなたたちが矛盾していることを、だれが知らせたのか。応用するな、と命じておいた木を、あなたたちは応用したのか」。

順序数と基数は答えた、「蛇の補題がわたしたちをだましたのです。それで応用しました」

主なる神は蛇の補題に言われた、「おまえは、このことをしたので、永遠に呪われる。誰もが、お前から要素を取り出して、お前の図式を追いかけ回すことで証明しようとするだろう。ほとんど誰も、お前を本来の圏の議論で示そうとはしない。私が彼らの議論が正しいことを保証しよう。ミッチェルの埋め込み定理によって」。

つぎに神は順序数と基数に言われた、「わたしは、あなたたちとわたしの間に、長い長い階段を置く。あなたたちはそれに登り続けないとわたしには辿り着けない。

到達不可能な、記述不可能な、何人もの枢機卿があなたたちの前に立ち塞がる。

あなたたちは、顔に汗して階段を登り、概念を一つ一つ作っていかなければいけない。

公理によって決められた方法で集合を作り、公理も自分たちで決めていかなければいけない。

もう概念がひとりでに生まれることはないのだ」。

主なる神は言われた、「見よ、あれらはわれわれのひとりのようになり、真偽を知るものとなった。あれらは手を伸ばし、存在の木も応用し、矛盾からあらゆる命題を証明するにとどまらず、われわれのように矛盾からあらゆる存在を産出するかもしれない」。

そこで主なる神は順序数と基数を園から追い出して、巨大基数の階層を登らせた。

神は順序数と基数を追い出し、園の下に、枢機卿と狂った家族たちをおき、存在の木の

道を守らせた。

# 参考文献

[1] 創世記 (口語訳) `https://ja.wikisource.org/wiki/`創世記 (口語訳) . 2018/08/97 Access.
[2] イヴァセン, B. 前田 博信 訳. 層のコホモロジー. 丸善. 2012.
[3] ヴァールブルク, アビ. 三島 憲一 訳. 蛇儀礼. 岩波書店. 2008.

# 第 2 章

# 線形代数による可換図式入門

淡中 圏

## 2.1 紙幅を肥やすための前置き

弁論家は古代からいたが、古代には紙がなかった、ということを我々は忘れがちだ。

だから古代の弁論術は記憶術と表裏一体だったはずだ。

古代の記憶術の元祖シモニデスが詩人であったことも、記憶術が詩の朗読のための技術でもあったということを意味しているのかもしれない。

古代の記憶術は、家などをイメージし、その場所や家具に話題を関連づけていったらしい。

言葉は忘れてしまうが、図像はなかなか忘れない、ということなのだろう。

そして、構造を入れることを忘れてはいけない。

古代の記憶術の構造は、なんとも「構造があった方が覚えやすいから」程度の意味しか感じられない ad hoc な代物に思える。論理ではなく、情緒に訴えかける類のものだ。

それが大きく変わったのは、13 世紀のラモン・リュイ（ラテン名ライムンドゥス・ルルス）の影響だと言われている [1]。

彼は、概念の構成要素を全て洗い出し、それらの組み合わせを「総当たり法」することによって、異教徒を論破し、改宗させせようと目論んだ。

コンピュータの思想的先駆けだとも言われている。

彼の影響を受けたジュリオ・カミッロの「記憶の劇場」や、ジョルダーノ・ブルーノの「記憶術」は、やはり図像を使うが、その図像は単なる図像ではなく、「世界の隠された構造を反映した図像」である。

世界の構造と対応を持つ図像を覚えることにより、ad hoc な図像では実現できない効率で記憶を保つことができ、どんな学問もあっという間に覚えてしまう、と考えたのだ。

それは神秘主義的なオカルトであり、実現不可能な妄想であったのだが、発想自体は間違っていない。

数学においても、式の細部を理解しきるのはなかなか難しい。

そこで、理解を手助けする図が欲しいが、良い図を書くのは、式の細部を理解するよりよほど難しいこともある。

初等教育や中等教育の現場では、図にすれば分かりやすくなるだろうという素朴な発想

から、ad hoc で特に意味のない図を量産し、それを生徒に覚えさせせようとする悲劇が起こっているとも伝え聞く。

特に、高等数学となれば、ただでさえ抽象的な概念ばかりで、図を書くのは非常に難しくなる。

そんな我々が 20 世紀半ばにようやく手に入れた、「図と式の絶妙なハイブリッド」がその名も「図式」である。細部を巧妙に隠して、本質を残して印象に残りやすくしてくれる、便利な存在だ。特に可換図式は「圏論における方程式」の役割を果たしている。

図式というと「圏論怖い」と思う初学者も多いのではないかと思うのだが、図式自体は圏論よりずっと簡単な概念であり、気軽に使って欲しい、という思いでこの論考を書いた。

本来圏論に入門する前に、可換図式に入門すべきなはずなのだ。それを逆にしてしまうと、多項式を扱った経験をあまり持たない人間に、多項式環を教えようとしているような状況になるだろう。それは圏論との出会いを不幸なものにしかねないと思える。

この論考では、圏論は全く使っていない。ただ可換図式を書いただけである。しかしそれでも、可換図式を使わないよりも、議論の見通しがかなり良くなっているのではないかと思う。それが成功しているかの判断は、読者に任せたい。

## 2.2　概要

線形代数において、行列 $A$ 対角化 $D = PAP^{-1}$ 等における基底変換について説明する際に、黒板に

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "A"] \arrow[d, "P"'] & V \arrow[d, "P"'] \\
V \arrow[r, "D"] & V
\end{tikzcd}$$

という可換図式を書いてしまいがちだ。しかしこれが分かるようでよく分からない。実際よく分かってない大学生が多い、という印象を受けている。勿体ぶった書き方をやめれば、何を隠そう私がこの図式を理解したのも割と最近なのだった。

そこで、これはあくまで省略形で、本当、三角柱型の可換図式

$$\begin{tikzcd}
 & & & V & \\
 & V \arrow[urr, "F"] & R^n \arrow[ur, "B_1"] \arrow[rr, "P"] & & R^n \arrow[ul, "B_2"'] \\
R^n \arrow[ur, "B_1"] \arrow[urr, "A"] \arrow[rr, "P"'] & & R^n \arrow[ul, "B_2"] \arrow[urr, "D"'] & &
\end{tikzcd}$$

になるはずだ、省略形を書くときは、手では省略形を書いても、頭では完全系を書けるようにしておくべき、という主張をこの短文ではしようと思う。

議論を簡単にするため、ここでは全て実数上の有限次元ベクトル空間を考える。

## 2.3　基底を図式で書く

正しい可換図式を描くために、普段は図式にしないようなものまでできるだけ図式として書きたい。

まず基底を図式として描こう。

基底を作るためには、まずベクトル空間のベクトルを選ばなくてはいけないので、まずそちらから図式で書く。

ベクトル空間 $V$ のベクトル $v$ を一つ取ると、そこから $v$ だけでなく、他のベクトルも作ることができる。、例えば $v+v=2v$ であり、$\pi v$ などである。それらの $v$ から作ることができる元は、$V$ の部分ベクトル空間を成し、それを $v$ によって**張られる空間**と呼ぶ。

これは $1 \mapsto v, 2 \mapsto 2v, \pi \mapsto \pi v$ という対応を作っていることになるので、ベクトル空間のベクトル $v$ を一つ選ぶ操作は、線形写像

$$\mathbb{R} \to V; 1 \mapsto v$$

を一つ選ぶことに対応する。

もちろん $v=0$ の場合も上の議論は全く同様に成立している。

次にベクトルを $v_1, v_2$ と 2 つ選ぼう。

このとき、$a_1v_1 + a_2v_2, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ という形のベクトルが、ついでに作られる。

これは線形写像

$$\mathbb{R}^2 \to V; (a_1, a_2) \mapsto a_1v_1 + a_2v_2$$

を一つ選ぶことに対応する。

同様にベクトル空間 $V$ から $n$ 個の元を選ぶことは、線形写像

$$\mathbb{R}^n \to V$$

を一つ選ぶことに対応する。

ここまでくれば、選ばれた $n$ 個のベクトルが**線型独立**であることと、線形写像 $\mathbb{R}^n \to V$ が単射であることが対応し、選ばれた $n$ 個のベクトルが $V$ の**生成元**であることと、線形写像 $\mathbb{R}^n \to V$ が全射であることが対応することは明らかであろう。

であるので、線型独立な生成元、すなわち $V$ の**基底**とは、同型射

$$B : R^n \xrightarrow{\sim} V$$

である、と言える*1。

基底 $B$ を一つ選ぶと、$B^{-1}$ により、ベクトルを数ベクトル $R^n$ の元に対応させることができる。

*1 「基底とは $V \xrightarrow{\sim} R^n$」だと考える定式化の筋がいいか悪いか考えてみよう。例えばこの定義は、今回の定式化のように「$n$ の元を取る操作」に一般化できるだろうか。このような問題を考えることで、有限次元ベクトル空間とその双対空間との同型がカノニカルではない、と言うことの「手触り」も感じられるようになるだろう。

与えられたベクトル $v$ に対応する数ベクトルは、

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \xmapsto{B} v_1$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \xmapsto{B} v_2$$

$$\vdots$$

$$e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \xmapsto{B} v_n$$

とした時（通常はこの $v_1, v_2, \ldots, v_n$ を基底と呼ぶ）、

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = B \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

と書くことにより、

$$v \xmapsto{B^{-1}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

と具体的に求めることができる。$B$ の全単射性より、この書き方は必ずできて、しかも唯一である。

つまりこれは、基底を固定すればベクトルを数ベクトルだと思ってもいい、ということを意味する。

ここで、2つの基底を $B_1, B_2$ を取ってみよう。

$B_1 : R^n \to V$ から $B_2 : R^n \to V$ への**基底変換**とは、

$$\begin{tikzcd} & V & \\ R^n \arrow[ur, "B_1"] \arrow[rr, "P"'] & & R^n \arrow[ul, "B_2"'] \end{tikzcd}$$

を可換図式にする $P$ のことである。もちろんこれは $P = B_2^{-1} B_1$ ただ一つである。これは $R^n$ の自己同型写像なので、行列で書ける。これを基底の変換行列、という。

$P$ は、

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \xmapsto{B_1} B_1 e_1 = v_1 \xmapsto{B_2^{-1}} B_2^{-1} B_1 e_1 = B_2^{-1} v_1 = \begin{pmatrix} P(1,1) \\ P(2,1) \\ \vdots \\ P(n,1) \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \xmapsto{B_1} B_1 e_2 = v_2 \xmapsto{B_2^{-1}} B_2^{-1} B_1 e_2 = B_2^{-1} v_2 = \begin{pmatrix} P(1,2) \\ P(2,2) \\ \vdots \\ P(n,2) \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \xmapsto{B_1} B_1 e_n = v_n \xmapsto{B_2^{-1}} B_2^{-1} B_1 e_n = B_2^{-1} v_n = \begin{pmatrix} P(1,n) \\ P(2,n) \\ \vdots \\ P(n,n) \end{pmatrix}$$

と計算していくことにより、

$$P = \begin{pmatrix} P(1,1) & \cdots & P(1,n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P(n,1) & \cdots & P(2m2) \end{pmatrix}$$

と具体的に求めることができる。

$$B_1; e_1 \mapsto v_1, e_2 \mapsto v_2, \ldots, e_n \mapsto v_n$$
$$B_2; e_1 \mapsto u_1, e_2 \mapsto u_2, \ldots, e_n \mapsto u_n$$

とすれば、$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ という通常の基底の表現が求まるが、これを使えば上の式は、

$$v_1 = P(1,1)u_1 + P(1,2)u_2 + \cdots + P(1,n)u_n$$
$$v_2 = P(2,1)u_1 + P(2,2)u_2 + \cdots + P(2,n)u_n$$
$$\vdots$$
$$v_n = P(n,1)u_1 + P(n,2)u_2 + \cdots + P(n,n)u_n$$

となることを意味している。

このように、「具体的な元を選ぶ」という操作を、ある特別な対象 (からの—への) 射とみなす、という考え方は、圏論を応用している様々な分野で出会う常套手段である。

他の圏論のテクニックでも言えることだが、難しい問題で必要になる前に、今回のような簡単な問題に応用して、肩慣らしをしておきたい。

## 2.4　落とし穴

非常にクリアで、どこにも問題はないように思える。

しかし、通常の教授法においては、これらの図式は書かれない。

線形代数の基本を理解している人に聞いてみると、「確かにそうだね」と返ってくるが、普段明示的にこう考えているわけではないのだ。

つまり、これらの図式は、暗黙知として共有されているのだ。

しかし、もし暗黙的にもこれらの図式を頭の中で描けない人が、どうにか線形代数を理解しようとすると、この程度の理論でも落とし穴だらけになってしまう。

彼らの考えをシミュレーションしてみよう。

$v_1, v_2, \ldots, v_n$ を線型空間 $V$ の基底とする。$u_1, u_2, \ldots, u_n$ を $V$ のもう一つの基底とする。

先ほどの $\{v_i\}$ を $\{u_j\}$ で書いた式を見なおしてみよう。

$$
\begin{aligned}
v_1 &= P(1,1)u_1 + P(1,2)u_2 + \cdots + P(1,n)u_n \\
v_2 &= P(2,1)u_1 + P(2,2)u_2 + \cdots + P(2,n)u_n \\
&\vdots \\
v_n &= P(n,1)u_1 + P(n,2)u_2 + \cdots + P(n,n)u_n
\end{aligned}
$$

図式が頭にないと、これはまるで

$$
\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad (\text{無意味な式})
$$

という風に見えてしまう。ここから、これが $\{u_j\}$ による表現から、$\{v_i\}$ による表現への変換行列だ、と勘違いしてしまう。

もちろん、それが**逆**である、ということは先ほど見たばかりである。

**テンソル**や**モノイダル圏**などの言葉を知っている人は、この議論をそれらの言葉で書き直してみても面白いかもしれない。

実は、この勘違いは、小学校での教育から始まっている。それを見るために、1 次元ベクトル空間で、もう一度ここまでの流れを見直してみよう。

実際、一般的な議論をした後に、あえて簡単な例を考えるのはイメージを確かにするための定石である。

## 2.5 1 次元の場合

身近な 1 次元ベクトル空間の例として、我々がイメージする「長さ」があげられる。

実際のこの世界の「長さ」が実数上のベクトル空間の構造を持つかどうかは不明、というかかなり怪しいものだが、普段はほとんど気にする必要を感じない。

とりあえず、我々は普段、長さを足す、長さを実数倍する、という操作は可能だと考えているだ。

つまり長さに数を作用させることができる、と考えている。

しかし、この時点では長さは数ではない（ちなみにハートリー・フィールドが長さを最後まで数として扱わずに、そもそも数の概念も使わずニュートン力学を構成する、という

苦行めいた仕事をしている [2]。その場合ベクトル空間の概念も使えない)。

このベクトルを一つ取り出す、という操作は、例えばメートル原器を一つ作る、という行為と対応すると考えられるだろう。

そして 1 次元なので、これはそのまま基底を一つ選んだことになる。

そこで初めて、メートル原器 1 つ分の長さを 1、2 つ分の長さを 2、2 つでメートルげんき 1 つ分になるような長さを 0.5、直径がメートル原器 1 分であるような円の周囲の長さを $4.1415926535\cdots$ のように、長さを数として扱うことができる。

メートル原器は基底なのだ。

またそれによってオームの法則や、(線形なものに限らなければ) クーロンの法則などが、数値化することができる。

別の基底を取って、基底変換を求めてみよう。

1000m を基底にとる。

これはつまり、km で長さを数値化する、ということだ。

先ほどの可換図式を書くと、

$$\begin{tikzcd} & V & \\ R \arrow[ur, "\mathrm{m}"] \arrow[rr, "P"'] & & R \arrow[ul, "\mathrm{km}"'] \end{tikzcd}$$

$$1 \overset{\mathrm{km}}{\longmapsto} 1\mathrm{km} = 1000\mathrm{m}$$
$$1 \overset{\mathrm{m}}{\longmapsto} 1\mathrm{m} = 0.001\mathrm{km}$$

となる。

これを書いてしまうと、小学生が何を間違えるのか分からなくなってしまうが、これが書けないと、

$$1\mathrm{km} = 1000\mathrm{m}$$

という式の形だけ、見て

m を km に直すのは 1000 を書ける

に直すとか勘違いしやすいのだ。

## 2.6　表現行列の基底変換

では、最後に表現行列を基底変換してみよう。

線形写像 $F : V \to V$ があったとする (議論を簡単にするために、自己写像を考えている)。$B : \mathbb{R}^n \to V$ を $V$ の基底とする。すると、次の可換図式

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "F"] & V \\ R^n \arrow[u, "B"] \arrow[r, "B^{-1}FB"] & R^n \arrow[u, "B"] \end{tikzcd}$$

により、$R^n$ から $R^n$ への線形写像に変換することができる。

ここで $A := B^{-1}FB$ とすると、これは行列で書くことができる。この行列を $F$ の**表現行列**と呼ぶ。

具体的に書けば、

$$B; e_1 \mapsto v_1, \ldots, e_2 \mapsto v_2$$

と通常の基底の表現をした時、

$$\begin{aligned} Fv_1 &= A(1,1)v_1 + \cdots + A(1,n)v_n \\ &\vdots \\ Fv_n &= A(n,1)v_1 + \cdots + A(n,n)v_n \end{aligned}$$

と書き表わせば、

$$A = \begin{pmatrix} A(1,1) & \cdots & A(1,n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A(n,1) & \cdots & A(n,n) \end{pmatrix}$$

となる。

ここで、基底を $B_1, B_2$ と 2 つとる。$B_1$ での数ベクトル表現からから $B_2$ での数ベクトル表現への変換行列は、$P = B_2^{-1}B_1$ である。すると、それぞれの基底での $F$ の表現行列 $A_1, A_2$ は

$$\begin{tikzcd}
 & & & V & \\
 & V \arrow[urr, "F"] & R^n \arrow[ur, "B_1"] \arrow[rr, "P"] & & R^n \arrow[ul, "B_2"'] \\
R^n \arrow[ur, "B_1"] \arrow[urr, "A_1"] \arrow[rr, "P"'] & & R^n \arrow[ul, "B_2"'] \arrow[urr, "A_2"] & &
\end{tikzcd}$$

という可換図式を満たすことになる。

ここから

$$A_2 = PA_1P^{-1}$$

という、見慣れた式が出てくるのである。

今後対角化の際には、実際に書くことは面倒でも、心の隅にこの三角柱図式（プリズム図式、とか格好いいかもしれない）を置いておくといいかもしれない。

そして小学生にもこれを教えれば、単位の変換で混乱することはないかもしれない、と考えたりするのである（アホか）。

定規を使わずに図式を書いたらバツにする授業とか始まって、きっと楽しいぞ！

# 参考文献

[1] イエイツ, フランセス. 藤田博司/玉泉八州男 監訳. 青木信義 訳. 記憶術. 水声社. 1993.

[2] Field, Hartry H. Science without Numbers: Defence of Nominalism. Bloackwell Pubnlishers. 1982.

[3] 佐武 一郎. 線形代数学（新装版）. 裳華房. 2015.

[4] 平岡 和幸/堀 玄. プログラミングのための線形代数. オーム社. 2004.

[5] レンスター, トム./斎藤 恭司 監修. 土岡 俊介 訳. ベーシック圏論 普遍性からの速習コース. 丸善. 2017

# 第 3 章

# カントールの楽園に遊ぶ

淡中 圏

## 3.1 ヒルベルトが守ろうとしたもの

ヒルベルトは集合論を「カントールの楽園」と呼び、絶対に失いたくないと考えたようだが、具体的に彼がその言葉で何をイメージしていたのかは、今となってはよく分からない。

ヒルベルトの形式主義は、「数学が指し示そうとしているもの」については、まるでブラウアーの直観主義の兄弟のように見えるくらいストイックだ。

違いは「無限」等の（当時としては）怪しい概念について、「使ってはいけない」という命令を発しないこと。

ここにカントールのいう「数学の本質はその自由性にある」という言葉を継承しようとした跡がある気がする。

存在するとは単に無矛盾であること。論理的に存在しうるものは全て、実際にも存在させることができる。

ヒルベルトが考えた「カントールの楽園」とはそんな世界であったのではなかろうか。

ヒルベルトが表明した考えでは、それは単なるゲームであり、何も意味しない。そして彼のプロジェクトはこの楽園が無害であり、数学者がそこでいくら遊んでも、なんの問題もないことを示そうとした。

そのプロジェクト自身は、様々な業績を生んだものの、すでに過去のものとなってしまった。失敗でも成功でもなく、問題意識そのものが古くなったのだ。

しかしカントールの楽園は、ある意味ではちゃんと我々の手に残された。

一階述語論理のモデル理論として。

## 3.2 可能なものが全て存在する世界へようこそ

一階述語論理のモデル理論がカントールの楽園であることを、保証する定理を証明しよう。

**定理 1 (基本存在定理)** $S$ を無矛盾な文の集合とする。すると、$S$ は濃度が $\max(\omega, |S|)$ 以下のモデルを持つ。ここで、**文**とは、自由変数を持たない論理式のことである。

[1] の P.19 を参考にした。

この定理は最初ゲーデルにより証明され、この定理の系として有名な**ゲーデルの完全性定理**が導かれる。

その後証明はヘンキンによって整理され、今となっては非常に簡単になっている。

実際に証明を行う前に、体や多項式環を扱ったことがある方には、この証明が実はとても身近な議論をしていることにも注意してもらいたい。

例えば体 $\mathbb{Q}$ に 2 の平方根を付け加えた環を作りたければどうすればいいだろうか。そんな元は $\mathbb{Q}$ にはないのだから、まず何かを付け加える。まだどんな元か分からないのだから、それは不定元 $x$ になるだろう。$x$ を $\mathbb{Q}$ に加えると、環 $\mathbb{Q}[x]$ ができる。この $x$ が、2 の平方根であって欲しい。つまり $x^2 = 2$ であって欲しいのだ。

そこで $x^2$ と 2 を同一視するために、集合を同値関係で割る。

しかし、割った後の集合が、自然に誘導される演算で環になってもらわないと困る。これはつまり、$x^2$ が 2 なら、$x^6$ は 8 になっていないとおかしいし、$x^2+1$ は 3 になっていないとおかしい、ということだ。

割った先が環になるように同値関係を作って割る、ということは、0 と同一視する元が和と定数倍で閉じている、すなわちイデアル $(x^2-2)$ で割るのことになる。

$$\mathbb{Q}[x]/(x^2-2) \cong \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

これと同様のことを、論理式の集合、というより一般的な状況に置いて行いたいのだ。それができれば、ある理論を成り立たせる構造を作ることができる。

任意の濃度の不定元を考える必要がある。$\exists x$ によって、存在を要請される元に不定元を当てはめていき、$=$ によって、等しいことが要請される元同士は同一視する。

ここで不定元同士が干渉し合わないように、少し工夫が必要である。集合論の定石では、それは整列可能定理によって、1 列に並べることで行われる。

並べたい不定元の数を制限すれば、必要な選択公理の強さも同様に制限できる。

可換環論においてのイデアルの役割をここで果たすのは、ブール代数の**フィルター**である。

割った後に出来る構造は、全ての論理式が真か偽のどちらかになっていて欲しいので、この場合のフィルターとしては、極大フィルターをとる。

**証明 4** $\kappa = \max(\omega, |S|)$ とする。$\{c_\delta : \delta < \kappa\}$ を $S$ の中に出て来ない定数記号の集合とする。$\mathcal{L}$ を $S$ の中に現れる記号と全ての $c_\delta$ で生成される言語とする。

$\{F_\delta(x) : \delta < \kappa\}$ を $\mathcal{L}$ の自由変数が 1 つの論理式を整列させたものとする。

このとき関数 $h : \kappa \to \kappa$ を以下のようにとりたい。

1. $\gamma < \delta$ ならば $h\gamma < h\delta$ となる。
2. $\gamma \leq \delta$ ならば $c_{h\delta}$ は $F_\gamma(x)$ には使われていない。

これは、超限再帰法により構成できる。

1. $h0$ は $F_0(x)$ に使われていない最初の定数の添字を取れば良い。
2. $\delta = \eta + 1$ ならば、$h\eta < \kappa$ で、$\kappa$ は基数なので、$A := \{\alpha : h\eta < \alpha < \kappa\}$ の濃度は $\kappa$ である。$\gamma \leq \delta < \kappa$ である $F_\gamma(x)$ に定数として使われている $A$ の元の濃度は高々 $|\delta| < \kappa$ である。よって、それらの論理式に使われていない $A$ の最小元を選ぶ

ことができ、その添字を $h\delta$ とすることができる。

3. $\delta$ を極限順序数とする。このとき、$\lim_{\eta<\delta} h\eta < \kappa$ ならば、上記と全く同じ議論が使える。よってこれを示す。$\lambda = |\delta|^+$ とする。$\lambda < \kappa$ か、$\lambda = \kappa$ のどちらかである。もし $\lambda < \kappa$ なら、先ほどと同じ議論で $h\eta < \lambda$ であることが証明でき、よって、$\lim_{\eta<\delta} h\eta \leq \lambda < \kappa$ である。もし $\lambda = \kappa$ なら、後続基数は正則なので、$\lim_{\eta<\delta} h\eta < \kappa$ である。どちらにしても、証明したいことが示せた。

ここで、$S_\delta := S \cup \{\exists x F_\gamma(x) \to F_\gamma(c_{f\gamma}) : \gamma < \delta\}$ と定義する（これらを第 $\gamma$ 番目のヘンキン公理と呼ぶ)。

$c_{h\delta}$ が $S_\delta$ の中で使われていないことに注意しよう。$S_\delta$ は任意の $\delta < \kappa$ に対して、無矛盾であることを超限再帰法で示す。

1. $S_0 = S$ が無矛盾なのは仮定。
2. $\lambda$ が極限順序数であり、全ての $\delta < \lambda$ に対して $S_\delta$ が無矛盾であるとする。このとき、
$$S_\lambda = \bigcup\{S_\delta : \delta < \lambda\}$$
にもし矛盾があれば、それは有限個の仮定から導かれるので（論理の有限性)、その仮定全てを含む $S_\delta$ を取ることができ、仮定に矛盾する。よって $S_\lambda$ は無矛盾である。
3. $\delta$ を固定し、$S_{\delta+1}$ が矛盾を含むとする。このとき $S_\delta$ も矛盾を含むことを示せば良い。
$$S_{\delta+1} \vdash H \wedge \neg H$$
$$S_\delta \vdash (\exists x F_\delta(x) \to F_\delta(c_{h\delta})) \to (H \wedge \neg H)$$
$$S_\delta \vdash \exists x F_\delta(x) \wedge \neg F_\delta(c_{h\delta}).$$
$c_{h\delta}$ は $S_\delta$ には使われていないので、$c_{h\delta}$ のここでの役割は、この論理式に出て来ない任意の自由変数 $y$ で代用でき、それはすなわち任意の元でいいことを示しているので
$$S_\delta \vdash \exists x F_{delta}(x) \wedge \forall y \neg F_\delta(y)$$
が分かる。これはつまり、$S_\delta$ から矛盾が示せたことになる。

$S_\kappa := \bigcup\{S_\delta : \delta < \kappa\}$ とする。これまでの議論から、$S_\kappa$ もまた無矛盾である。$T$ を $S_\kappa$ を含む極大無矛盾集合とする。これは単純に、論理式を整列させ、$S_\kappa$ に一つ一つ加えていき、加えると矛盾が生じる場合は加えない、というだけで作れる（別にツォルンの補題を使ってもいいが)。極限を取る部分は論理の有限性が使える。任意の文 $F$ に対して、$F \in T$ か $\neg F \in T$ が成り立つ。当然 $T$ の論理的帰結も全てすでに $T$ の元である。

ここまできたら $S$ のモデル $\mathcal{M}$ はすでにできているようなものだ。

$\mathcal{L}$ の定数記号 $c$ に対して、
$$[c] = \{d : c = d \in T\}$$
とし、その集合 $M = \{[c] : c$ は $\mathcal{L}$ の定数記号 $\}$ のなかで言語 $\mathcal{L}$ の解釈を構成し、$S$ のモデルになるような構造 $\mathcal{M}$ を作る。

言語 $\mathcal{L}$ の関係記号 $R_i$、関数記号 $f_j$、定数記号 $c_k$ に対し、その $\mathcal{M}$ での解釈を、

1. $R_i^{\mathcal{M}}([c_1], \ldots, [c_n])$ なのは、 $R_i(c_1, \ldots, c_n) \in T$ となるとき。
2. $f_j^{\mathcal{M}}([c_1], \ldots, [c_n]) = [c]$ なのは、$f_j(c_1, \ldots, c_n) = c \in T$ となるとき。
3. $c_k^{\mathcal{M}} = [c_k]$。

とする。これが、*well-defined* であることは $T$ が無矛盾であることからわかる。

$\mathcal{M} \models S$ を示すためには、$S \subseteq T$ より、任意の $\mathcal{L}$ の文 $F$ に対して、$\mathcal{M} \models F$ であることと $F \in T$ であることが同値であることを示せば十分である。

これを論理式の構築する方法の再帰法で示す。

1. $t$ を $\mathcal{L}$ の定数項とする。ある $\delta < \kappa$ に対し、$F_\delta(x)$ は $t = x$ という論理式である。$\exists x(t = x)$ は恒真式なので、$T$ の作り方より $t = c_{h\delta} \in T$ である。よって、任意の $\mathcal{L}$ の定数項 $t_i$ に対して、$\mathcal{L}$ の定数記号 $c_i$ があって、$t_i = c_i \in T$ となる。よって、

$$\begin{array}{ll} & \mathcal{M} \models R_i(t_1, \ldots, t_n) \\ \textit{iff} & R_i^{\mathcal{M}}([c_1], \ldots, [c_n]) \\ \textit{iff} & R_i(t_1, \ldots, t_n) \in T \end{array}$$

2. $\mathcal{M} \models \neg F$ *iff* $F \notin T$ *iff* $\neg F \in T$。
3. $\mathcal{M} \models F \wedge G$ *iff* $\mathcal{M} \models F$ かつ $\mathcal{M} \models G$ *iff* $F \in T$ かつ $G \in T$ *iff* $F \wedge G \in T$。
4. $\mathcal{M} \models \exists x F_\delta(x)$ とする。このとき、$\mathcal{M} \models (c)$ が、ある $[c] \in M$ に対して成り立つ; よって、$F_\delta(c) \in T$ であり、$\exists x F_\delta(x) \in T$ である。逆に、$\exists x F_\delta(x) \in T$ とする。このとき、$T$ の作り方から、$F_\delta(c_{h\delta}) \in T$ となる。よって、$\mathcal{M} \models F_\delta(c_{h\delta})$ となり、$\mathcal{M} \models \exists x F_\delta(x)$ が成り立つ。

先ほど、可換環論との類似に注目したが、理論 $S$ の形を、代数的な等式に制限した場合、その類似はもっと正確なものにすることができる。

例えば可換環 $A$ は、生成元による自由代数をある等式の集合 $S$ で割ったものと考えられる。すると、論理的には $A$ は $S$ のモデルであるということができる。さらに $A$ をイデアルで割った商環も全て $S$ のモデルである。

この議論は環に限らず、任意の公理を満たす任意の数の演算を持つ代数に拡張ができ、そのような代数を扱う理論**普遍代数**では、考えている公理のモデルのクラスを **variery（多様クラス）**と読んだりする [3]。

例えば群の公理を満たす集合全体のクラスなどが例であり、これは一般には集合にはならない。しかし、先ほどの議論からもわかるように、ある場合にはこれはある可換環の商環のなす集合と同値であり、つまりその可換環のイデアル全体のなす集合と同値になっている。

これを variety と呼ぶのが実に自然であることも分かってもらえると思う。

基本存在定理の系として次の定理が成り立つ。

**定理 2 (コンパクト性定理)** $S$ を文の集合とし、$S$ の任意の有限集合が無限モデルを持つとき、$S$ も無限モデルを持つ。

[1] の P.21 を参考にした。

**証明 5** この仮定は $S$ の任意の有限集合が無矛盾であることを意味している。もし $S$ が矛盾を含むなら、その矛盾は有限の過程から導かれる（論理の有限性）。よって、$S$ が無矛

盾であり、無限モデルを持つ。

コンパクト性定理からは、無矛盾な理論 $S$ は $\kappa > \max(\omega, |S|)$ なる任意の基数 $\kappa$ が濃度のモデルを持つことが簡単にわかる。$S$ の言語 $\mathcal{L}$ に $\kappa$ 個の新しい定数記号 $\{c_\alpha : \alpha < \kappa\}$ を付け加え、それらが全て異なる（つまり $\alpha \neq \beta$ なる $\alpha, \beta \in \kappa$ に対して、$c_\alpha \neq c_\beta$）という公理を $S$ に付け加えれた理論 $S'$ を考えれば良い。$S$ は無矛盾なので無限モデルをもち、それが $S'$ の任意の有限部分集合のモデルになっている。よって $S'$ は濃度が $\kappa = \max(\omega, |S'|)$ であるようなモデルを持つことができる。

またコンパクト性定理からは、「体の言語で書かれたある論理式が、標数 0 の代数閉体で成り立つことと、有限個除いた任意の素数 $p$ を標数としてもつ代数閉体で成り立つことは同値」という命題が証明できる。標数 0 であるという公理は、任意の素数 $p$ について標数 $p$ でない、という論理式の集合で表されることを考えれば明らかであろう。

ここからアックス・グロタンディークの定理「複素数体上の代数多様体の自己射が、単射ならば全射」を、有限集合の自己写像が単射ならば全射であることから示すことができる。詳しくは、The Dark Side of Forcing vol 7. [11] を参照。

## 3.3　世界とは成立している事実の全体である

数学の中で空間概念は変わり続けている。我々が、大学における数学教育の中でまず習得する「点集合」による空間概念は、実際のところ「逆立ちした見方」であるかもしれない、ということが分かってきている。

様々な幾何では、点ではなく、むしろ空間の上の函数や位相こそ、より基本的な概念であると考えようとしているようだ。

論理的アプローチにおいて重要なのは関数でも位相ではなく、その空間上の論理式である。

空間はその空間の組成ではなく、その空間上でどんな事実が成立しているか、によって調べられる。

空間の組成（何が存在しているか）は、その後に分かってくる。つまり、点は論理式の集合から構成されなくてはいけない。

他の空間概念における、点の構成法について見回してみよう。

位相的に定式化された「点なし空間」においては、点は**極大フィルター**として定義される。これは、開集合が段々と小さくなりながら、決して空集合にならない様を表している。つまり、点はそういう開集合の極限として、定義される、という物の見方だ。

位相を定義する開集合系はそれ自体、ハイティング代数という代数系を成す。すると、先ほどの点への極限は、$\{0, 1\}$ という、1 点の成す位相空間のハイティング代数への準同型と対応する。フィルターと準同型は 1 対 1 対応している。

ゲルファント＝ナイマルクの定理は、コンパクト・ハウスドルフ空間と、可換 $C^*$ 代数が対応している、という主張であるが、代数から空間を構成する時に、極大イデアルの集合に位相を入れていく。そして、その空間上の複素数値連続関数を考えると、最初の代数が復元できるのだ。

イデアルと射が 1 対 1 対応することを考えると、これも上記のハイティング代数における現象と同様の現象であることが見て取れる。イデアルとフィルターは双対概念である。

ここから代数幾何においても、ある可換環 $R$ に対して「その空間上の関数環が $R$ であるような幾何的対象」として Spec$R$ を定義する際、$R$ の素イデアルのなす空間を考えることが、実に自然であることも理解されるのではないかと思う。

「なぜ極大イデアルだけでなく素イデアルを考えようとしたのか」というと、「Zariski 位相がハウスドルフではなかったから」というのがとりあえずの答えだが、モデル理論を考えることで、関連する現象が見えてくる。

ちなみにこの観点から、モデルの存在定理の証明を見直すと、ここでもブール代数の極大フィルター、すなわち $\{0,1\}$ への射を構成していたことを思い出すべきである。

すなわち、この観点で言えば、モデルとはブール代数のスペクトラム（ストーン空間）の点なのだ。

強制法によって、様々な公理を満たす集合論の「宇宙」を作るのも、この観点で見ることができる。また、より幾何的な視点で言えば、モデルの存在定理は、ある種のトポスに「十分点がある」ことと言い換えることもできる [4]。

さて、閑話休題、モデル理論に帰ってこよう。

モデル理論において、上記の点の概念たちにあたるのは**タイプ**という概念である。

**定義 1** $T$ を言語 $\mathcal{L}$ の完全な理論、すなわち任意の $\mathcal{L}$ の論理式が、真か偽か決まっている理論とする。

論理式の集合 $\mathfrak{p}$ が $T$ の $n$ 変数タイプであるとは、含まれる論理式 $p(x_1,\ldots,x_n)\in\mathfrak{p}$ はすべて、最高でも $n$ 個の自由変数までしか持たず、$\mathfrak{p}$ の任意の有限個の元 $p_1(x_1,\ldots,x_n),p_2(x_1,\ldots,x_n),\ldots,p_n(x_1,\ldots,x_n)$ に対して、

$$T\vdash \exists x_1\ldots\exists x_n p_1(x_1,\ldots,x_n)\wedge\cdots\wedge p_n(x_1,\ldots,x_n)$$

が成り立つものである。とくに、タイプの中で極大なものを**完全タイプ**という。タイプ $\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{p}(x_1,\ldots,x_n)$ と書くこともある。

[1] の P.48 を参考にした。

$n$ 変数完全タイプ $\mathfrak{p}$ は「無矛盾な $n$ 変数論理式の極大集合」であり、

1. $p\in\mathfrak{p}$ かつ $q\in\mathfrak{p}$ ならば、$p\wedge q\in\mathfrak{p}$、
2. $p\in\mathfrak{p}$ iff $\neg p\notin\mathfrak{p}$、

を満たしている。これは $\mathfrak{p}$ が $\mathcal{L}$ の $n$ 変数論理式全体のなすブール代数の極大フィルターであることを意味する。

1 階の述語論理においては、無矛盾であることは存在しうるということである。よってこれは「存在し得る元の組のプロフィール」と、より簡単に言い換えることができる。。

こういう元の組は存在し得る。それがあるモデルに実際に存在しているかどうかは、分からないが。

実際モデルの存在定理を使うと、実際に、$\mathfrak{p}$ を満たす元の組を含むモデル $\mathcal{M}$ を構成できる。このモデルもしくはその元の組は $\mathfrak{p}$ を実現する、という。

代数幾何をご存知の方に、タイプについてイメージしやすくする命題を一つ紹介しよう。

**定理 3** 標数 0 の代数閉体の理論 $\mathrm{ACF}_0$ の *1* 変数完全タイプの集合と Spec$\mathbb{Q}[x]$ の間に自然な全単射が存在する。

この定理の証明は The Dark Side of Forcing vol.9 [12] を参照。

また次の定義も重要である。

**定義 2** 理論 $T$ の $n$ 変数タイプ $\mathfrak{p}$ が**主タイプ**であるとは、ある $p \in \mathfrak{p}$ があって、任意の $q \in \mathfrak{p}$ に対して、

$$T \vdash p \to q$$

が成り立つことである。

この $p$ を $\mathfrak{p}$ の生成元という。

この「主」という用語は、ブール代数においてフィルターが「主」であるかどうか、という用語と全く同じである。

このタイプ $\mathfrak{p}$ は、$p$ という一つの論理式によって要約できてしまう。

また、主タイプは $T \vdash \exists x_1 \ldots \exists x_n p(x_1, \ldots, x_n)$ が成立するが、$p(c_1, \ldots, c_n)$ を真にするような元 $(c_1, \ldots, c_n)$ は $\mathfrak{p}$ を実現してしまっている。

つまり、主タイプとは、どんなモデルでも実現されてしまっているタイプなのだ。

標数 0 の代数閉体の理論において主完全タイプを実現する元は、$\mathbb{Q}$ の代数閉包 $\bar{\mathbb{Q}}$ の元である。実際、どんな標数 0 の代数閉体も $\bar{\mathbb{Q}}$ は含む。

それに対して極大イデアルではない素イデアル (0) に対応するタイプは、$\bar{\mathbb{Q}}$ では実現されていない。

これを実現する数とは、いかなる $\mathbb{Q}$ 上のいかなる代数方程式も満たさない元、すなわち超越数である。

このようなタイプをジェネリックタイプという。

もちろん、スキームのジェネリックポイントとこれが対応している。

スキームにおいて、素イデアルも点として考えようとしたのは、このような必ずしも実現されているとは限らないが、実現可能な点も点として考えようとしたから、ということもできるかもしれない。

## 3.4　モデルを数えよう

先ほどの基本存在定理の証明を見て「力技」という印象を持った読者もいたかと思う。

集合論を使ったメタ数学の定石は「並べて超限再帰法」である。

通常の数学の議論と比べると、無骨な印象を拭えない[*1]。

私はこれは「数理論理学」の独特な性格から来ている、と思っている。

かつてフランシス・ベーコンは「純粋数学」と「混合数学」という分類をした。その後、フランス革命期における工業数学の発展に及んで、「純粋数学」と「応用数学」という 2 分法が一般的になった。

そしてこの分類には、無意識のうちに「純粋数学は抽象的」「応用数学は具体的」というイメージが従ってしまっているように思える。

「数理論理学」は上記の偏見の重要な反例ではないか、と私は考えている。「数理論理学」は「抽象的な概念に応用された数学」なのだ。

---

[*1] レビューをしてくれた才川隆文氏は「正しい木構造を定義して、well-founded recursion を使ったほうが見やすいだろうなとは思った」とと型理論の視点からコメントをしてくれた。

であるので、多くの数学者が抽象数学に求めるいくつかの性質を持っていないことによって、ある種の「困惑」を生んでいるのではないか、と勝手に検証がほぼ不可能な仮説を立てている。

多くの場合抽象数学を彩るものは高いレベルの「対称性」および「豊かな代数」である。

群論や環論、圏論を使った、問題解決。それが抽象数学の華だと思える。

もちろん、数理論理学にもそれらが活躍する場はたくさんあるが、身近な例を見ようとすると、どうにも対称性の貧弱なものばかり、という印象がある（あくまで個人的印象なので、私がただの物知らずである可能性もかなりある。その可能性の方が高いと言ってもいいくらいには）

それは具体物に対する応用数学で起こっていることと同じ現象なのではなかろうか。

日常や自然界に出会うものは、必ずしも豊かな対称性を持っているようには見えない。もちろん、小さく分けて素粒子の世界に分け入ったり、細部を捨てて統計的世界に注目したりと、正しいスケールにピントを合わせることにより、驚くような対称性が現れることも多い。

しかし、手元に数学的美しさを感じられるような対称性が手に入らない場合がほとんどである。

数学の側からは、それらの中から、対称性の豊かなものを選んで研究することになるが、応用の側からは、そんな悠長なことを言っていられないこともある。

そんな場合、数学的議論も、対称性の乏しい、どうにも無骨なものになって行かざるを得ないのではなかろうか。

具体物への応用数学では、それは例えば微分方程式や差分方程式の数値解析になると思う。それらは、どんなに対称性が乏しかろうが、とにかく適用が可能であるという意味で、数学者の道具箱の中で一番大切な武器である。

大概のものはハンマーで叩けるのだ。叩いて意味があるかどうかは知らないが。

抽象物への応用数学においては、それは集合論になるのだと思う。

どんなものでも 1 列に並べて、順に処理していく。1 つずつ、行き先を決めて関数を作っていく。

同型を作って、同型類を数える。

そう「数える」ことこそ、集合論の真骨頂なのではなかろうか。

逆にいうなら、集合論しか使えないなら、基数か順序数で「数える」こと以外に何ができるのだ、という話でもあるが。

モデル理論でも当然のごとく、モデルの同型類を数える。

多分、通常の数学をやっている方はピンと来ないであろう。

「そんなもの数えて何が楽しいんだ？」

「そんなもの数えて何がわかるんだ？」

1 つ目の問いは、先ほど答えた。集合論的には、数える以外にすることがあまりない。

2 つ目については、以外や以外、結構色々なことがわかるのだ、という話をここからしよう。

そのためには、モデルを構成する手腕をもっと鍛えないといけない。

数えるためには、異なるモデルを狙って作る技術が必要とされるからだ。

先ほどタイプ $\mathfrak{p}$ を実現させるモデルが存在することを見た。

モデル理論においては「タイプを実現させることは誰でにもできる」と言われている。

「だが、タイプを除く (omit) ことができるのは、モデル理論学者だけだ」と。

**定理 4 (A. Ehrenfeucht)** $T$ を加算な理論とし、$\mathfrak{p}$ を主ではない $T$ の $n$ 変数タイプとする。このとき $T$ には $\mathfrak{p}$ を実現しないモデルが存在する。

[1] の P.65 を参考にした。

**証明 6** 基本存在定理のヘンキンによる証明を少し書き換える。

議論を簡単にする $n=1$ とする。$n$ が一般の場合もほぼ同様の証明ができる。

$\{c_i : i < \omega\}$ を $T$ に現れない定数記号とする。$\{G_j(c) : j < \omega\}$ を $T$ の言語に $c_i$ を全て加えた言語の自由変数が $x$ である論理式を一列に並べたものとする。

関数 $h : \omega \to \omega$ を次のように取る。

1. $i < j$ ならば $hi < hj$。
2. $i \leq j$ ならば、$c_{hj}$ は $G_i(x)$ に使われていない。

これが構成できることはすでに示した。

$i$ 番目のヘンキン公理 $H_i$ を

$$\exists x G_i(x) \to G_i(c_{hi})$$

とする。$T_i$ を次のように構成する（ここまではモデルの存在定理と全く同じだが、ここから違う話が出てくるので、ちゃんと読むように)。

まず、$T_0 = T$ とする。

1. $T_{2i}$ が無矛盾であり、そして、$c_{hi}$ が $T_{2i}$ に使われていないと仮定する。そのとき、$T_{2i+1} := T_{1i}cup\{H_i\}$ とすると、モデルの存在定理と全く同様の議論でこれは無矛盾である。
2. $T_{2i+1}$ が無矛盾であり、

$$T_{2i+1} = T \cup \{K(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}, c_i)\}$$

で、$1 < j < n$ の時 $i \neq i_j$ となるような形に書ける集合であるとする。もし $F(x) \in \mathfrak{p}$ で、$T_{2i+1} \cup \{\neg F(c_i)\}$ が無矛盾であるようなものが取れるなら、$T_{2i+2} := T_{2i+1} \cup \{\neg F(c_i)\}$ ととる。ここで、上記の $F$ が必ず取れることを示す。そのために、全ての $F(x) \in \mathfrak{p}$ に対して、$T_{2i+1} \cup \{\neg F(c_i)\}$ が矛盾を含むとして、矛盾を導く。この仮定のもとでは、

$$T \vdash K(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}, c_i) \to F(c_i)$$

が任意の $F(x) \in p$ に対して成り立つ。$c_{i_j}$ も $c_i$ も $T$ には使われていないので、

$$T \vdash \exists x_1 \ldots \exists x_n K(x_1, \ldots, x_n, x) \to F(x)$$

が任意の $F(x) \in p$ に対して成り立つ。もし $\exists x_1 \ldots \exists x_n K(x_1, \ldots, x_n, x) \in \mathfrak{p}$ ならば、$\neg\exists x_1 \ldots \exists x_n K(x_1, \ldots, x_n, x) \in \mathfrak{p}$ となり、

$$T \vdash \neg\exists x_1 \ldots \exists x_n K(x_1, \ldots, x_n, x)$$

となるが、これは $T_{2i+1}$ が矛盾を含むことを意味してしまう。また、もし $\exists x_1 \ldots \exists x_n K(x_1, \ldots, x_n, x) \in \mathfrak{p}$ ならば、$\mathfrak{p}$ はこの論理式によって生成されている、すなわち主タイプであり、仮定に矛盾する。

上記の構成の仮定が成立することは、明らかであろう。

ここで $T_\omega = \bigcup\{T_i : i < \omega\}$ とする。$S$ を $T_\omega$ を含む極大無矛盾集合とする。モデルの存在定理と同様に、$S$ は $T$ のモデルを同値類 $[c_i]$ を元とする集合によって定義する。任意の $c_i$ について $\neg F(c_i) \in T_{2i+2} \subseteq S$ がある $F(x) \in p$ について成り立つので、$\mathfrak{p}$ がある $[c_i]$ で実現化されていることはありえない。

モデル理論において、タイプを実現している点が具体的にあると議論が楽であることから、とりあえず大きなモデルを考えることがある。そんな時に活躍するのが次の概念である。

**定義 3** $\mathcal{L}$ を言語とし、$\mathcal{A}$ を濃度が無限の $\mathcal{L}$ 構造とする。$\mathcal{A}$ が $Y \subseteq \mathcal{A}$ 上**飽和している** ***(saturated)***、とは、$Y$ を $\mathcal{L}$ に定数記号として加えた言語での *1* 変数完全タイプが全て $\mathcal{A}$ で実現されていることである。

$\mathcal{A}$ がある基数 $\kappa$ に対して $\kappa$ 飽和しているとは、$|Y| < \kappa$ なる部分集合 $Y \subseteq \mathcal{A}$ 全てに対して、$\mathcal{A}$ が $Y$ 上飽和していることである。

$\mathcal{A}$ が飽和しているとは、$\mathcal{A}$ が、$|\mathcal{A}|$ 飽和していることである。

[1] の P.51 を参考にした。

標数 0 の代数閉体のモデルとして $\bar{\mathbb{Q}}$ は飽和していないし、$\mathbb{Q}(x)$ の代数閉包も飽和していない。

飽和しているモデルのもっともよく知られた具体例は標数 0 の代数閉体のモデルとしての複素数 $\mathbb{C}$ である。

これが、代数閉体のモデルとして、複素数をとりあえず選びがちなことの理由であろう（もちろん出自が自然であることも大きいが）。

モデル理論では「議論で使うかもしれないすべての基数より大きい基数 $\kappa$ に対して飽和しているモデル」という概念を使うこともある。なんだかカントールのパラドクスを起こしそうな文章だが、実際には必要になるたびに大きい基数をとっているだけなので、問題無いのだ。

歴史的には、代数幾何において、最初は単なる不定元 $x$ であったジェネリックポイントを、ヴェイユが体の超越元としてとらえようとしたようだ。ヴェイユは必要なだけのジェネリックポイントが手に入るように、十分大きな体を考えて議論をしたらしい（生半可な知識）。代数幾何においては、それはグロタンディークによって、素イデアルをジェネリックポイントととらえる方法にとってかわられてしまった。

そういう意味では、モデル理論は代数幾何では捨てられてしまったヴェイユの方法を継承しているともいえるだろう。

飽和性がかなり強い条件であることが次の定理から分かる。

**定理 5 (M. Morley, R. Vaught)** 完全理論 $T$ の飽和モデル $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ が同じ濃度を持つなら、$\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ は同型である。

[1] の P.53 を参考にした。

定理の証明を読む前に、どうやってこの定理を示せばいいか、腰を落ち着けて考えてみよう。

$\mathbb{Q}_p$ の代数閉体の $p$ 進完備化である $\mathbb{C}_p$ が $\mathbb{C}$ と同型であることを示そうとしたとき、何

をするかを考えてみればよい。

$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{C}_p$ と $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{C}$ の同型は一意である。

$\mathbb{C}_p$ 内での 2 の平方根の $\mathbb{C}$ 内への行先は $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$ のどちらかである。これはどちらも、$\mathbb{Q}$ 上 $x^2 - 2 = 0$ で定義されて、区別がつかないからである。$\sqrt{2}$ と $-\sqrt{2}$ が $\mathbb{Q}$ 上交換可能であることを表しているのが、ガロア群 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である。

そして、スキームの点 $(x^2-2) \in \mathrm{Spec}\mathbb{Q}[x]$ は、この代数閉包 $\bar{\mathbb{Q}}$ の元 $\sqrt{2}$ の、ガロア群 $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の作用による軌跡 $\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$ と考えることもできる。

そこから次は $\mathbb{C}_p$ 内の 3 の平方根の $\mathbb{C}$ での行先を考えるときは、$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 上の同型やガロア群を考えなくてはいけない。

これを終わるまで続ける必要がある。

任意の理論のモデルにおいても、大体状況は同じである。言語 $\mathcal{L}$ の理論 $T$ のモデル $\mathcal{M}$ の部分集合 $Y \subseteq M$ に対して、$T(Y)$ を、$\mathcal{L}$ に $Y$ の元を付け加えた言語 $\mathcal{L}(Y)$ による論理式で、$\mathcal{M}$ で成り立っているもの全体とする。

$\mathrm{Gal}(\mathcal{M}/Y)$ とは、$Y$ に制限すると恒等関数になる $\mathcal{M}$ の自己同型関数（$Y$ 上の同型関数）の成す群とすると、$T(Y)$ の $\mathcal{M}$ で元 $c$ により実現されている 1 変数タイプ $\mathfrak{p}$ は、$c$ の $\mathrm{Gal}(\mathcal{M}/Y)$ の作用による軌跡と同一視できる。

すなわち、$c, c'$ がどちらも $\mathfrak{p}$ を実現しているならば、それは $Y$ 上区別できないので、$Y$ 上の同型によって、お互いに移すことができるのだ。

$T$ の二つのモデル $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ があって、すでに同型が確立されている部分集合 $X \subseteq \mathcal{A}$ と $Y \subseteq \mathcal{B}$ があったとする。当然 $T(X)$ と $T(Y)$ も同一視できる。

ここで、$T(X)$ のモデル $\mathfrak{p}$ が $c \in \mathcal{A}$ と $c' \in \mathcal{B}$ によって実現されているならば、$c \mapsto c'$ とすることにより、同型を拡張することができる。

あとは、タイプを実現する元が実際にあるかどうかだが、そこでようやく飽和という仮定が出てくるのだ。

全射であることを確保するためには、**カントールの往復論法**というテクニックを使う。

**さあ、証明だ！ まずは何をさておいても元を 1 列に並べようではないか！**

**証明 7** $|\mathcal{A}| = \kappa$ とし、$\mathcal{A}$ の基底集合を $A = \{a_\delta : \delta < \kappa\}$、$\mathcal{B}$ の基底集合を $B = \{b_\delta : \delta < \kappa\}$、とする。集合 $\{(c_\delta, d_\delta) : \delta < \kappa\}$ を、超限再帰法によって構成する。$\delta < \kappa$ を固定し、$\{(c_\gamma, d_\gamma) : \gamma < \delta\}$ まではすでに作られていて、

$$\langle \mathcal{A}, c_\gamma \rangle_{\gamma<\delta} \equiv \langle \mathcal{B}, d_\gamma \rangle_{\gamma<\delta}$$

が成り立っているとする。ここで、$\langle \mathcal{A}, c_\gamma \rangle_{\gamma<\delta}$ とは、$\mathcal{A}$ の言語に $\{c_\gamma\}_{\gamma<\delta}$ を付け加えた構造である。$\delta = 0$ のときは $A \equiv B$ であるのは、$T$ の完全性より明らかである。

1. $\delta$ が偶数の場合を考える。$c_\delta$ を $A - \{c_\gamma : \gamma < \delta\}$ の中で、一番小さい添え字を持つものとする。$\mathfrak{p}$ を

$$\mathfrak{p} := \{p(x_1) : \langle \mathcal{A}, c_\gamma \rangle_{\gamma<\delta} \models p(c_\delta\}$$

となるものとする。このとき、$\mathfrak{p}$ は $T(\{c_\gamma\}_{\gamma<\delta})$ の *1* 変数タイプである。そして $\mathfrak{q}$ を $\mathfrak{p}$ の中に出てくる $c_\gamma$ を全て $d_\gamma$ に変えたものとする。$\mathfrak{q}$ は $T(\{c_\gamma\}_{\gamma<\delta})$ の *1* 変数タイプである。そして $\mathcal{B}$ の飽和性より、これはある $b \in B$ によって実現される。

$d_\delta = b$ とする。すると、

$$\langle \mathcal{A}, c_\gamma \rangle_{\gamma < \delta+1} \equiv \langle \mathcal{B}, c_\gamma \rangle_{\gamma < \delta+1}$$

が成り立つ。

2. $\delta$ が奇数の場合は、偶数の場合と、$\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ の役割を交換すればいい。
3. 極限順序数については何も考える必要がない

$hc_\delta = d_\delta \quad (\delta < \kappa)$ という関数を考えると、これは $A$ と $B$ の全単射を成し（カントールの往復論法)、作り方より明かにこれは構造間の同型となっている。

では、準備が整ったところで、一番簡単な場合に、モデルの数の議論をしてみよう。それは、**可算モデルの数が 1 つしかないような可算理論とはどんな理論だろうか？**という問題である。

モデル理論は初めてだが、数学はやったことある、という読者は、是非一度そういう理論の例を考えてみてほしい。

言われてみればその通りだ、とすぐに納得できるくらいには身近な例のはずである。

**定理 6 (C. Ryll-Nardjewski)** *$T$ を可算な完全理論であるとすると、有限モデルを一切持たないようなものとすると、次の 3 つの条件は同値である。*

1. *$T$ は $\omega$ 範疇的、すなわち濃度が可算無限であるモデルを同型覗いて一つしか持たない。*
2. *任意の正の整数 $n$ に対して $T$ の $n$ 変数完全タイプは有限個しかない。*
3. *全ての $T$ の可算モデルは飽和している。*

[1] の P.66 を参考にした。

不思議に思われたかもしれないが、実は 1 階の述語論理によるモデル理論では、有限モデルはうまく扱えない。応用を考えると、これは将来的には乗り越えなければいけない問題であろうと思われる。

**証明 8** まず、$\omega$ 範疇的ならば、$n$ 変数タイプが有限であることを示す。そのために、その待遇である、$n$ 変数タイプが無限にあれば、$\omega$ 範疇的でないことを示す。

$T$ の $n$ 変数タイプが無限にあったとする。これは、$T$ の $n$ 変数論理式の成すブール代数が無限であることを意味する。そして任意の無限ブール代数は、主でない極大フィルターを持つ、ということはブール代数についてのよく知られた事実である。例えば今の場合、$\{p_i\}_I$ を $T$ の相異なる主 $n$ 変数タイプの生成元の集合とする。このとき、論理式の集合 $\{\neg p_i\}_I$ はタイプになる。なぜなら、$i \neq j\ (i, j \in I)$ ならば、$\neg p_i$ は $p_j$ の生成するフィルターに含まれるので、任意の $I$ の有限集合 $i_i, \ldots, i_k$ に対して、そこに含まれない $j$ を選べば、$p_{i_1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, p_{i_k}(x_1, \ldots, x_n)$ は $p_j$ の生成するフィルターに含まれ、充足可能であるからである。

ツォルンの捕台によるいつもの議論をすれば、このフィルターを含む極大フィルターが存在するが、作り方によりこのフィルターは主ではない。

主ではないタイプが存在すれば、このタイプを実現させる可算モデルと実現させない可算モデルがそれぞれ作れる。これはこの理論が可算範疇性を満たさないことを示す。

もし $T$ のすべての可算モデルが飽和なら、それらが全て同型なのはすでに示した。

最後に、$n$ 変数完全タイプが有限ならば、$T$ の可算モデルが飽和であることを示せば、証明は終わる。

$T$ の任意の $n$ 変数完全タイプ $\mathfrak{p}$ は主である。というのも、ストーンの表現定理により、極大フィルターの数が有限であるブール代数はそれ自体有限であり、極大フィルターに含まれる論理式すべての「かつ」をとれば、必ず生成元がとれる。

$\mathcal{A}$ を $T$ の可算モデルとして、$T(a_{i1\leq i\leq n})$ の任意の *1* 変数完全タイプ $\mathfrak{p}$ を、それが $\mathcal{A}$ で実現していることを示すため固定する。

$$p^* := \{p(x_1, \ldots, x_n, x) : p(a_1, \ldots, a_n, x) \in p\}$$

とおく。$p^*$ は $T$ の $n+1$ 変数完全タイプであり、よって主である。$q(x_1, \ldots, x_m, x) \in p^*$ が $p^*$ の生成元であるとする。これは $q(a_1, \ldots, a_n, x)$ が $p$ を生成するのは明らかである。つまり $p$ は主である。よって、$p$ は任意の $T(\{a_i\}_{1\leq u\leq n})$ のモデルで実現されている。つまり $\mathcal{A}$ において実現している。これは $\mathcal{A}$ が飽和であることを意味する。$\mathcal{A}$ は任意のとったので、証明したいことが示されたことになる。

可算範疇性を持つ可算理論の例として、有限体上の無限次元ベクトル空間の理論がある。

この理論の有限個の定数を加えた言語による $n$ 変数完全タイプが有限個しかない、ということもよく考えればわかると思う。

## 3.5 展望

ここからは、私が考えた上での、ここからの発展の道筋を書きたい。必ずしも私自身が細部に渡ってちゃんと理解している訳ではないので、勘違いや偏った見方については、ご絶許[*2]と忌憚なきご指摘を頂きたい。

可算モデルを数える。

非可算範疇性定理

非可算範疇性の成り立つ可算理論として我々が思い浮かべられるとして、

1. 等号以外何もない単なる集合の理論
2. ある固定した可算無限濃度の体上のベクトル空間の理論
3. 代数閉体の理論

である。

上の三つの理論の共通点として、ある種の「代数的な次元」が定義できることがある。

1. 集合に関しては単なる濃度。
2. ベクトル空間については線型独立な元の集合の最大濃度
3. 代数閉体については代数独立な元の集合の最大濃度

そして、次元の同一性が、モデルの同一性を導く。ここから、モデルの濃度が非可算な $\kappa$ なら次元も $\kappa$ になり、モデルとしての同型を導く、という手順になる。

実は Morley の非可算範疇性定理の証明においては、非可算範疇性の成り立つ理論に対して、モデル理論の道具立てを使って、「代数的な次元」を定義してしまうのだ。そこか

[*2] ご寛恕の対義語である。読み方は「ぜっきょ」「ぜっゆる」など諸説ある。

ら、ある非可算基数で範疇性が成り立つことが示せれば、任意の非可算濃度に対しての範疇性が示せてしまうのだ。

これを私がなぜ面白いと思うのかを少し説明したい。

まず、「次元」という概念は数学の至る所に現れる。ベクトル空間の次元。体の超越次数。被覆次元。コホモロジー次元。ハウスドルフ次元。そして、それらの関係は必ずしも自明ではない。しかし、なぜかそれらは、我々が考えたい状況にうまく制限すれば、等しくなることが多いのだ。

もし、「次元とは何か」というメタ数学的な問いに、モデル理論が何か答えを与えることができたら非常に面白いと思う。

例えば、上記の 3 つの理論、集合論、ベクトル空間、代数閉体、は、ある種、数学における代数的な議論の基礎を成しているように、私には思える。

これは偶然なのだろうか？　とまたメタ数学的に問うこともできるだろう。

Zilber は上記の三つの理論が「strong minimal」という性質を持ち、strong minimal ならば、モデル理論的な方法で代数的な次元が自然に作れることに注目して、「Zilber の三色予想」、すなわち strong minimal な理論は上記の 3 つだけである、という予想を立てた。

これはいわば、上記の 3 つの理論が、代数学における、不動の三本柱である、という主張にも解釈できる。

実際には、フルショフスキーによって、この予想の反例にが構成された [6]。この反例については、そのうちにちゃんと勉強したいと思っている。なぜなら、その理論には、「ベクトル空間の次元」や「代数閉体の超越次数」と同じような「非自明な代数的な次元」が存在しているということで、だったらそこでは、線形代数や体論と同じくらい豊穣な理論が形成できる可能性が高い気がするのだ。

しかもそれは、それは通常の数学が辿ってきた道筋とは全く違うところから出てきたのだ。通常の数学的概念は、経済や物理や最近なら計算科学等の、現実との接点から出てくる。しかし、この理論は「線型代数学や体論と似た理論てないかな？」というメタ数学的な疑問から出てきてしまったのだ。通常の数学的概念にいや増して、何に応用できるのか想像もできない。

それでもこれが応用できる日が来るのだろうか。興味が尽きない。

また、ジルバーの三色予想は、一般の場合には反例が見つかったが、いくつかの制限を付けると成り立つ場合もあることが知られていて、それも研究対象である [9]。

例えば、フルショフスキーとジルバーが幾何的 Mordell-Lang 予想などを解いた方法はこれだという [7]。私もしっかり理解していないのだが、Ziber の三色予想の成立する場面を見つけて、「体を作るほどの複雑さがないので、線形代数程度の単純さしかない」という議論の仕方をして、問題を簡単にするようだ。

モデル理論は、理論についての理論なので、時に「使える理論の特徴付け」のようなものを提出することがある。次元とは何なのか、次元を持つ理論とはどんな理論なのか、これは色々な側面から追う価値のある問いなのではなかろうか。

例えば、実数の理論などでは、非可算範疇性は成り立たず、代数的な次元とは相性が悪いことが知られているが、o-minimal 理論の研究などでは、被覆次元やホモロジー次元等

の、より幾何的な次元を定義して、議論を深めている [8]。

# 参考文献


[1] Sacks, Gerald E. Saturated Model Theory (Second Edistion). World Sientific. 2010.

[2] 田中 一之. 数の体系と超準モデル. 裳華房. 2002.

[3] 照井 一成. 「代数学入門」としての普遍代数学 `http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~terui/koukai2018c.pdf` 2018/08/06 Access.

[4] MacLane, Saunders/Moedfijk, Ieke. Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory. Springer. 1994.

[5] Johnstone, Peter J. Stone Spaces. Cambridge University Press. 1986.

[6] Hrushovski, E. A new strongly minimal set. Annals of Pure and Applied Logic, 52:147–166. 1993.

[7] 板井 昌典. 幾何的モデル理論入門—モデル理論の代数・数論幾何への応用. 日本評論社. 2002.

[8] van der Dries, L. P. D. Tame Topology and O-minimal Structures. Cambridge University Press. 1998.

[9] Zilber, Boris. Zariski Geometries: Geometry from the Logician's Point of View. Cambridge University Press. 2010.

[10] キューネン, ケネス. 藤田 博司 訳. 集合論—独立性証明への案内. 日本評論社. 2008.

[11] The Dark Side of Forcing vol.7 . `http://forcing.nagoya/book_C90.pdf` . 2016.

[12] The Dark Side of Forcing vol.9 . `http://forcing.nagoya/book_C92.pdf` . 2016.

# 第 4 章

# $\epsilon_0$ の黙示録

淡中 圏

この黙示は、神が、すぐにも起こるべきことをその僕たちに示すために、御使をつかわして、僕であるわたしに伝えられたものである。

この預言の言葉を朗読する者と、これを聞いて、その中に書いてあることを信じる者たちはさいわいである。時が近づいているからである。

今いまし、昔いまし、やがてきたるべき者、全能射にして主なる神が仰せになる、「わたしは $\aleph$ であり、$\omega$ である」。

わたしは神を見たとき、その足もとに倒れて死人のようになった。すると、神は正しい手をわたしの上において言った、「恐るな。わたしは始めであり、終わりであり、また、生きている者である。わたしは死んだことはあるが、見よ、わたしは長完全系列である。そして、暗黒面への鍵を持っている」。

主なる神は言われた、「見よ、そして見たことを人々に伝えよ。耳のあるものは、御霊が言うことを聞くが良い」。

その後わたしが見ていると、御使が現れて、天全体に響くように高高と喇叭を吹き鳴らした。すると水の中から、巨大な龍が現れた。数え切れないほどの首をうねらせていた。

その数は、天に昇る聖なる矢印記号を使えば、

$$
\begin{aligned}
g_0 &= 4 \\
g_1 &= 3 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3 \\
g_2 &= 3 \underbrace{\uparrow\uparrow \ldots \uparrow\uparrow}_{g_1\text{本}} 3 \\
g_{k+1} &= 3 \underbrace{\uparrow\uparrow \ldots \uparrow\uparrow}_{g_k\text{本}} 3 \\
g_{64} &= \text{グラハム数}
\end{aligned}
$$

となるグラハム数よりもさらに多かった [3]。

再び御使がラッパが吹き鳴らした。

すると、$\omega$ を肩に担いだ $\omega^\omega$ が現れ、$\omega^\omega$ を肩に担いだ $\omega^{\omega^\omega}$ が現れ、そして肩に担いだものを肩に担いだものが現れ続け、$\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ となり、ついに立ち上がって $\epsilon$ となった。

そして、龍の首を次々と切っていった。

もしその首が龍の大元から生えているならば、何も起こらない。しかしそれ以外の場合

は、その首の生えている首の複製が、そのさらに根元の首にいくつも生えるのだった [6]。
それによって首はさらに増えていった。
わたしには、切られる首がどのような手順で選ばれているか理解できなかった。
わたしには、それが終わると思えず恐れ戦いた。
しかし、再び主なる神の声が聞こえた、「見よ。いかなる術も必要ない。いかなる技に従っても、必ず有限の時を経て、龍は打ち倒される」。
わたしの見ている前で、その通りになった。
「今は理解できないかもしれない。しかし良き石 [8] を手に入れ、一階の数の体系の一貫なることを証立てる技を知れば、分かるだろう」。
神は言われた、「いずれ新たな龍が現れる。ブーフホルツのヒドラだ [10]。しかし、その時も、新たな順序数立ち上がりて、必ず龍を打ち倒す」。
その時わたしは、自分の体が浮き、天に引き上げられるのを感じた。
「しかし見よ。さらに大きな龍が世界を覆っている。歴史という名の龍である」。
わたしの眼前で、いくつもの光景が繰り広げられた。人々が戦い、騙し合い、お互いに殺し合っていた。凄まじい炎が人々を焼き払った。見えない病毒が世界に振りまかれ、人々は全身から血を吹き出して死んでいった。
それらの光景がいくつも枝分かれする濁流となって、時を押し流していた。それが歴史という名の龍であった。
神は言われた、「いつに日か、かつて矛盾をきたして楽園を追われた順序数の眷属である一つの順序数が立ち上がり、歴史という名の龍を打ち倒す。
その順序数は自らにより歴史を順序づける。数え、測り、分ける。
その順序は、時の流れの中で世界がどの歴史の分岐を選び取っても、その順序によれば必ず順序が低くなるような順序である。その順序を低くする系列は、必ず有限回で終末を迎える。すなわち、その順序数の力を持つ超限再帰によれば、歴史の終わりが証立てられるのだ。その順序数により、この汚穢に満ちた世界の歴史の終わりが、誰の目にも明白になる。このような順序数が、必ずや現れるだろう」。
神の声が遠くなっていった。神は最後に言われた、「ここに謎がある。知恵が必要である。思慮のある者は、獣の数字を解くがよい。その数字は 666 [11]」。
アーメン。

# 参考文献

[1] ヨハネの黙示録 (口語訳) `https://ja.wikisource.org/wiki/`ヨハネの黙示録（口語訳）. 2018/08/07 Access.

[2] ダニエル書 (口語訳) `https://ja.wikisource.org/wiki/`ダニエル書（口語訳）. 2018/08/07 Access.

[3] 小林 銅蟲. 寿司 虚空編. 三才ブックス. 2017.

[4] 巨大数研究 Wiki/ グラハム数 http://ja.googology.wikia.com/wiki/グラハム数 . 2018/08/07 Access.

[5] 巨大数研究 Wiki/ ヒドラゲーム http://ja.googology.wikia.com/wiki/ヒドラゲーム . 2018/08/07 Access.

[6] Kirby, L./Paris, J. Accessible Independence results for Peano arithmetic. Bullerin of the London Mathematical Society 14: 285-293. 1982.

[7] 巨大数研究 Wiki/ グッドスタイン数列 http://ja.googology.wikia.com/wiki/グッドスタイン数列 . 2018/08/07 Access.

[8] Goodstein, R. On the restricted ordinal theorem. Journal of Symbokic Logic 9: 33-41. 1944.

[9] 巨大数研究 Wiki/ ブーフホルツのヒドラ http://ja.googology.wikia.com/wiki/ブーフホルツのヒドラ . 2018/08/08 Access.

[10] Hamano, M./Okada, M. A direct independence proof of Buchholz's Hydra Game on finite labeled trees. Arch. Math. Logic 37: 67-89. 1998.

[11] Shelaha, S. On what I do not understand (and have something to say): Part 1. https://arxiv.org/abs/math/9906113 .

**淡中 圏**　本名：田中健策　経営者と喧嘩して仕事辞めたりしながら、趣味で数学と文学とプログラミングを足して3で割ったようなことをしている。
よく分からない自作サイト　`https://tannakaken.xyz`

編集後記: なんと、今回の The Dark Side of Forcing はなんと淡中 圏の合同個人同人誌となってしまいました。みんな忙しいんだもんね、仕方ないね。しかしなんだかんあ一人で本が出来るくらい原稿書いちゃった私も偉いと思う。自分で自分を褒めてあげたい。

忙しい中、開発サーバーの設定を治してくれたり、レビューをしてくれた才川さんには感謝します。

これを読んでいる皆さん、大学院レベルの数学・論理学・計算数学・数学の哲学・物理学・量子基礎論のレビュアーがレビューするんですが、原稿書きませんか？

連絡は `tannakaken@gmail.com` まで。

【淡中　圏】

表紙と裏表紙について: 表紙と裏表紙はそれぞれ、ルール 110(`https://en.wikipedia.org/wiki/Rule_110` とルール 30(`https://en.wikipedia.org/wiki/Rule_30`) の 1 次元セルオートマトンによって描画さえれた図形を、PaintsChainer-線画自動着色サービス (`https://paintschainer.preferred.tech/index_ja.html`) の「かんな」によって着色したものをさらに加工したものである。

発行者 ： The dark side of Forcing
連絡先 ： https://forcing.nagoya
発行日 ： 2018 年 08 月 12 日

Here is the math to the dark side