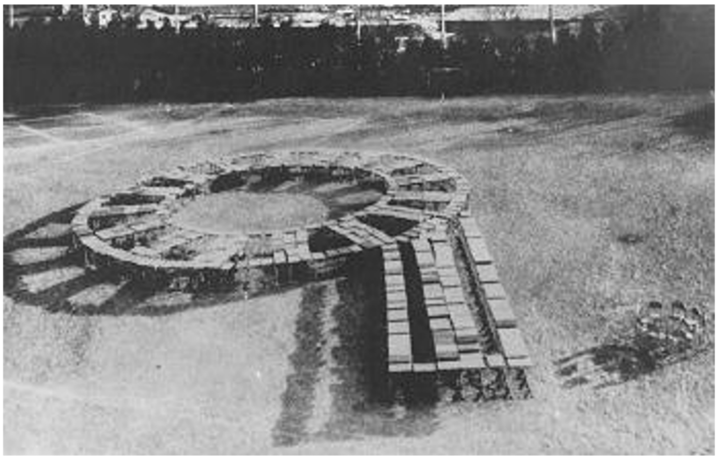
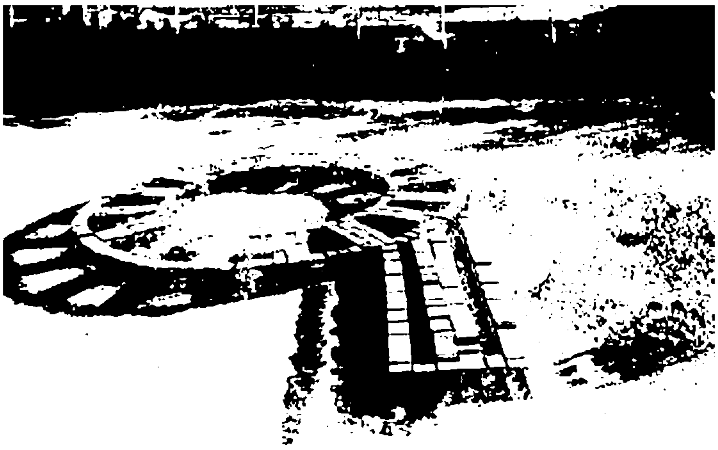
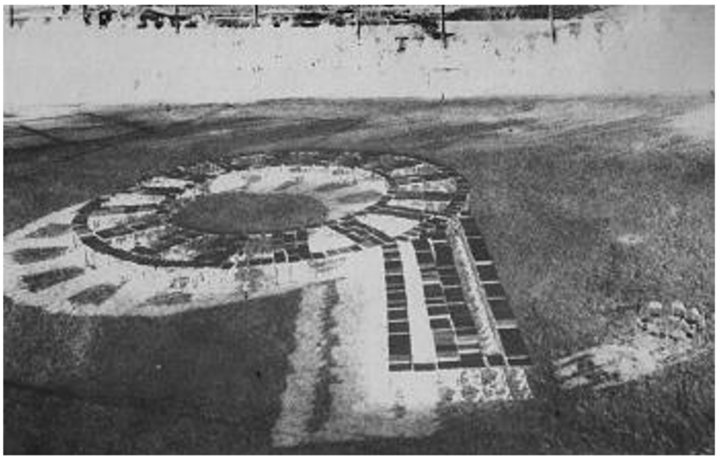
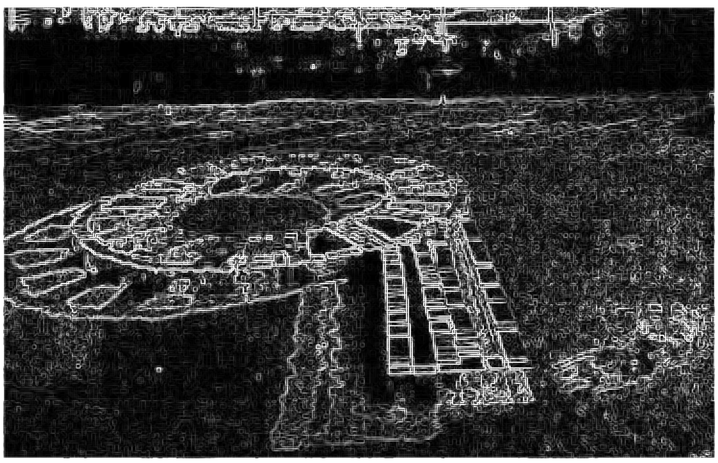
The Dark Side of Forcing

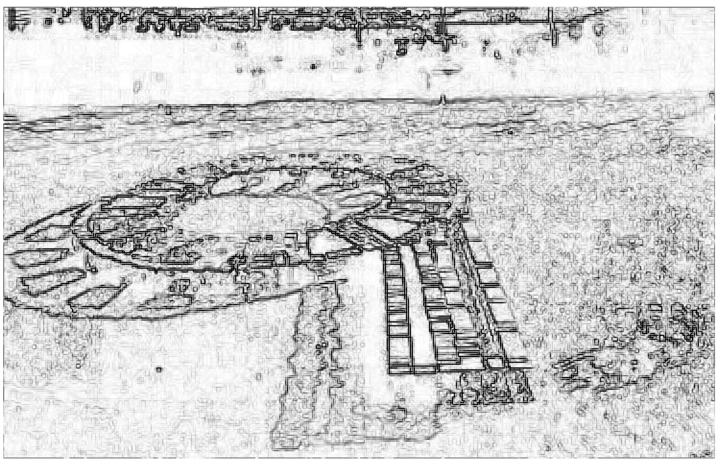
No.











※数学の本です

数学怪談 三叉路

淡中 圏

とある数学者が道を歩いていて、どこにでもある三叉路に差し掛かった。その時懸案だった証明の重要なステップが自明であると思える天啓のような直感が舞い降りた。急いで家に帰ってその直感を論理的な言葉にしようとしたが、その時にはすでにその直感は泡のように失われていた。

その後、その数学者は精神のバランスを失い、その日の三叉路を探すようになってしまった。その三叉路さえ見つかれば、全ての数学の定理は自明なものになり、数学は論理学に取り込まれると譫言のように繰り返しながら。

目次

第 1 章

Rings which have no maximal ideals

龍孫江

1.1 「極大イデアルは存在する」

可換環論の最初の教科書, つまり主として可換環のみを扱う本で最も初歩的な本を見ると, 大抵は冒頭で (可換) 環[*1]を定義し, イデアルと極大 (および素) イデアルを定義したあとに, 最初の「定理」として次の主張が述べられる :[*2]

定理 1.1.1 (極大イデアルの存在) 全ての単位的可換環は極大イデアルを持つ.

既にご存知の読者も少なくないと思うが, この定理の「証明」には Zorn の補題を用いる. 実際, Max Zorn が [4] で Zorn の補題を導入した背景にあったのも, この定理をはじめとするさまざまな代数的定理[*3]を証明するためであった.

定理 1.1.2 (Zorn の補題) $(P, \leq)$ を (半) 順序集合とする. P の任意の鎖 (i.e., 全順序部分集合) が P に上界を持てば, P は極大元を持つ.

定理 1.1.1 の証明. P を環 A の A 自身と一致しないイデアルの全体とし, その順序を集合としての包含関係で, すなわち $I \leq J$ を $I \subset J$ で定める.[*4] 極大イデアルはこの P の極大元に他ならないので, P が Zorn の補題の条件を充たすことを確かめよう. 任意に取った P の鎖 $\mathcal{C} = \{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対し, $I_{\mathcal{C}} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ とおくと, これは (1) A のイデアル[*5]で, (2) A 全体ではない. 実際,
(1) 2 要素 $x, y \in I_{\mathcal{C}}$ をとるとき, $x \in I_\mu$ および $y \in I_\nu$ なる $\mu, \nu \in \Lambda$ が存在する. $\mathcal{C}$ は鎖なので $I_\mu \subset I_\nu$ または $I_\mu \supset I_\nu$ のいずれかが成り立つ. いずれにせよ包む側のイデアルは x, y を共に含むので和 $x + y$ も含む. 特に $x + y \in I_{\mathcal{C}}$.
(2) すべての I_λ が 1 を含まないので $I_{\mathcal{C}}$ も 1 を含まない.

[*1] ここでいう環は乗法の単位元 1 を持ち, かつ零環でないものをいう.
[*2] 読者の習熟度に配慮した演習問題的事実を紹介・証明することは充分にありうるが, ここではそれらは「定理」には含めないことにしよう. ご都合主義であることは否定しないが, すべての物事は都合で成り立っているのもまた事実である.
[*3] Zorn の補題の帰結としては, 任意の体に対する代数閉包の存在と一意性, 任意のベクトル空間の基底の存在などが有名である.
[*4] 包含記号 $\subset$ は両辺が等しい場合にも許す.
[*5] 一般にイデアルの任意個の和集合はスカラー倍では閉じるが和で閉じず, イデアルにはならない.

以上により Zorn の補題が適用できて, P は極大元を持つ.

ZF においては Zorn の補題は選択公理と同値な命題[*6] であり, もうひとつ選択公理と同値な命題としてよく知られるものとして整列可能定理がある. Zorn の補題の有効性を鑑みれば驚くべきことだが, 整列可能定理は代数学においてはほとんど存在感のない定理であり, 筆者自身の乏しい数学経験では何か特筆するべき応用を見た記憶がない.[*7]

先述のように, Zorn の補題はさまざまな代数的に重要な「定理」を導き出す. ほとんど先の証明を繰り返すだけになるが, しかるべき半順序集合[*8] に Zorn の補題を適用して得られた極大元が求めるものになっている仕掛けだ. 選択公理に対してしばしば用いられる「神様の熊手」なる比喩に倣えば, Zorn の補題はさしづめ「神様の崖」とでも喩えられるだろうか.[*9]

この「崖」のない世界で何が起こるか, その奇妙な世界を覗き見てみようというのがこの小文の趣旨である.

注意 1.1.3 本稿のきっかけとなったのは筆者が「中の人」を務めている「可換環論 Bot」での出来事であった. 筆者はまだ選択公理を取り巻く諸々についてほとんど知識がなかったのに, うかつにもひとつのコメントにこんなことを書いた :[*10]

> [定理](極大イデアルの存在) 零でない任意の環に対し極大イデアルは存在する. 証明は Zorn の補題により, 本質的に Zorn の補題を用いない証明は存在しない.

このコメントに対し, 半ば当たり前のようにツッコミが入った. 本当ですか, というわけだ. そのときになって筆者はしばらく絶句した. 確かに筆者は Zorn の補題を使った証明は知っていたが, その文を読む瞬間まで, Zorn の補題, すなわち神様の崖がない世界で極大イデアルが見つからない可能性があるなどとは思いもしなかったのである.

1.2 S F 世界 : 単位的でない環の場合

最初の定理 1.1.1 自体が崩壊する異世界に踏み込む前に, 少しだけ見慣れた世界で遊ぼう. 選択公理に踏み込まずとも, 極大イデアルのない環の例をつくることはできる. 実際に次が成り立つ :

命題 1.2.1 (単位的でない環) 任意のアーベル群 $(A, +)$ に対し, A の積 $\cdot$ を

$$\text{任意の } a, b \in A \text{ に対し } a \cdot b = 0$$

[*6] と, サラっと言ってしまったけれど, これを迂闊に断言することの恐ろしさを筆者が知ったのはつい最近のことである. それまでは特に何も考えずに断じていた. なぜ人間はよく知らない事柄について, よく知らないという事実を承知しているのに迂闊に論じてしまうのだろうか. 逆の「よく知る事柄に対する発言は慎重になる」という現象についてはそれなりに説明もできそうなのだが. 不可解である.

[*7] 私見だが, 代数学 (を研究する者) においては対象の構造が強く意識されるため, その構造と整合性がない整列順序が存在したとて結果を導き出すことが難しいのだろう.

[*8] 先の証明と同様に, この集合は集合とその間の包含関係がなす順序集合として与えられることが多い. 代数的に意味のある部分集合の鎖が与えられたとき, そのすべての和集合はまた代数的に意味のある集合になることを示せばよく, 実際にそうなることが多い.

[*9] 無論これは, 2 時間サスペンスドラマでは「最後に崖に追い詰められた人間が犯人である」という法則に由来する. ところで, なぜあの類の犯人はみな崖を目指すのだろうか. その理由がよくわからないし, 崖に追い詰められたわりには犯人があっさり捕まるのも理解できない. もっと崖から飛び降りる犯人がいてもおかしくないだろう.

[*10] ここでも, 環は乗法の単位元を持つ可換環としている.

と定めれば, 群演算の和及び積に対して A は可換環をなす.

普通の世界に慣れているほど, この環を見ると異様な印象を受ける. 選択公理が成り立たない世界よりもある意味では妙な世界である. 明らかな異世界というわけではないのにとにかく何かがずれている, ウルトラQ的というか, S F（すこし・ふしぎ）世界にまぎれ込んでしまった, そんな感じなのだ.

とはいえ, こちらの方はひとたび定義されてしまえば, ただ定義にしたがって淡々と進むだけで結論は得られる. とっかかりだけが異常に奇妙なのに, あとはなんとなく慣れてしまって, 最後にはそれが当然であるかのように話してしまうあたりも S F の世界によく似ている. 証明は環の公理系を確かめるだけなので省く. さらに認めがたい話であるが,[*11] 定義から「可換環」であることも容易に (？) 導かれる.

この環において, ある部分集合がイデアルであることと (加法群としての) 部分群であることは同値である. イデアルが部分群となるのは定義による. 逆に, 部分群は常に加法の単位元 0 を含むので, 任意の 2 要素の積は部分群に属し, 特にスカラー倍で閉じる. さらに, 極大イデアルを全体でないイデアルの中で包含関係に関して極大なイデアルと規定しよう. このとき, 次を得る：

命題 1.2.2 (極大イデアルを持たない非単位的環) 有理数の全体がなすアーベル群 $\mathbb{Q}$ を命題 1.2.1 の方法で可換環とみなしたものを Q とする. Q は極大イデアルを持たない.

証明 I を Q の非自明なイデアルとする. $I=\{0\}$ は極大でないので, $I\neq\{0\}$ としてよい. このとき, 非負整数 n に対して $\frac{I}{n}:=\{x\in Q \mid nx\in I\}$, ただしここで nx は n 個の x の和 $x+x+\cdots+x$ を表す, を考える. I は和で閉じているので $I\subset\frac{I}{n}$, 以下 $\frac{I}{n}$ が I とも Q とも等しくない n を見出そう.

整数全体がなすアーベル群 Z (これを自然に Q の部分群とみなす) に対して $I\cap Z$ は Z の部分群なので, ある自然数 m によって $I\cap Z=mZ$ と表される. 一方, I に属さない要素を $x=\frac{a}{s}$, a は整数, s 非負整数で a と s は共通の素因子を持たない, と表す. $n=sm$ とすれば, x が $\frac{I}{n}\setminus I$ の, $\frac{x}{n}$ が $Q\setminus\frac{I}{n}$ の要素となるので $I\subsetneq\frac{I}{n}\subsetneq Q$, したがって I は極大ではない. 非自明なイデアルがすべて極大でないので, Q は極大イデアルを持たない. ■

普段と同様に, A のイデアル P が素イデアルということを「任意の 2 の積 xy が P に属するならば x または y のいずれかが常に P に属する」と定義すると, ここで考えるいかなる環も**素イデアルは持たない**とわかる. ここから, ごくごく当たり前と思っていた「極大イデアルは素イデアル」という主張も, 実は細かい仕掛けに支えられていたことに気付かされる.

命題 1.2.3 (素イデアルでない極大イデアル) 位数が 6 の巡回群を命題 1.2.1 の方法で可換環とみなしたものを C とする. C は 2 個の極大イデアルを持つが, いずれも素イデアルではない.

[*11] これも慣れているほど気づきにくいと思う.

1.3 異世界へ飛び込む準備：ネーター性再論

いよいよ選択公理を仮定しない世界へと話が移っていくわけだが, その前に「ネーター環」の定義をおさらいしておきたい. よく知られていることだが, 選択公理を認める世界では次の 3 条件はいずれも同値となる：

補題 1.3.1 (ネーター環) 可換環 A に関する以下の条件は同値である：
(1) A のイデアルの全体を包含関係によって順序集合とみなすとき昇鎖律を充たす, すなわち任意の A のイデアルの増大列 $I_0 \subset I_1 \subset I_2 \subset \cdots$ が与えられたとき, ある自然数 N が存在して $I_N = I_{N+1} = \cdots$ が成り立つ,
(2) A のイデアルの全体を包含関係によって順序集合とみなすとき極大条件を充たす, すなわち任意の A のイデアルの空でない族が与えられたとき, 包含関係に関して極大な要素が存在する,
(3) A のすべてのイデアルは有限生成である.

この補題はごくごく当たり前に用いられるが, 証明には Zorn の補題 (と選択公理) を必要とする箇所がいくつかある. はっきりと述べられているわけではないが, 今回の主参考論文である Hodges [1] の目的 (のひとつ) は, Zorn の補題の適用が簡単のためでなく本質的に必要だと示すことであったと思われる. 実際に証明を読み返してみよう.

証明 (1)⇒(2). 背理法による. 極大条件を充たさない A のイデアルの族 $\mathcal{I}$ が存在したならば, I_0 を $\mathcal{I}$ から任意にとり, I_{n+1} を I_n より真に大きい $\mathcal{I}$ の要素として帰納的にとることで停留しない昇鎖が構成できる.
(2)⇒(3). A のイデアル I を固定する. イデアルの族

$$\{J \mid J \text{ は } I \text{ の有限個の要素で生成される } A \text{ のイデアル}\}$$

に極大条件を適用して極大元 J_0 をとれる. このとき $J_0 \neq I$ とすると $I \setminus J_0$ から要素をひとつとって J_0 に添加することで J_0 の極大性を崩せる. したがって $I = J_0$, 特に I は有限生成である.
(3)⇒(1). 与えられた昇鎖 $\{I_i\}_{i\in\omega}$ に対し $I := \bigcup_{iin\omega} I_i$ とおくと, これは A のイデアルとなる. (3) により I の有限生成系が存在する. その各々はある I_i に含まれるので, 全てを含む I_N が存在し, このとき N 以上の任意の自然数 m に対して $I_m = I$. ■

この「帰納的にとる」という操作こそが選択公理である.*12後に示すように, この証明には選択公理が欠かせない. つまり, 選択公理のない世界では 3 条件が等価とは言えない.

定義 1.3.2 補題 1.3.1 に挙げた条件の少なくともひとつ (したがって全て) を充たす可換環を**ネーター環**という.

次の定理は抽象的可換環論における記念碑的定理である：

定理 1.3.3 (Hilbert の基底定理) R がネーター環ならば, R 上一変数多項式環 $R[X]$ もネーター的である.

*12 厳密にはこの形の選択公理を従属選択公理という.

選択公理の成り立たないモデル上では, (1) から (3) のどの性質を以てネーター性を定義すればよいかは筆者には判断しかねる.

1.4 異世界：神様の崖を失った世界

本節がこの小文の主眼となる節である．本節における目標は, 極大イデアルを持たない環の構成, より正確に申すならば, その中に極大イデアルを持たない環が存在するような集合論のモデルを構成することにある．そしてこのような集合論のモデルを構成するのにきわめて重要で強力な手法が Forcing なのだが, ここで白状しておくと筆者自身が Forcing で知っているのは通り一遍の粗筋だけで, 一度も自分の手でモデルを構成してみたこともない．いずれ自前のレシピで Forcing をしてみたいと思うけれども, それはまたの機会に譲るとして, 今回は思い切って「事実として認めて使う」という立場に立ちたいと思う.[*13]

Forcing を用いるのは次の補題を導く過程であり, この補題自身の証明には今回は立ち入らないのだが, それでも用語は定義しないわけにいかない.[*14] ZF のモデル M 内に環 R が存在するとせよ．R の**識別された部分集合** (distinguished subset) とは, 環 R の部分集合 Y とそれを特徴づける公理系をいう.[*15] 次に X を環 R の部分集合とせよ．X の**台** (support) とは, R の有限部分集合 Supp_X で, Supp_X の各点を固定する R の任意の自己同型 s に対し $X = \{s(x) \mid x \in X\}$ を充たすものをいう．R の部分集合の可算列 $X = \{X_i\}_{i \in \omega}$ の台とは, R の有限部分集合 Supp_X で各 X_i の台となるものをいう.

ZF の推移的モデル M が環 R を含むとせよ．R が M **対称的**とは R の (M に含まれる) 部分集合はすべて台をもち, かつ R のすべての (M に含まれる) 部分集合の可算列はすべて台を持つことをいう.

次の注意はこの環を考えるうえで本質的な指摘である．改めて申し述べれば, イデアルとは「和とスカラー倍で閉じた空でない**部分集合**」であった.

注意 1.4.1 環 R の有限生成イデアル I は台をもつ, すなわち有限の生成系が I の台をなす.

このように, イデアルの有限性は台によって判別することができる．Forcing を用いて「環 R の部分クラスで台を持たざるものは集合に非ず」という性質を充たすモデルを作れたならば, そのモデルの中で R のイデアルは比較的小さいものしか存在せず, 極大イデアルが見当たらない環ができるという理屈である．その願望は次の形で叶えられる：

補題 1.4.2 (Hodges [2] Lemma 3.7, 部分集合の除去) R を可算な環で高々可算個の識別された部分集合を持つものとせよ．このとき, ZF 集合論のモデル $N(R)$ で, $N(R)$ 対称的かつ R と同型なコピーを含むものが存在する.

[*13] 余談だが, 筆者は何事にも「とりあえず認めて使ってみて, 馴染んでから理屈を学ぶ」という方法論をわりと大切にしている.

[*14] 詳細は Hodges [1], p.221 を参照されたい.

[*15] 環 R を含むモデルを Forcing によって構成するときに部分集合は増減したり, あるいは性質が変化する可能性があるが, モデルの移動によって変化してほしくない部分集合を列挙して, その性質を保たせることができる．なおここでは distinguished subset を便宜上「識別された部分集合」と訳したが, この小文限りの訳語である.

慣れるまではこの補題の意味がさっぱり分からなかったので筆者の理解を書いておくと, この補題にある「R と同型なコピーと R 自身」の関係は「異なる位相構造を定めた同じ集合」のようなものである. 代数としての同型/集合としての全単射 は与えられているが, モデルの中に存在する部分集合/開集合 の数が異なるのだ ($N(R)$ 内の方が少ない). しかしいちいち断るのは面倒なのでコピーと R を同一視して考えることが多い.「R と同型なコピー」という奥歯にものが挟まったような言い回しはその辺の言いにくい感じを表している.

定理 1.4.3 (極大イデアルを持たない環) 整域 R (と R を含む ZF の推移的モデル $N(R)$) で, $N(R)$ 内では (1) R の全てのイデアルは有限生成で, (2) R は極大イデアルを持たない, を充たすものが存在する.

驚くべきことに, R を有理数体の上の可算変数の多項式環 $\mathbb{Q}[X_i \mid i \in \omega]$ とすればよい. 通常[*16]の世界ならば, 全ての変数が生成するイデアル $\mathfrak{m} = (X_i \mid i \in \omega)$ を考えることで, (1) $\mathfrak{m}$ は有限生成でなく, (2) $\mathfrak{m}$ は R の極大イデアルである, が成り立つ. この他にも極大イデアルは具体的にいくらでも与えることができ,[*17] そのどれもが有限生成ではない.[*18]

以下, 実際に有理数体の上の可算変数の多項式環が例を与えていることを証明しよう. Forcing によるモデルの設定を除けば, それほど難しい技巧は必要としない. 以下 $R = \mathbb{Q}[X_i \mid i \in \omega]$ とし, 可算個の識別された部分集合として X_i, $i \in \omega$, を指定する. こうしておいて Forcing を適用することで, 得られたモデルの中でも「R は有理数体上の加算変数の多項式環と同型である」と言えるようになる.

定義 1.4.4 (辞書式半順序) 多項式 $f \in R$ に対し, $\deg_i f$ で f を X_i の多項式とみなした場合の次数 (f に X_i が現れなければ $\deg_i \ f = 0$) とし,

$$\mathrm{ord}\ f := \max\{i \in \omega \mid \deg_i f \neq 0\}$$

とする. このとき $R \setminus \{0\}$ の関係 $<$ を次のやり方で定義する : $f, g \in R \setminus \{0\}$ に対し $f < g$ を
(a) $\mathrm{ord}\ f < \mathrm{ord}\ g$, または
(b) $\mathrm{ord}\ f = \mathrm{ord}\ g$ ($= t$ とする) かつ $\deg_t f < \deg_t g$,
のいずれかが成り立つこととする. また 任意の非零元 $f \in R$ に対し $0 < f$ と定めると, この関係 $<$ は R の半順序を与える. 便宜上, 本小文ではこの半順序を「辞書式半順序」と呼ぶ.

補題 1.4.5 (辞書式半順序による極小元の存在) R の空でない任意の部分集合は辞書式半順序に関して極小元を持つ.

[*16] 既に何を以て「通常」なのかはわからなくなっている可能性もあるが, とりあえず「選択公理の成り立つモデルをひとつ持ってきて, その中では」程度の意味で充分であろう.

[*17] とはいえ, 通常の世界での極大イデアルを**すべて**見つけることはまた別種の難しい問題であり, Hilbert の (強) 零点定理の意義は (当時としては) とても一般的な設定の下でこの問題を解決した点にある.

[*18] 有限生成イデアルが極大でないことを示そう. ひとつの多項式に現れる変数は有限個なので, 有限個の多項式の族に現れる変数の個数も高々有限である. 有限生成イデアルの有限な生成系を考え, そこに現れない変数を添加することで真に大きく R 全体でないイデアルを作ることができる.

証明　$X \subset R$ を空でないとする．$0 \in X$ ならば示すことはないので $0 \notin X$ としてよい．写像 $\mathrm{ord} : R \setminus \{0\} \to \omega$ による X の像 $\mathrm{ord}\,(X)$ は ω の空でない部分集合なので最小元 t を持つ．$\deg_t : R \setminus \{0\} \to \omega$ の $\mathrm{ord}^{-1}(t) \cap X$ による像も同様に最小元 s を持つ．このとき, $\mathrm{ord}^{-1}(t) \cap \deg_t^{-1}(s) \cap X$ は空でなく, その元が求める極小元である．■

さて, I を $N(R)$ 内での R のイデアルとする．このとき I の台 Supp_I が存在するので, i を $\mathrm{ord}\,(\mathrm{Supp}_I)$ の上界, すなわち $\mathrm{Supp}_I \subset \mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_i]$ を充たす自然数とする．$J = I \cap \mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_i]$ とおくと, これは $S := Q[X_1, \ldots, X_i]$ のイデアルとなる．

主張 1.4.6　J は R 内で I を生成する, すなわち $I = JR$.

証明　$JR \subset I$ は明らかなので, 逆を示す．背理法による．$I \not\subset JR$ とし, z を定義 1.4.4 の半順序による $I \setminus JR$ の極小元, $j = \mathrm{ord}\, z$ とする．ここで次のような $\mathbb{Q}$ 代数 R の自己同型 s を考える：

$$s(X_k) = \begin{cases} X_j + 1 & k = j \text{ のとき} \\ X_k & k \neq j \text{ のとき} \end{cases}$$

さて, J の取り方によって $\mathrm{Supp}_I \subset J \subset S$ であり, S 上では s は恒等写像であるから Supp_I の要素は s の作用で不変である．$z \in I$ と台の定義により $s(z) \in I$, 特に $s(z) - z \in I$. 以下これを考察する．

$z = c_0 X_j^s + c_1 X_j^{s-1} + \cdots + c_s$, ここで c_s は X_j を含まない多項式, と表す．c_0 が JR に属したとすると $z - c_0 X_j^s \in I \setminus JR$ かつ $z - c_0 X_j^s < z$, これは z の極小性に反するので $c_0 \notin JR$ を得る．このとき,

$$\begin{aligned} s(z) - z &= c_0 \sum_{j=0}^{s-1} \binom{s}{j} X^j + c_1 \sum_{j=0}^{s-2} \binom{s-1}{j} X^j + \cdots + c_s \\ &= s c_0 X_j^{s-1} + (\text{Lower terms}) \end{aligned}$$

と整理される．$c_0 \notin JR$ から $s(z) - z \in I \setminus JR$, また半順序の定義により $s(z) - z < z$, これは z の極小性に反する．以上により $I = JR$.　■

ところで S は体の上の有限変数多項式環なので, ZFC のモデルで Hilbert の基底定理を適用すれば J は有限個の多項式で生成される．「有限集合がイデアル J を生成する」という文は絶対的なので, J は $N(R)$ においても有限生成である．したがって I も有限生成である．一方 R の有限生成イデアルは極大にはなりえないので, R は主定理 1.4.3 の条件を充たす．

1.5　黄泉比良坂にて：極大イデアルとは何か

可換環論は組合せ論や表現論などの多くの分野と関連を持つ興味深い分野であるが, やはり代数幾何との連関を抜きにしては重要な意味を見落とすことになるだろう．すなわち, 可換環論の様々な概念や道具は幾何的な用語や概念に翻訳でき, その翻訳において我々は改めて可換環論の概念を意義づけられるのである．

Hilbert の零点定理でも示されているように, 可換環が代数幾何に不可欠なものであることは知られていたが, 全く一般の可換環論を代数幾何の特殊な場合としてはっきりと位

置付けたのは Grothendieck であった. 代数幾何はスキームを主対象とし,*19, 可換環はアファインスキームという特殊な図形, および一般的なスキームを形作る素材と見做される.

以下では簡単のため, アファインスキームに絞って話をすることにしよう. アファインスキームとは次のデータからなる :

- 可換環 A の素イデアルの全体 $X = \mathrm{Spec}\ A$,
- ザリスキ位相
- 標準層 $\mathcal{O}_X$

ここで, X のザリスキ位相とは, A のイデアル I によって

$$V(f) = I \text{ を含む } A \text{ の素イデアルの全体}$$

を閉集合とする X の位相構造をいい*20, その上の標準層とは

$$\Gamma(U(f), \mathcal{O}_X) = A_f$$

で定義される環の層をさす. A とその冪零根基 $\sqrt{O}$ に対して, Spec A と Spec $A/\sqrt{O}$ は位相空間としては同型だが標準層は異なる. 位相空間として同型であっても, このふたつの図形は「同型」であるべきではないと Grothendieck は説いたわけである.

さて, ザリスキ位相ではイデアルと閉部分スキームが対応する.*21 中でも素イデアル P は「整, すなわり既約かつ被約な閉部分スキーム」に対応する. もちろん P 自身 X の点であるのだが, 実際にいろいろなスキームの図を描く場合にはすべての P を「部分, すなわち長さや幅や厚みを持たない図形としての点」のように描くことはせず, 部分集合 $V(P)$ を描いて, それらをすべて「生成する点があるのだ」と描く.*22 そこで Euclid が原論で示したような「部分を持たない図形」である「点」に対応するものが気になるが, それこそが極大イデアルなのである. つまり, われわれはまず「極大イデアルの全体」として点集合をとらえ, その上に位相構造や構造層や「部分多様体を表す生成点」をのせたものを「スキーム」として認識している.

であれば「極大イデアルを持たない環」とは何であろうか? これについては筆者に断言

*19 Hilbert の零点定理は (アファイン) 多様体の座標環として被約, すなわち冪零元を持たない環を考えればよいことを示唆していた. その図形的対応関係を見抜き, 具体的に零点定理として実現して見せた Hilbert の慧眼は素晴らしいものであったが, その素晴らしさゆえに後世に呪縛を残したともいえる. 零点定理の記述は, ひとつの多様体を図形として扱う上では充分なものであったが, 複数の多様体とその間の関係 (射) を考える場合には不十分であった. 例えば素数標数 p の体の上の代数 A における Frobenius 写像 $F : A \to A$, $F(x) = x^p$ が定義する写像は図形的には恒等写像だが構造層がずれる. この Frobenius 写像の挙動はきわめて重要で, それがもたらす構造層の「ずれ」の考察は, 素数標数の体の上での微積分とも言うべき深い成果をもたらした. Frobeniusu 写像自身は可換環論における特徴的な写像として様々な観点から調べられていたが, 零点定理的な世界観ではそれを代数幾何に導入することができなかったのである. Grothendieck は被約とは限らない構造を持つ図形を含めて「スキーム」として再構築することで, 写像としては見えない「ずれ」の情報量を落とすことなく捉えられるようにした, いわば Hilbert がかけた図形観の呪縛から代数幾何を解き放ったのである.

*20 このとき, 基本開集合系として

$$U(f) := f \text{ を含まない } A \text{ の素イデアルの全体},$$

ここで f は A の要素すべてをわたる, がとれる.

*21 繰り返すが, この対応は閉部分スキームとしては 1 対 1 だが, 単なる閉集合と見ればそうではない.

*22 要するに長さや幅のある「点」が存在していると思って頂いてもよい. 点同士の間に「上に/下にある」という関係が発生するのでそう描くしかないのだが, 今度は点同士が「交わる」ということもあるので全部は描ききれず, 読者の想像力に頼り, あるいは任せてしまう.

できることは少ないが, Grothendieck の指向性でいえば「点集合を持たないような図形としてのスキーム」と言えなくもない. このようなモデルにおいても素イデアルの概念はきちんと定義できるので, アファインスキームも自然に定義できる[*23]し, コホモロジーなどの道具立ても充分に揃えられるに違いない.[*24] 筆者の指導教員がふと漏らした言葉を借りるなら「Grothendeick は点が嫌いだった」のであり, 実際に点集合とその上の位相構造では補足しきれないような場合を考察するために Grothendieck はトポスなどの概念を導入しているわけで, 極大イデアルがないことをこの世の終わりのように嘆く必要は全くないだろう.

参考文献

[1] W. Hodges, Six Impossible Rings, J. Algebra, **31** (1974), 218–244.

[2] W. Hodges, On the effectivity of some field constructions, Proc. London Math. Soc. (3), **32** (1976), 133–162.

[3] P. J. Morandi, Rings with no Maximal Ideals, `http://sierra.nmsu.edu/morandi/notes/NoMaxIdeals.pdf`

[4] M. Zorn, A remark on method in transfinite algebra, J. Algebra, Bull. Amer. Math. Soc., **41** (1935), 667–670.

[*23] さすがに素イデアルをひとつも持たない零でない環に対しては難しいと思うが, 建設的な立場に立って悪い例をことさらに咎めたてなければ理論として崩壊まではしないだろう. 選択公理の成り立つ世界でも零環の扱いは極めてグレーゾーンであるが, ほとんどの専門家は零環のことは最初から無視して考えているし, 重大な欠陥が理論に生じることもない.

[*24] 確かめたわけではないので保証はできないが.

第 2 章

裏口からのフレーゲ入門——フレーゲ構造から見た論理的集合観

鈴木佑京

2.1 はじめに

フレーゲが論理学や数学基礎論の解説書で話題になる場合、ほとんど必ずラッセルパラドクスと一緒に登場する。曰く、フレーゲは算術を論理に還元する論理主義のプログラムを唱えた。だが彼の論理体系はラッセルパラドクスという矛盾を抱えており、そのためにフレーゲのプログラムは破綻してしまった。

ではラッセルパラドクスとは何か。ラッセルパラドクスについての多くの教育的解説は、パラドクスを素朴集合論の中で定式化している。あらゆる概念に対して、その概念を満たすものの**集まり**が集合として存在するとしよう（これを内包公理という。内包公理は素朴集合論の公理の一つである)。すると、**自分自身の要素ではない**、という概念にも対応する集合が存在する。この集合を R と呼ぼう。R が R に属するとすると、R は自分自身の要素ではないので、R は R に属さない。これは矛盾なので、仮定が間違っており、R が R に属さないことになる。だとすれば R は自分自身の要素ではないので、R は R に属する。つまり、R は自分自身の要素ではないと同時に自分自身の要素である。これがラッセルパラドクスである。

そして素朴集合論とは何か？素朴集合論は純粋に形式体系として見ることもできるが、普通それが数学の教科書で現れる場合は、解釈された理論（純粋な形式体系ではない、意味を持つ理論）として登場する。その場合素朴集合論は、ものの集まりとしての集合について語る理論であるとされる。

さて以上に掲げた論理主義・ラッセルパラドクス・素朴集合論の説明はどれも誤りではない。誤りではないのだが、この三つを合わせると、フレーゲの論理体系がさも解釈された理論としての素朴集合論であるかのような印象が生まれる。するとフレーゲが、こんにち数学の教科書に登場するような、集合をものの集まりとみなす**集積的集合観**をとっていたかのように思えてくる。

だがこの印象は誤りである。フレーゲは**集積的集合観**とは異なる独特の集合観——本稿では**論理的集合観**と呼ぶ——を持っていたし、またそれを反映して、彼の論理体系は形式

体系としても素朴集合論とは異なるものであった[*1]。本稿の目標は、こうしたありうる誤解を正すため、フレーゲの論理的集合観を紹介することである。

が、フレーゲの集合観が実質どのようなものであったのかは哲学（史）的に決着のついたテーマではなく、本格的に論じようとすればフレーゲのテキストや先行研究を参照して長大な論文を書かねばならないだろう[*2]。書く方も読む方も面倒くさい。なので本稿は以下の 3 点でズルをする。まず、フレーゲ自身のテキストやフレーゲ研究の論文に対する引用・参照を怠ける。次に、フレーゲ自身の論理体系は無視して、フレーゲのアイデアを現代的な形で再生した代数理論であるピーター・アクゼルのフレーゲ構造を取り上げ、これを通じてフレーゲの集合観を紹介する。最後に、フレーゲ解釈として、ないし哲学の議論として問題になりそうなところ（ゆえに研究レベルではもっとも興味深いところ）は可能な限り無視して、核となる事柄だけを伝えることを目指す。

叙述は前半と後半に分かれる。前半では、フレーゲの論理的集合観を自然言語で説明する。後半では、フレーゲの論理的集合観に基づくフレーゲ構造を紹介することで、フレーゲのアイデアを形式的な道具立てで明確化するとともに、フレーゲのアイデアが理論として現金化可能であることを示す。

2.2　アイデア

フレーゲの論理的集合観をスローガン的にまとめれば、

対象による関数の代表 + 関数としての概念

と表現できる。この章ではまず、上の式によって表現されているアイデアを自然言語で説明する。

2.2.1　フレーゲの型の概念

フレーゲの体系はラッセルのパラドクスを内包していたが、ラッセルは型の概念を論理学に導入することで矛盾を防いだ——というのがラッセルのパラドクスにまつわるストーリーとしてよく語られる。だが実は、今日型とかタイプとか言われていることについて、フレーゲは鋭敏な意識を持っていた。対象による関数の代表という発想を説明する前に、まずその点に触れておかねばならない。

フレーゲは自然言語を分析し、それを元に論理体系を設計する中で、言語表現の文法的カテゴリを**固有名**（Eigennamen）と**関数名**（Funktionsnamen）に分類した。固有名とは、自身で完成した、空所をもたない表現である。例えば、「$2+2$」という表現は何かに補われるべき空所をもたない。一方で関数名は、空所をもち、空所を補うことで別の表現を作るような表現である。例えば「$2+2$」に空所を作って「$\_+2$」と書くことにすると、これは「2 を足す」ことを表現する関数名になる。この空所に適切な表現を代入し、例えば「$4+2$」とすると、別の表現ができあがる。さらに空所を二つ作って「$\_+\_$」とすれば、これは足し算を表現する関数名になる。

さらにフレーゲは、関数名について、それがどのカテゴリの表現からどのカテゴリの表

*1 ただし、素朴集合論をフレーゲの体系で解釈することはできる。

*2 実は私の卒論がそれなので、興味のある人は連絡してくれればあげます。長いです。

現を作るものなのかを区別した。例えば「$2+2$」から「_ + _」という表現を作れば、これは固有名を受け取って固有名を返す一階関数名である。だが、「2_2」と空所を作れば、これは一階関数名を受け取る高階関数名——受け取った関数を 2 と 2 に適用する、という関数——になる。

つまりフレーゲは、表現について、それが関数名なのか固有名なのか、関数名ならばどんな表現を受け取ってどんな表現を作るのか、を文法的カテゴリとして区別していた。さらに表現上の区別は、そのまま表現の意味の区別にあてはまるとフレーゲは考えた。したがって彼は、固有名の指示する**対象**と、関数名の指示する**関数**は、まったく違う種類の存在者であると考えていた。また同じ関数であっても、受け取る対象・作る対象のカテゴリが異なれば、やはり異なる種類の存在者だと捉えていた。このように、あるものが対象なのか関数なのか、関数ならばなにを受け取って何を返すのかをしっかり区別する発想は、今日型とかタイプとか言われているアイデアの本質を捉えている。つまりフレーゲの理論の中には、型があったのである。

2.2.2　対象による関数の代表

だが、型の厳密な区別は不自由を強いる。例えば我々が自然言語で数学をする際、「足し算関数」「かけ算関数」というように、関数を空所のない固有名によって指示する。あるいは、「関数 $x(x+1)$ と関数 x^2+x は同一だ」という命題を、「$2+2$ と 4 は同一だ」と述べる時と同じ感覚で述べる。

だが型を厳密に適用すれば、こうした実践は問題を含んでいる。まず、固有名によって指示されるのはあくまで対象であり、関数は空所を持つ関数名によって指示されるものである。両者は混同されるべきではない。さらに、関数と関数の同一性は、関数と関数の間の関係であり、対象と対象の関係である対象の同一性とは全く違う種類のことがらである。要するに我々の実践は、関数を対象とみなすことを前提としているように見えるのだが、それは型を厳密に区別するならば不可能なのだ。

この問題に対処するためにフレーゲは、関数の値域（Werthverlaufe)[*3]というものが存在すると考えた。関数の値域とは、任意の関数に対して存在し、その関数を代表するような対象である。我々が関数を対象としてみなしているような語り方をしているときには、実は関数の代わりに、関数の値域を話題にしているのだ。したがって、「足し算関数」「かけ算関数」と我々が語るときに意味されているのは足し算やかけ算の値域であるし、関数と関数の同一性について語っているときも、実は我々は関数の値域の同一性について語っていることになる。

2.2.3　関数としての概念

関数名と固有名の区別に話を戻そう。フレーゲは、空所のない表現が固有名であり、固有名は対象を指示すると考えた。一方、空所のある表現が関数名であり、関数名は関数を指示すると考えた。しかしこの図式を文字通り当てはめれば、文も固有名ということになる。例えば、「2 は素数である」という文には空所がないので固有名である。さらに、ここ

[*3] ここにいう関数の値域は、一般的にいう関数の値域（関数の値の集合）と意味が異なることに注意してほしい。

から空所を設けて「_は素数である」という表現を作ればこれは関数名となる。だが、「_は素数である」という表現は、普通述語と呼ばれるだろう。

要するにフレーゲの文法的カテゴリでは、文は固有名だし、述語は関数名なのだ。したがって文は対象を指示するし、述語は関数を指示する。一般的に、文の表現するものは命題と呼ばれ*4、述語の表現するものは概念と呼ばれる。述語は固有名を受け取って文を作る表現である。よって述語が表現する概念は、対象を受け取って、命題を返す関数（以下、命題関数と呼ぶ）ということになる。

2.2.4 集合論

以上二つのアイデアを組み合わせることで、フレーゲの集合観を説明できる。

素数の集合について考えてみよう。素数の集合について成り立つことがらは、それがまさに素数であるという概念を満たすものの集合であるという点に由来するように見える。例えば素数の集合には 2 が属するが、これは素数であるという概念が 2 に当てはまるからである。あるいは素数の集合は自然数の集合よりも小さいが、これは素数であるという概念が自然数であるという概念を含意することによる。

要するに集合の本性は、その集合を作るもとになった概念が何者であるかによって決定されるように見える。すると、集合とは、そのもとになった概念を代表する対象である、と考えられないだろうか。要するに、集合とは、概念＝命題関数の値域に他ならないのではないか。集合の世界とは概念の世界の映し鏡にほかならず、命題関数を代表する対象こそが集合なのだというのが、フレーゲの論理的集合観である。

2.3 フレーゲ構造

以上、フレーゲの論理的集合観の核となるアイデアを、自然言語によって説明した。第 3 章では、ピーター・アクゼルのフレーゲ構造の理論 [1] を紹介し、第 2 章で確認したアイデアが数学的にどう定式化されるのかを確認する。

フレーゲ構造は、言語によって指示される対象や関数たちの関係をモデル化することを意図した代数的構造である。フレーゲ構造の中には命題や概念の論理的関係が含まれており、さらに論理的集合観にもとづいて、集合の構造も含まれているとみなすことができる。

以下、フレーゲ構造内での集合とその外でのメタレベルの集合を区別するため、フレーゲ構造の外での集合を「集団」、集団に対象が属することを「入る」と表現する。

2.3.1 明示的に閉じた命題系

定義 2.3.1 (明示的に閉じた命題系) $S = \langle F_0, P, T, F_1, F_2, F_3, \cdots \rangle$ が以下の条件を満たすとき、S を明示的に閉じた命題系と呼ぶ。

- F_0 は対象の集団である。F_0 の要素は F 対象と呼ぶ。
- F_n は、F_0^n から F_0 への n 項関数の集団である。F_n を F 関数と呼ぶ。
- F_0 上の定値関数、射影関数は F 関数となり、F 関数の合成はまた F 関数となる。

*4 フレーゲ自身は文の表現するものを命題とは呼んでいないが、説明のために以下ではこの用語を採用する。

- $P \subseteq F_0$ かつ $T \subseteq P$

明示的に閉じた命題系は、固有名によって指示される対象や、（一階）関数名によって指示される関数達のなす構造を表現している。特に P と T は、文によって表現されるものとしての命題と、命題のうち特に真なる命題を意味している。命題が対象の一部であることは、フレーゲの型の理解からの帰結であるため、P の要素はつねに F 対象である。以下、P の要素を命題、T の要素を真理と呼ぶことにする。

与えられた関数名の空所に適切な表現を入れたり、あるいは与えられた表現から適切な部分表現を抜いて空所を設けたりすることでことで作られる新しい表現も、やはり何らかの対象や関数を表現するはずである。これに対応して、明示的に閉じた命題系においては、F 関数や F 対象を指す定項・変数を使って表現を作った場合（例えば、x, y, z を F 対象の変数、f, g を特定の F_3, F_2 関数を指す定数とした時の $f(g(x,y),z)$）、その変数を抽象化して関数を表す名前を作っても F 関数になる（つまり、x, y, z に対して $f(g(x,y),z)$ を返す関数として $\langle x, y, z | f(g(x,y),z) \rangle$ を考えても F 関数になる。以下、関数抽象には同様の表記を使用する）。

高階関数名であっても、空所への表現の充当・および空所の作成によって、新しい表現を形成することができなければならない。この条件を表現したのが、以下の F 汎関数の概念である。

定義 2.3.2 (F 汎関数) 明示的に閉じた命題系 S に対し、関数 $H : F_{n_1} \times F_{n_2} \times \cdots F_{n_k} \to F_0$ が F 汎関数であるとは、任意の $m > 0$ と、F_{n_1+m}、F_{n_2+m}、$\cdots$の中の f_1から f_k に対して、

$$\langle \overline{y} | H(\langle \overline{x} | f_1(\overline{x}, \overline{y}) \rangle, \langle \overline{x} | f_2(\overline{x}, \overline{y}) \rangle, \cdots \langle \overline{x} | f_k(\overline{x}, \overline{y}) \rangle) \rangle$$

が、常に F_m に入る F 関数となることである。このとき、$\overline{y}$ は変数を m 個ならべた変数列、$\overline{x}$ は変数を対応する i について n_i 個並べた変数列を表す。

2.3.2　論理系

フレーゲ流の発想に則れば、論理定項もまた特別な関数として捉えられる。例えば「=」は「対象から命題への関数」、「でない」は「命題を受け取ると命題を返す関数」となる。

こうした論理定項を明示的に閉じた命題系に導入し、構造を豊かにしてみよう。

定義 2.3.3 (論理系) 明示的に閉じた命題系 S について、$L = \langle S, \neg, \wedge, \vee, \to, ==, \forall, \exists \rangle$ が次の条件をみたすとき、L を論理系と呼ぶ。

- $\neg$ は F_1、$\wedge, \vee, \to, ==$ は F_2 に入っている。
- $\forall, \exists$ は $F_1 \to F_0$ の F 汎関数である。
- $\wedge, \vee, \to, ==, \forall, \exists$ は、論理図式（後述）を満たす。

論理図式は、論理定項が満たしてほしい条件を列挙したものである。「何を渡すと命題になるか」、「どんなものを渡すと真なる命題になるか」を定める。以下で論理式のように見える表現はすべて、F 対象を指すことに注意。

論理図式 (== の論理図式)
- a, b が F 対象なら、$a == b$ は命題。

- $a == b$ が真なる命題 iff. a と b が同じ F 対象

論理図式 (¬ の論理図式) a が命題であるならば、

- $\neg a$ は命題。
- $\neg a$ が真なる命題 iff. a が真なる命題でない

論理図式 (∧ の論理図式) a, b が命題であるならば、

- $a \wedge b$ は命題。
- $a \wedge b$ が真なる命題 iff. a が真なる命題、かつ、b も真なる命題

論理図式 (∨ の論理図式) a, b が命題であるならば、

- $a \vee b$ は命題。
- $a \vee b$ が真なる命題 iff. a が真なる命題、または、b が真なる命題

定義 2.3.4 (命題関数) F_1 の関数の内、任意の F 対象に対して命題を返すものを命題関数という。

論理図式 (∀ の論理図式) f が命題関数であるのならば、

- $\forall f$ は命題。
- $\forall f$ が真なる命題 iff. 任意の F 対象 a について $f(a)$ が真なる命題

論理図式 (∃ の論理図式) f が命題関数であるのならば、

- $\exists f$ は命題。
- $\exists f$ が真なる命題 iff. ある F 対象 a について $f(a)$ が真なる命題

$\forall f$ を $\forall x f(x)$、$\exists f$ を $\exists x f(x)$ とも書くことにする。$\rightarrow$ の論理図式だけが少し特殊である。

論理図式 (→ の論理図式) a が命題であり、a が真なる命題ならば b が命題である場合、

- $a \rightarrow b$ は命題。
- $a \rightarrow b$ が真なる命題 iff. a が真なる命題ならば b が真なる命題

a が偽なる命題である場合、$a \rightarrow b$ は b が命題であろうがなかろうが真なる命題となる。

2.3.3　ラムダ構造

第一章で確認したように、フレーゲは任意の関数に対して、それを代表する対象（値域）が存在すると考えた。任意の関数に対してその値域を対応させる高階関数を含んでいる構造を、ラムダ構造と呼ぶことにしよう。

定義 2.3.5 (ラムダ構造) 明示的に閉じた命題系 S に対して、$LM = \langle S, \lambda, app \rangle$ が以下

の条件をみたすとき、ラムダ構造と呼ぶ。

1. λ は $F_1 \to F_0$ の F 汎関数。app は F_2 に入っている。
2. F_1 に入っている任意の f に対して $app(a, \lambda f) = f(a)$。

以上の定義の 2 番目の条項は、関数の値域から app によって元の関数の振る舞いを復元できることを表現している。このことが、λf が f を正しく代表する対象であることを保証している。

2.3.4　フレーゲ構造と集合の概念

定義 2.3.6 (フレーゲ構造) ある明示的に閉じた命題系 S について、その論理系とラムダ構造を合わせたもの、つまり $F = \langle S, L, LM \rangle$ を、フレーゲ構造という。

さて、フレーゲ構造は固有名-関数名、対象-関数を区別するフレーゲの型の理解にもとづいており、さらに関数を代表する対象としての値域を備えている。したがって、フレーゲが想定したところの、言語によって表現されるものたちがなす構造を、忠実に形式化した代数構造であると言える。そしてこの中には、論理的集合観が集合であるとみなすものが含まれている。

定義 2.3.7 (集合) 命題関数 f に対して λ を適用したものを集合と呼ぶ。

論理的集合観によれば、述語が意味する概念とは命題関数であり、概念＝命題関数を代表する対象が集合であった。ゆえに上の定義は、論理的集合観を表現したものと見ることができる。

ちなみに、集合は上記の定義で良いとして、集合と対象の要素関係はどう考えればよいだろうか？次のように考えるのが最も自然であろう。x が素数の集合に属するとは、x が素数であるということに他ならない。一般的には、「概念 f から作られた集合にある対象 x が属する」とは、要するに、$f(x)$ ということにほかならない（f は命題関数であるから、$f(x)$ は命題になる）。

定理 2.3.8 (抽象タームの原理) $app(a, b)$ を $a \in b$ とも書く。また、λf を $\{x|f(x)\}$ とも書く。このとき、任意の命題関数 f と任意の対象 y について、

$$y \in \{x|f(x)\} = f(y)$$

明らかに、任意の F 対象 y と任意の集合 x について、$y \in x$ は命題となる。

和集合・共通集合・補集合などなどの集合論的な構成については、集合のもとになった概念に対して論理定項を適用することによって実現できる。要するに、論理と関数の構造を表現するフレーゲ構造の中には、既に集合論が含まれているのである。

2.3.5　余談：論理主義、ラッセルパラドクス、外延性

以上でフレーゲ構造の理論を紹介し、その中に論理的集合観がどのように現れているかを確認するという、本章の主目標は果たすことが出来た。最後にこの節では余談として、フレーゲとフレーゲ構造に関するそれ以外の話題を 3 つ紹介する。

論理主義とは何だったのか？

フレーゲが論理主義のために構築した体系は、実質的には、次の特殊な条件を満たすフレーゲ構造についての理論であったとみなすことができる。

定義 2.3.9 (二値性) 真なる命題 t と偽なる命題 f の二つだけしか命題が存在しないフレーゲ構造のことを、二値のフレーゲ構造という。

フレーゲが二値性を仮定したのはなぜか。この点はフレーゲ自身の記述でもはっきりしないのだが、私の解釈では、文の使い方について規範的な含意を持つのは、その文が真であるか偽であるかだけである、とフレーゲが考えたからである [8]。そのため、文の意味として考慮する必要があるのは真か偽かということだけであるから、文の表現する命題は真偽値そのものだとしたわけだ。フレーゲが主著『算術の基本法則』において、論理主義の実現として行ったことは、実質的には、任意の二値のフレーゲ構造の中で、個々の自然数と自然数の集合を構築し、算術が展開できることを示すことであった。

フレーゲの体系を集積的集合観によって解釈された素朴集合論と同一視してしまうと、フレーゲがなぜ、自分の体系の中で算術を展開することを、算術の論理への還元になると考えたのか、理解しがたい。集積的集合観によって解釈された素朴集合論を論理であるとみなせる理由がわからないからである。

しかしながら、フレーゲが論理的集合観をとっていたこと、『算術の基本法則』が二値のフレーゲ構造についての研究であったことを念頭に置けば、フレーゲの「論理主義」の内実は理解しやすい。フレーゲは個々の自然数を集合として構築し、さらに自然数の集合を構築した。だが、フレーゲ構造における集合とは、なんらかの概念を代表する対象であり、「集合に対象が所属する」という集合論的な真理は、「概念が対象に当てはまる」ということの言い換えに過ぎない。そしてフレーゲの置いた仮定が二値のフレーゲ構造という条件だけであった以上、フレーゲが自然数や自然数集合を定義するために使える概念は、論理定項と真・偽の値を元手にして定義できるようなものだけである。するとこういうことになる。フレーゲはまず、自然数や自然数集合といった算術的な対象に対して、それらが代表するものとして、**論理定項と真偽値を元手として作られるという意味で論理的な概念**を対応させた。そして彼は、算術的対象についての真理は、対応する論理的概念が対象に当てはまるための条件——論理図式によって表現される——から導けることを示した。すると、算術的対象は要するに論理的な概念を対象としてコーディングしたものにほかならず、算術的真理とは論理的概念の論理図式から導ける性質をコーディングしたものにほかならない。この意味において、フレーゲは算術を論理に還元したのである。

ラッセルパラドクス

フレーゲの体系はラッセルパラドクスに逢着し、論理主義は失敗してしまった。ラッセルパラドクスの議論を再現することで、二値のフレーゲ構造が存在しないことを証明できる。

二値のフレーゲ構造では、$R = \{x|\neg((x \in x) == t)\}$ が集合となる。すると、次が言える。

$$R \in R \text{ が真なる命題である}$$

$$\text{iff. } \neg((R \in R) == t) \text{ が真なる命題である（抽象タームの原理）}$$
$$\text{iff. } (R \in R) == t \text{ が真なる命題ではない } (==, \neg \text{ の論理図式）}$$
$$\text{iff. } R \in R \text{ は真なる命題ではない } (== \text{ の論理図式、二値性）}$$

したがって、$R \in R$ は真なる命題でありかつ真なる命題ではないことになる。よって、二値のフレーゲ構造は存在しない。

だが、二値でないフレーゲ構造は存在する（証明は [1] を参照）。つまり、フレーゲ構造の定義だけからは、ラッセルパラドクスは導かれない。なぜだろうか？

ラッセル集合を素直に $R = \{x|\neg x \in x\}$ と定義したとしよう。すると、

$$R \in R \text{ が真なる命題である}$$
$$\text{iff. } \neg(R \in R) \text{ が真なる命題である（抽象タームの原理）}$$
$$\text{iff. } R \in R \text{ が真なる命題ではない } (\neg \text{ の論理図式？）}$$

と矛盾が出るように見える。が、上記の同値性の中で、$\neg$ の論理図式を適用するには、$R \in R$ が命題でなければならない。もしも R が集合であるならば $R \in R$ は必ず命題となるが、$\langle x|\neg x \in x\rangle$ が命題関数になるかはわからない (任意の F 対象 x に対して $\neg x \in x$ が命題になるとは限らない）ので、R が集合であるとは言えない。したがって、フレーゲ構造の中でラッセル集合を作ろうとすれば、何らかのトリックを使って $\langle x|\neg x \in x\rangle$ を命題関数にする必要がある。二値のフレーゲ構造の場合には、真である命題が t しか存在しないという仮定が置かれているので、$x \in x$ を t との同一性で包んで $\langle x|\neg((x \in x) == t)\rangle$ という命題関数を作ることが出来た。だがこのようなトリックが一般的に可能であるとは限らない。従ってフレーゲ構造の定義だけから、ラッセルパラドクスを発生させることは出来ないのである。

外延性

ただし、ラッセルパラドクスを避けることのできたフレーゲ構造では、集合論としてはちょっと奇妙な事が起こる。外延性が成り立たないのだ。

定義 2.3.10 (内的定義可能性) 集団 $A \subseteq F_0$、及び F_1 に入っている命題関数 C について、

$$C(x) \text{ が真なる命題である iff. } x \text{ が } A \text{ に入っている}$$

が成り立つとき、C は A を内的に定義するという。また、フレーゲ構造 F において、$A \subseteq F_0$ を定義する C が F_1 に入っている場合、A は F で内的に定義可能であるという。

定理 2.3.11 (真理集団と命題集団の内的定義不可能性) どんなフレーゲ構造 F についても、真理集団 T と命題集団 P は内的に定義不可能である。

証明 真理集団 T を内的に定義する命題関数 Tr があるとせよ。このとき、$\neg Tr(x \in x)$ は明らかに命題関数となる。従ってこれを抽象化してラッセル集合を作れるため、ラッセルパラドクスが発生する。命題集団 P を内的に定義する命題関数 Pr があるとせよ。すると、$Pr(x) \wedge (Pr(x) \to x)$ が真理集団 T を内的に定義する命題関数となる。

定理 2.3.12 (ベキ集合の非存在) b が a の部分集合であることを、b が集合であり、$\forall x(x \in$

$b \to x \in a)$ が真なる命題であることと定義する。このとき、任意の集合 a について、a の部分集合の集団は内的に定義不可能である。

補題 2.3.13 任意の命題 a に対し、$b \to a$ が真なる命題となるような命題 b の集団は内的に定義不可能である。

証明 (補題 2.3.13) 補題の題意の集団を内的に定義する命題関数 D があるとしよう。このとき、$E = \{x | D(x \in x)\}$ を考えると、

$$
\begin{gathered}
E \in E \text{ が真なる命題} \\
\text{iff. } (E \in E) \to a \text{ が真なる命題} \\
\text{iff. } E \in E \text{ が真なる命題ならば } a \text{ が真なる命題}
\end{gathered}
$$

となる。「A ならば B」と「A」が同値なら B が導けるので、a は真なる命題である。ところがこのとき $D(x)$ は命題の集団を内的に定義している。よって、補題が証明された。

証明 (定理 2.3.12) 集合 a の部分集合の集団を内的に定義する命題関数 C が存在したとすると、任意の F 対象 c について、

$$
\begin{gathered}
C(\{y|c\}) \text{ が真なる命題である} \\
\text{iff. } \{y|c\} \text{ が集合であり、} \forall y(y \in \{y|c\} \to y \in a) \text{ が真なる命題である} \\
\text{iff. } c \text{ が命題であり、} c \to \forall y(y \in a) \text{ が真なる命題である}
\end{gathered}
$$

つまり $\langle x | C(\{y|x\}) \rangle$ は $c \to \forall y(y \in a)$ が真なる命題となるような命題 c の集団を内的に定義する命題関数となる。補題 2.3.13 からこんな命題関数は存在しない。

定義 2.3.14 (空集合) 集合 a について、$\langle x | x \in a \rangle$ が空な集団を内的に定義する場合、a を空集合という。

定理 2.3.15 任意の空集合 $\emptyset$ と任意の F 対象 a について、

$$
a \text{ は } \emptyset \text{ の部分集合 iff. } a \text{ が空集合}
$$

証明 同値関係を以下のようにたどる。

$$
\begin{gathered}
a \text{ は } \emptyset \text{ の部分集合} \\
\text{iff. } a \text{ は集合であり、} \forall x(x \in a \to x \in \emptyset) \text{ が真なる命題} \\
\text{iff. } a \text{ は集合であり、任意の F 対象 } b \text{ について } b \in a \to b \in \emptyset \text{ が真なる命題} \\
\text{iff. } a \text{ は集合であり、任意の F 対象 } b \text{ について } b \in a \text{ が真なる命題ではない} \\
\text{（} b \in \emptyset \text{ が真なる命題ではないので）} \\
\text{iff. } a \text{ が空集合}
\end{gathered}
$$

定理 2.3.16 任意のフレーゲ構造について、空集合がすべて同一であることはない。

証明 任意にフレーゲ構造を決めると、$\{x | \neg x == x\}$ なる空集合が存在する。これを $\emptyset_0$ と書く。いま、空集合が $\emptyset_0$ しか存在しないと仮定する。すると、定理 2.3.15 より $\emptyset_0$ の部分集合の集団は空集合の集団であるから、$\langle x | x == \emptyset_0 \rangle$ は $\emptyset_0$ の部分集合の集団を内的

に定義する命題関数となる。だがこれは定理 2.3.12 に矛盾する。よって仮定が誤り。

定理 2.3.17 (外延性の否定) フレーゲ構造 F において、F_1 に入った命題関数 f, g が同じ集団を内的に定義する時つねに $\{x|f(x)\} = \{x|g(x)\}$ となる場合、F は外延性が成り立つ、という。任意のフレーゲ構造 F について、F は外延性が成り立たない。

証明 定理 2.3.16 より直ちに従う。

2.4 おわりにブックガイド

以上で、フレーゲの論理的集合観を、フレーゲ構造の理論を使って紹介するという目標は果たされたと信じる。本稿はフレーゲへの参照や引用をごまかしているし、哲学的ないし数学的に難しいところはことごとく無視している。もし本稿で紹介した話題に興味があってより深く勉強したいのであれば、以下の本や論文を読むことを薦める。

フレーゲの論理主義について詳しく知りたいという読者には、とりあえず [5] を進める。フレーゲは分析哲学内部では言語哲学者として有名であるが、彼の言語哲学的アイデアは論理主義のプログラムと切り離せない。金子の文章は短いながらも彼の論理主義と言語哲学の関連をわかりやすく描き出している。また同書巻末のブックガイドでは、フレーゲに関する重要文献が多数紹介されている。

本格的にフレーゲの数学の哲学について知りたければ、やはりダメットの著作 [2] は避けて通れない。同書はダメットの本の中では比較的記述が整理されているので、それほど身構えずに読めるだろう（もちろん、本格的な哲学書を読むつもりで読む、という最低限の覚悟は必要であるが)。本稿が避けて通った「文脈原理」について、徹底的な検討がなされている。

フレーゲ自身の著作としては、『算術の基礎』が読みやすく面白いのだが、本稿のトピックに関連する文章としては [3] をまず読まれるとよい。その後、『フレーゲ著作集』の『哲学論集』に含まれている論文を読んでいくと、フレーゲの論理観・数学観・集合観がつかめると思う。論理主義が本格的に展開された著作は『算術の基本法則』だが、これをいきなり読むのはお勧めしない。

フレーゲ構造については、アクゼルの原論文 [1] が十分わかりやすいので、直接読むのがよいだろう。邦訳が『フレーゲ哲学の最新像』に収録されているのだが、フレーゲ構造を実際に構成する部分がオミットされた抄訳なので、そこを読むためには原論文にあたるしかない。ほか、[4] にもフレーゲ構造の解説が含まれている。

フレーゲ構造を使ってフレーゲの哲学を見直すというテーマの論文としては、[6] や、私の卒論がある。私の卒論は、本稿が紹介した論理的集合観を、本稿でスキップした話題とも関連づけてより包括的な視野で論じている。公開していないので、読みたい人はツイッ

ターアカウント@otb_btb に連絡してください。

参考文献

[1] Aczel, P. (1980). Frege Structures and the Notions of Proposition, Truth and Set. in Barwise, J. Keisler, H. and Kunen, K. eds. The Kleene Symposium: 31-59.

[2] Dummett, M. (1991). Frege: Philosophy of Mathematics. Harvard University Press.

[3] フレーゲ. (2001). 「関数と概念」野本和幸（『フレーゲ著作集　哲学論集』）

[4] 林晋, 小林聡. (1991). 『構成的プログラミングの基礎』, 遊星社.

[5] 金子洋之. (2007). 「フレーゲ」. 飯田隆編『哲学の歴史』第 11 巻:127-196.

[6] 大西琢朗. (2008).「概念の外延・文脈原理・フレーゲ構造」. 哲学研究 (586):104-127.

[7] 岡本賢吾, 金子洋之編. (2007).『フレーゲ哲学の最新像」, 勁草書房.

[8] 鈴木佑京. (2014).「論理主義を再構築する　論理的集合観とフレーゲ構造」卒業論文

第 3 章

数学で点を増やしたい！

淡中 圏

3.1　イントロダクション：空間に点を増やしたい

モデル理論を使うと、空間に点を増やすことができる。これはグロタンディーク・トポロジーやトポスなどでは大掛かりに行われていることだが、それらは高度なので次回以降に回すとして、今回は大雑把に「空間に点を増やすとは何か」を理解するためにスキーム論のジェネリックポイント程度のことをモデル理論でやりたい。

またモデル理論的に同じことをしているように見えるもう一つの例として、実数上に無限小実数や無限大実数を加える操作についても軽く触れる。

スキーム論において環 R のスペクトル $\mathrm{Spec}R$ とは、集合としては

$$\mathrm{Spec}R := \{p | p \text{ は } R \text{ の素イデアル } \}$$

であり、その位相は R のイデアル I に対して $V(I) = \{p | I \subseteq p\}$ の形の集合を閉集合として考えた位相（ザリスキー位相）である（詳しくは [3] に書いてある）。

すると整数環のスペクトラム $\mathrm{Spec}\mathbb{Z} = \{(0), (2), (3), (5), (7), \dots\}$ において、点 (0) の 1 点集合は閉集合ではなく、その閉包は全体になる。このような点を**ジェネリックな点**（生成点と訳される）という。

またジェネリックな点とは**ジェネリックな性質**すなわち「小さな例外をのぞいて全ての点で成り立っている性質」が成り立っている点であり、逆にジェネリックな点である性質が成り立っていることを証明できれば、それは小さな例外を除いて全ての点で成り立っていることがわかる。

このような点は最初は違和感があっても、便利なのですぐに慣れてしまう。

しかし今回はあえてこのジェネリックな点をモデル理論で導入したいのだ。

グロタンディークのスキーム論による導入はとてもスマートであるがゆえに、何をしているのかわかりにくくなっているのではなかろうか、と思えたからである。

論理学の道具を使ったモデル論的導入はスマートとは言えないが、何をしようとしているかはよくわかる。

論考の最後では、これらの操作が何を意味しているかを、数学の様々な手法と見比べながら、概括的に語ってみよう。

3.2 モデル理論を使ったジェネリックな点の追加

3.2.1 モデル理論におけるタイプ

ここで軽く説明している事柄は [2] が分かりやすい。

元、関数、関係を表す記号の集合 L を**言語**と呼ぶ。

例:$L_{\mathrm{ring}} = \{0, 1, +, -, *\}$ を環の言語という。

言語 L と論理記号 $\exists, \forall, \wedge, \vee, \neg, \rightarrow, ()$ と等号 $=$ と変数記号 $x, y, z, \ldots$ を使って書かれる論理式を **L-論理式**といい、自由変数を持たない L-論理式を L の**文**という。

L の各記号の解釈の定められた集合 M を L 構造という。

例:環は記号 $+$ に対して和を、記号 $*$ に対して積を、というように対応させていけば L_{ring} 構造である。もちろん L がどんなもので、適当な解釈を決めればどんな集合も L 構造にすることができる。それらは当然つまらない構造になる。しかし集合を L 構造とみなせば、その構造において L の文の真偽を自明な方法で持たせられる。つまり、ある集合において定めた解釈で $1 + 1 = 0$ ならば、その構造において $1 + 1 = 0$ は真なのだ。

L の文 ϕ が L 構造 M で成り立っている時、$M \models \phi$ と書く。また L の文の集合 T の各文が M で成り立つときも $M \models T$ とかく。

言語 L の文からなる無矛盾な集合 T を**理論**と呼ぶ。

例:環の言語を使って体の公理、すべての方程式に解があること（各次数に対して書けばいい)、および標数が 0 であること（1 を p 回足しても 0 にならないことを各素数 p に対して書けばいい）を表した文の集合を標数 0 の代数閉体の公理 ACF_0 と書く。

標数 0 で奇数次の方程式全てに解があるが、$x^2 + 1 = 0$ には解がないことを公理化すると実閉体の公理 RCF になる。実閉体を $x^2 + 1 = 0$ で代数拡大すると代数閉体になる。実閉体では $a < b$ と言う関係を $\exists x(x \neq 0 \wedge x^2 = b - a)$ として定義できるので、順序間の言語 $L_{\mathrm{o-ring}} = \{1, 0, +, -, *, <\}$ を言語とした方が何かと便利である*1。

ある理論 T からある文 ϕ が論理的に導かれるとき $T \vdash \phi$ と書く。

T の各文が成り立つような L 構造、すなわち $M \models T$ となる構造 M を T のモデルという。

M を L 構造、$A \subset M$ を真部分集合とし、$a \in M \setminus A$ とする。

定義 3.2.1 $L(A)$ 論理式の集合 $\mathfrak{p}$ が 1 変数タイプであるとは、含まれる論理式 $p(x) \in \mathfrak{p}$ はすべて、最高でも一つの自由変数までしか持たず、$\mathfrak{p}$ の任意の有限個の元 $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)$ に対して、必ずある元 $a \in M$ があって、$M \models p_1(a) \wedge p_2(a) \wedge \cdots \wedge p_n(a)$ が成り立つことを言う。タイプ $\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{p}(x)$ と書くこともある。

つまりタイプとは、任意の有限部分集合が M において充足されるような $L(A)$ 論理式の集合である。このタイプが包含関係で極大なとき、**完全タイプ**という。つまり任意の自由変数が一つ以下の $L(A)$ 論理式 $\phi(x)$ に対して、$\phi(x) \in \mathfrak{p}$ か $\neg\phi(x) \in \mathfrak{p}$ が成り立てば $\mathfrak{p}$ は

*1 $<$ があれば、$>, \geq, \leq$ 等ももちろん省略記号として導入できる。ではどうして $<$ を言語に加えるのかというと、後で出てくる量化子消去が可能なためにはこれら不等号が 1 個は言語に加わっていないとだめだからである。

完全である。自明な例として $a \in M$ に対して、

$$\mathrm{tp}^M(a/A) = \{p(x) : 1 \text{ 変数 } L(A) \text{ 論理式 } | M \models p(a)\}$$

がある。これを a の A **上の完全タイプ**という。

M の A 上の 1 変数完全タイプの集合 st_A^M に $L(A)$-論理式 ϕ に対して、$\{\mathfrak{p} \in \mathrm{st}_A^M | \phi \subseteq \mathfrak{p}\}$ を基本閉集合とした位相を入れる。この定義とスキームのザリスキ位相の定義を見比べると良いと思う。これを**ストーン空間**という。ストーン空間はコンパクト・ハウスドルフで完全不連結、全ての開集合は閉集合でもあるような位相空間である。

n 変数のタイプ、完全タイプも同様に定義できるが、ここではとりあえず置いておこう。

このタイプこそ、現代のモデル理論の発展にとって重要な概念だった。任意の完全タイプ $\mathfrak{p}(x)$ について、コンパクト性定理（任意の有限部分理論が充足されうる理論は充足されうるという定理）により、M の初等拡大 M' と、$m \in M'$ があり、$\mathfrak{p}(x)$ に含まれるすべての論理式 p に対して $M' \models p(m)$ となる。つまり m は $\mathfrak{p}$ を実現していることになる。

モデル理論で細かく議論するのは、この時、他の完全タイプ $\mathfrak{q}$ が M' で実現されているのかどうかである。実現させるのは簡単なので、あるタイプが実現しない拡大をいかに作るかを議論するわけである。それによって、構造の数を数えていくという議論ができ、またタイプの間の「独立性」などの概念が発生する（雑に言えば、一方を実現させて他方を実現させない、ということが可能な時に、独立だと考えればよい）。ここから、ベクトル空間や代数閉体の理論におけるような「次元」の概念が定義可能になっていくのである。

3.2.2 ACF_0 におけるタイプ

具体例として標数 0 の代数閉体、つまり ACF_0 のモデルのタイプについて調べよう。そこで簡単のため、最小の標数 0 の代数閉体、有理数体 $\mathbb{Q}$ の代数閉包 $\bar{\mathbb{Q}}$ について考える。論理式に使っていい定数の領域 A としては、$\mathbb{Q}$ を選ぶ。$\mathbb{Q}$ の元は全て、L_{ring} 論理式によって一つに定まるので、$\mathbb{Q}$ はあってもなくても変わらないからである。

このとき、次の論理学的な定理が重要な役割を果たす。

定理 3.2.2 ACF_0 の任意の文 ϕ に対して、$\forall$ も $\exists$ もない（**量化子自由**な）文 ψ があり、

$$\mathrm{ACF}_0 \vdash \phi \leftrightarrow \psi$$

が成り立つ。このように、任意の文に対して、量化子自由な文が存在して、その同値性が証明できる理論は**量化子消去**ができるという。

量化子消去ができる理論の例としては、代数閉体より、$L_{\mathrm{o-ring}}$ 構造としての**実閉体**を考えた方がわかりやすい。実際、実閉体も量化子消去ができる。例えば、二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ が解を持つことは、論理式で書くと、

$$\exists x(ax^2 + bx + c = 0)$$

となるが、これが二次方程式の判別式

$$b^2 - 4ac \geq 0$$

と同値になることはよく知られている。これが量化子消去であり、この量化子消去のアルゴリズムを実装したソフトを使うと、大学入試の問題の多くが解けることも知られている（詳しくは [6] にある）。

これにより、AFC_0 の論理式は実質、多項式 f に対して $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ の形の論理式のブール和、すなわちこのような論理式と否定を「かつ」と「または」で繋げたものになる。このような論理式の解集合を、代数幾何では**構成可能集合**という。

論理式に $\exists$ をつけることは、射影をすることに対応する。実数において放物線と対応する $y = x^2$ という論理式に対して、$\exists y(y = x^2)$ という論理式は $y \geq 0$ と同値であり、これは放物線を y 軸に射影したものになる。

$\forall$ が $\neg\exists\neg$ と同じであることに注意すれば、量化子消去が可能だということは、全ての $\exists$ が消去可能だということなので、代数閉体の理論が量化子消去が可能であるということは、代数閉体において構成可能集合の射影が構成可能集合である、ということに言い換えられる。これは代数幾何におけるシェヴァレーの定理の代数閉体ヴァージョンである ([3] の練習問題)。[*2]

ここまでくれば次が証明できる。

定理 3.2.3 自然な連続全単射 $\mathrm{st}_{\mathbb{Q}}^{\bar{\mathbb{Q}}} \to \mathrm{Spec}\mathbb{Q}[x]$ が存在する。

証明 $\mathfrak{p}$ を $\mathbb{Q}$ 上の $\bar{\mathbb{Q}}$ の完全タイプとする。この時、$I_\mathfrak{p} = \{f \in Q[x] | f = 0 \in \mathfrak{p}\}$ とする。$f, g \in I_\mathfrak{p}$ に対し、$f + g$ が $I_\mathfrak{p}$ に入ってなければ、$\neg(f(x) + g(x) = 0)$ が $\mathfrak{p}$ の元で、$f(x) = 0 \wedge g(x) = 0 \wedge f(x) + g(x) \neq 0$ が $\bar{\mathbb{Q}}$ に解を持つことになってしまう。これはおかしいので、$f + g$ は $I_\mathfrak{p}$ の元である。同様に $f \in I, g \in Q[x]$ に対して、$fg \in I_\mathfrak{p}$ も証明できる。また $fg \in I_\mathfrak{p}$ で f も g も $I_\mathfrak{p}$ の元ではないとする。この時、$f(x)g(x) = 0 \wedge f(x) \neq 0 \wedge g(x) \neq 0$ が解を持つことになり、おかしいので $fg \in I_\mathfrak{p}$ なら f か g のどちらかは $I_\mathfrak{p}$ の元である。

すなわち $I_\mathfrak{p}$ が素イデアルことが証明できた。

これの逆写像として、$Q[x]$ の素イデアル I に対して、$\mathfrak{p}_I$ を

$$\{f(x) = 0 | f \in I\} \cup \{f(x) \neq 0 | f \notin I\} \qquad \blacksquare$$

の論理的帰結のなす集合とすると、量化子消去によりこれは完全タイプとなる。$\mathfrak{p} \mapsto I_\mathfrak{p}, I \mapsto \mathfrak{p}_I$ の二つがそれぞれ逆写像になっていることは易しい。

この写像の $\mathfrak{p} \mapsto I$ への向きが連続なのは、それぞれの位相の決め方から明らかである。

一方、逆の射は連続にはならない。つまりこの写像は位相同型にはならない。

ストーン空間の位相の決め方では多項式 f に対して $f(x) = 0$ と $f(x) \neq 0$ の二つの論理式を同列に扱うので、ザリスキ閉集合はストーン空間では開集合にもなる。よってストーン空間のほうが位相が細かくなるのだ。環とブール代数の物事の捉え方の違いと考えることもできるかもしれない。

この結果はそのまま多変数の場合に拡張できる。

この時、$\mathbb{Q}[x]$ は単項イデアル整域であるので次元 0 の素イデアルは (f) という形をしていて、$\mathrm{Spec}_{\mathbb{Q}[x]}$ の点は、f の解の絶対ガロア群 $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ による軌道と考えることができる（群の作用による同値関係によって割ったと言っても同じ）。そう考えると、モデル理論のタイプは、ガロア理論の議論を環の言語以外にも拡張したものだと考えることもで

[*2] スキームなら任意の基礎体に対して成り立っている。しかし実数の場合などで、スキームで考えるのが一番いい選択であるとは限らない。放物線の射影はやはり半直線であった方が自然な場合というのはやはり多いはずだ。

きる（ガロア群を考えることはあまり聞かないが、ガロア群自体は定義できる）。そしてイデアル (0) に対応するタイプ $\mathfrak{p}_{(0)}$ は、いかなる代数方程式の解にもならないことを意味する文の集合である。つまり $\mathfrak{p}_{(0)}(x)$ は x が超越数であることを主張している。もちろんそれを実現する元は $\bar{\mathbb{Q}}$ 内には存在しないが、$\mathbb{C}$ になら存在している。

多変数化すると、$\bar{\mathbb{Q}}^n$ の既約代数多様体 V に対して、あるタイプ $\mathfrak{p}$ が存在して、適当にモデルを拡大して $\mathfrak{p}$ を実現する元の組み $\curvearrowleft$ を作ると、$\curvearrowleft$ が V には含まれるが、V より小さい代数的集合には絶対に含まれない。

このような $\mathfrak{p}$ は V の中の一般的な元を描写していると考えられる。

超越的元とは、$\mathbb{Q}$ 内のどんな特定の元とも違うという意味で、直線上の一般的な元である。同様に上のような $\mathfrak{p}$ を V の**ジェネリック**な点という。

このジェネリックには**一般的**という意味が込められている。というか辞書的にはジェネリックという言葉の主な意味は「一般的」という意味であろうと思う。

3.2.3　ジェネリックという言葉

ファン・デル・ヴェルデンの『代数幾何学入門』を読むと、$y = x^2$ 上のジェネリックな点として (x, y) をとるとしか書いていなかったりする（ [4]）。どうやら当時はジェネリックな点とは単にある関係式を満たす「変数」くらいにしか考えていなかった節がある。この時の「ジェネリック」という言葉が使われたのは、やはり「一般的」という意味が主だっている気がする。ただしこの時点でこれらの変数が代数曲線の座標環を生成するというニュアンスはあるので、最初から「生成的」という意味が込められていたのも真であろうとも思う。

この辺りは、単なる雑感なので、数学史の人にしっかり調べてもらいたいのだが、私の認識ではヴェイユあたりが、「これって要は超越元だよね」と言って、十分な数の超越元を持つ大きな体を考えようとしたようだ。大体のタイプが実現されてしまっているものすごく大きな体「モンスターモデル」を考えるという手法はモデル理論では今も使われている。

代数幾何の方では、グロタンディークがイデアルを点と考えるスキーム論を開発して、全て塗り替えられてしまった。そこでは極大イデアルではない、素イデアルの元が、その素イデアルの表す既約代数集合のジェネリックな点となる。

今回の考察においても、一般のブール代数に可能な議論をするモデル理論的手法よりも、環に特化したスキーム論の方がスマートであるという印象を、個人的に強く受けた。

ただ、実代数幾何などでは、スキーム論ではなく、モデル理論的手法が活かされている現状を見るに、より広い観点から見れば、どちらが優れているという話にはならないはずだと思っている。

3.2.4　実閉体の場合を簡単に

簡単に実閉体の場合も見ておこう。

代数閉体の場合、構造で実現されていないタイプは一つしかできなかった。

このように完全タイプの濃度が、元々の定数の濃度（可算濃度以上と仮定される）より増えないような理論を ω **安定**といい、とても多くのことがわかっている。

代数幾何における超越次数と似た方法で次元が定義でき、群にモデル理論の意味で安定（完全タイプの濃度が定数の濃度よりも大きくならない濃度があるという性質。ω 安定より真に弱い仮定）という性質を仮定した安定群の理論では、代数群の理論と似た結果がたくさん証明できる（詳しくは [5]）。

それに対して実閉体では、完全タイプは大量にできる。実閉体には自然に順序が定義できることが大きい。

例えば有理数体の実閉包 $\bar{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}$ において $\mathbb{Q}$ 上の完全タイプを考えるだけでも、円周率 π を両側から区間で近似していくことによりできるタイプなどができる。つまり任意の実数に対して、それを表す有理数上のタイプが作れるのだ。この時点で実閉体の理論が ω 安定でないことが示された（実際安定ですらない。実閉体の理論に次元などの概念を持ち込むためには幾何的な **o-minimal** という性質を使う）。

さらに「0 より大きく、任意の自然数 n に対して $\frac{1}{n}$ より小さい」というタイプも作れる。これは無限小実数を表すタイプである。また「任意の自然数 n より大きい」というタイプも作れるが、こちらは無限大実数を表している。

これらを実数に付け加えて代数計算（無限小で割る。無限個足し合わせる）とモデルの比較で微積分を行うのが無限小解析である。

モデル理論の観点からは実数に無限小を加えることも、代数多様体にジェネリックな点を付け加えうこともどちらも「論理的にはありうるけれども、現在は実現されていない点を付け加える」という操作である。

3.3　空間とは何か、点とは何か

3.3.1　空間が先か、点は先か、それが問題だ

今回図形（空間）に対して、それまでなかった点を付け加えてみたが、これはどう言う意味を持つのか考察してみよう。

数学において、一般的な空間の導入方法は、集合を考え、そこに位相（写像が「連続」であることを定義するための情報）を入れたり、さらに距離を入れたりすることである。これにより最初の集合は空間の「点」と考えられる。

もしこの見方で考えると、「空間に点を加える」と言う操作はおかしなことになりかねない。なぜ空間に点を加えて、同じ空間でいられるのか。

例えば、空間に仮想的な点を加えて扱いやすくする別の操作として「1 点コンパクト化」が考えられるが、1 点コンパクト化した直線はもちろん元の直線とは考えない（位相同型ではない）。

どう言う空間の捉え方をすれば、ジェネリックな点を加えても、同じ空間とみなせるのだろうか。

それを考えるために、点の集合として空間を捉えるやり方は、そもそも空間に対する逆立ちした見方だということを認識する必要がある。

数学における空間はいくら形式的になったとしても、その起源は我々の実際の空間に対する経験を抽象化したものである。そして、実際の空間に対する経験においては、点から空間を作るということはしない。あくまで空間が先だ。

空間に対して様々な観察をすると、ある誤差の範囲で空間の一部がきりだせる。繰り返

し観測をすることにより、うまくいけばだんだんと範囲を狭めて、狭めた先として点が浮かび上がってくる。

つまり点は極限として与えられる。

このような批判は決して新しいものではない。ポアンカレが実数を集合として見る考え方に反対したことの裏にも同様の考え方が伺えるし、オッカムのウィリアムも「球面が平面と 1 点で交わる」という文章は「どんなに範囲を狭めても、その内部に交わりが収まる」ことの言い換えに過ぎないと考えていた。

しかし、そのような考え方が数学において扱いやすく、結果がたくさん出るやり方がどうかは全く別の問題である。

点があるということは、点の周りの局所的な議論ができるということだ。

リーマン面以降、幾何において中心となったのは、「局所的に簡単な空間を貼り合わせる」という議論である。多様体は局所的にはユークリッド空間だ。代数幾何も解析幾何も局所的には比較的単純な空間を扱う。テイラー展開やローラン展開の議論も局所的には簡単になる関数を扱おうと言う議論であるし、そこから派生した数論における局所体と大域体の議論だってそうだ。コホモロジー論も局所的には自明になっているものが、大域的に自明でないことから貼り合わせの情報を得ようとしている。

数学の様々な分野で「コンパクト」という仮定が現れるのは、局所的な情報を貼り合わせて大域的な情報にするときに、計算が有限に済むためである。

点のない空間では、これらの議論が難しくなる。なのでなかなか手がつかなかったのだろう。

点があれば「局所的に良い性質を持つ」ことを「各点の周りで良い性質を持つ」と言い換えられて、格段に見通しが良くなる。

こう言う訳で点集合として空間を扱うやり方は、今後も数学の中心であり続けるだろう。

位相空間を点集合ではなく、例えば開集合の系だけの側から考えるやり方として Frame や Locale などの圏を考えるやり方がある（Topos もその一種と考えられる）。このような Topology を Pointless Topology と言う（「点のない」と言う意味と「意味のない」と言う意味がかかっている。Haskell において高階関数の組み合わせのみで済まして値を陽に言及することのないスタイルを Pointless と呼ぶことにも同じ洒落がかかっている）。

Locale による位相幾何学には点集合の位相幾何学と比べて良い性質を持つことがある。例えばコンパクト集合の任意濃度の直積がコンパクトであることは点集合の位相幾何学では選択公理と ZF 上同値である。しかし Locale では選択公理なしで証明できる（Pointless Topology については [7] に)。

ただし、数学者がこれを朗報と受け取るとは限らない。もし実際に我々が点なしの空間で十分だと言うなら、問題が簡単になっているので明らかに朗報だが、我々が結局点が欲しがる限り、選択公理がどうしても必要なようだ、と言う話にしかならない可能性も大きい。

そして「点は極限である」と言う観点から見ると、選択公理との関係は必然的に思える。

選択公理と ZF 上同値な定理にツォルンの補題があるが、この形の定式化は要はある種の極限の存在を保証している。

3.3.2 関数や関係の代数から点を作る

圏論では点を終対象 T からの射 $T \to X$ として捉える（詳しくは [8] を参照)。

これは集合や位相空間の圏では終対象は 1 点集合であるので、その終対象からの射はまさに空間の点に対応することからの一般化である。

すでに無数の極限をとって点を作ってしまった後の点集合で考えると、これが極限なだと言うことはよくわからない。

そこでこの空間上の関数のなす代数である環や、部分集合のなす代数であるブール代数を考えてみよう。

空間から関数環やブール代数を考える操作は反変関手なので、この場合の点とは始対象への射となる。始対象とはこの場合は、1 点集合の上の関数環や 1 点集合の部分集合のなすブール代数、すなわち $2 = \{0, 1\}$ になる。

このように考えれば関数環やブール代数から空間の点が構成できる。

スキームにおける点の捉え方はまさにここから来ている。

歴史的にはこれはゲルファント＝ナイマルクの定理の影響下にある（詳しくは [9])。

定理 3.3.1 単位的可換 C^* 環はあるコンパクト・ハウスドルフ空間上の連続な複素関数のなす関数環と等距離 $*$-同型になる。

その空間は指標、すなわち C^* 環から $\mathbb{C}$ への恒等的 0 ではない準同型写像のなす空間に適切な位相を入れることで作られるのである。

$\mathbb{C}$ はまさに C^* 代数の始対象、1 点のなす空間上の関数環であり、関数環をとる操作の反変性より、（もし空間があるなら）1 点からその空間への射、すなわち空間の点をもたらすのは自然である。もちろん、実際にそうやって空間が作れるというこの定理の主張は全く自明ではないが。

スキーム論はこの議論を環において応用する。環 R の極大イデアルは剰余類体 k への環の準同型写像 $R \to k$ と対応しているので、これを点と考えるのは自然な類推だ。実際 $\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ の極大イデアルは $\mathbb{C}^n$ の元と 1 対 1 対応する（ヒルベルトの零点定理)。

ここでも $\mathbb{C}$ が $\mathbb{C}$ 上の代数の始対象であり、1 点 $\mathrm{Spec}\mathbb{C}$ が $\mathbb{C}$ 上のスキームの終対象であることを指摘すれば十分であろう。

さらにグロタンディークはジェネリックな点も取り入れるために、極大イデアルではない素イデアルも空間に取り入れたのだ。これがスキームになる。

ゲルファント・ナイマルクの定理と同様に、元の環はスキーム上の関数と考えられる。例えば $\mathbb{Z}$ も $\mathrm{Spec}\mathbb{Z} = \{(0), (2), (3), (5), \ldots\}$ 上のある種の関数と思うことができるのだ。しかしこれは通常の意味での関数とは考えにくい。2 での値は $\mathbb{Z}/(2)$ にあり、3 での $\mathbb{Z}/(3)$ にあるというように、各点での値域が異なるのだ。

また概念的にも $\mathbb{C}[x]$ と $\mathbb{C}$ だったら後者が先にあって、その上の関数として前者があるイメージが強いが、「整数の集合」と「素数の集合」だと前者が先で後者がそこから作られるイメージが強いと思う。

ここでは空間が先であり、その空間における関数がまず我々に手に入り、そこから点を作るという順序が現れている。

次にあるブール代数から始対象 2 への射があったとしてみよう。

この射で 1 に移る元を集めた部分集合はブール代数のウルトラフィルターという部分集合になる。

そして任意のブール代数のウルトラフィルターの集合を考えることにより、元のブール代数はその集合のある部分集合族[*3]の成すブール代数と考えられるというのが、ストーンの表現定理である。

これはブール代数においてウルトラフィルターが点であることを意味していて、空間上の関係から空間の点が再構成できることを表している（ストーンがこの定理に到達したのも、元はヒルベルト空間の研究からであった)。

ブール代数において 2 への射を作るということは、全ての元に対して 1 と 0 を矛盾しないように割り振っていくことである。同様に体 k 上の代数 A から k への射を作るためには、全ての A の元に対して k の値を準同型になるように定める必要がある。

$\mathbb{C}[x]$ から $\mathbb{C}$ への準同型や有限ブール代数の準同型ならば、手で計算できるが、一般の場合にはこれには選択公理が必要である。それはこの射の核であるイデアルやフィルターをツォルンの補題を使って「構成」するのと同じである。また先ほどの「値を決めていく」と言う例えにより忠実にことを行なっているイメージを持ちたければ、整列可能定理を使う手もある。そうすると元を一列に並べて、それまでの決定から次の元の関数による値を決定していくイメージを持つことができる。

こうして見ると、我々が「関数が存在する」と言うことの裏には、やはり極限をとる操作があることが分かる。

3.3.3 緩い教訓：極限への嗅覚を鍛えよう

もちろん点をスタートとすれば、空間の方を点を集めてきた極限と捉えることもできる。数学の内部において論理関係は対称的になることも多い。一方をスタートとすれば他方はある種の極限として定式化でき、逆に他方をスタートとすれば、一方はある種の極限として定式化できる。

どちらも形式論理の中では横並びの関係だが、そこに「どちらがより良い定式化なのか」と悩むのは意味のある行為である場合がある。例えばどちらかの定式化の方が、仮定が少なくてすみ、一般化が可能、と言う事態もありうる。また物理や計算理論への応用の時に、見通しの良さに違いが生ずることもあるからだ。

今回、どちらが自然かを判断するために使った材料は、空間の経験に対する現象学的な反省と、「チコノフの定理が選択公理と同値かどうか」と言う数学内部の事実である。

また『数学の認知科学』([12]）の前半に語られているように、数学を学ばなくても我々は「極限をとる」操作をして概念を捻くり出すことを自然に行なってしまうことには説得力がある（「数え切れない」という概念から「数えきることができない」という概念を作ってしまうように)。

数学をしていても、数学をしていなくても、我々は今問題にしている概念が「もしかしたら何かの極限となっていると考えたらどうか」と言う疑問はもっと皆が持つべきものだと私は思っている。

「無限という概念は非可述なので本質的に理解不可能だ」と素朴な発言をする前に、「理

[*3] ウルトラフィルターの集合に適当な位相を入れた時の開かつ閉な集合の成す集合族

解不可能」という概念の可述性について疑うべきだ。それは「理解できていない」という概念の極限ではあるまいか。「理解できる」という言葉の意味が「数える」という言葉と同程度に理解しやすい、という相当無茶な仮定をしたとしても、「理解不可能」という言葉が「無限」より理解しやすいとは思えない。

その他社会的な文脈でも、「公平という状態は実現不可能なので、それを目指すべき、というのは倫理学的に不可能だ（不可能なことを目指すことはできない）」みたいな議論（とても単純化した藁人形なので、こんな議論をする人間はいないかもしれないが）は、やはりどこかである領域とその領域に極限を加えて存在物を増やした領域を混同する過誤を犯しているように見える。

またここでも一方を基底とすれば他方が極限と見なせ、他方を基底と見なせば一方を極限と見なせる、という状況が成立しうる。

「こういう科学理論が使えるっぽいから、こういう形而上学がいいんじゃないだろうか」ならともかく「こういう形而上学がいいから、こういう科学理論がいいんじゃないだろうか」みたいな議論をしないように気をつけたい（これも藁人形である）。

3.3.4　スキーム：関手としての空間

スキームの圏を考えると、環の圏においては様々な環や体上の代数として（場合によっては係数拡大をすることにより）環を見直すことができる。すると、$\mathbb{R}$ 上の代数として見た場合と $\mathbb{C}$ 上の代数として見た場合、スキームとしての点は前者では $\mathbb{R}$ への準同型写像であり、後者では $\mathbb{C}$ への準同型写像となるので、それぞれ異なるものができる。

つまり代数多様体を真面目に考えると、それがどんな点を持っているか状況によって変わってしまうのだ。

簡単な例で考えてみよう。例えば実平面上の円 $S : x^2 + y^2 = 1$ を考えているとする。この時、この図形を複素数上で考えたいと思うことがある。しかし、これを複素数で考えたらこれは違う図形になってしまうのだろうか。定義式は見た目上変わらないのに。

ならば、この式の解を実数上で考えた時の点集合を $S(\mathbb{R})$ と書き、複素数上で考えた時の点集合を $S(\mathbb{C})$ と書けばどうだろう。これはつまり図形を環の圏から集合の圏への関手として捉えようというやり方である。

空間の点とは様々な物差しを空間に当ててやって初めて浮かび上がってくるもので、どんな物差しを与えるかによって変わるものなのである。

そしてどれか正解の物差しが一つある、という状況ばかりではない（絶対数学や絶対スキームなどの考え方はたった一つの正解の物差しを作ろうというプロジェクトで、もしそういうものがあったら便利なのは確かだが、絶対あるとは先んじて保証があるわけではない）。

このような柔軟な考え方が可能なのも、点よりも先に空間が存在すると考えることの利得である。

3.3.5　実体概念から関数概念へ

これは現代数学の大きな流れの一端である。

数学において、空間そのものよりも、空間の上の関数のなす代数を考えて、そこから

様々な不変量を取り出すことで、空間について分析しようとする潮流があるのだ。

空間が何でできているのかは全くわからないが、空間の上で生起する様々な出来事（関数、または関係）ならばおぼろげにわかる。ならばそちらからアプローチする方が実りがあるというわけだ。

これは先に語った、空間認識の現象学的反省とも一致する。空間よりも空間での出来事（関数または関係）を観測する方が先なのだ。

そしてこの流れを２０世紀初めに、フレーゲの述語論理や物理の相対性理論や数学の公理的方法論の中にいち早く読み取って、認識論の問題として取り上げたのがカッシーラーの『実体概念と関数概念』（ [10]）なのだと個人的には考えている。

集合論と圏論などという乱暴な区分けをする人も時にはいるが、例えば公理的集合論は集合の宇宙自体を直接語るのではなく、その宇宙で生起する様々な論理式の側に注目しているので明らかに、実体概念ではなく関数概念側の仕事である。

ジェネリック・タイプの議論と集合論のジェネリック拡大が似ているのも当然である（ここでのジェネリック・タイプは存在することはほぼ当然のもので、それを道具に目的の空間を調べるものであるのに比べ、集合論でのジェネリック拡大は存在を頑張って探さなくてはいけない、それ自体が目的であるものだという重点の大きな違いがあるが)。

3.3.6 空間が先で点が後なら、点をあとからでも増やせる

今回紹介したタイプという概念は実は定義可能集合（論理式で定義可能な構造の部分集合）のなすブール代数のフィルターであり、完全タイプは先ほども登場したウルトラフィルターに対応している。

順序集合のフィルターを、順序の向きを逆にした双対概念がイデアルである。フィルターとイデアルが対応すると言う結果は、そう言う意味では自然なものである。

ウルトラフィルターはブール代数から $2 = \{0, 1\}$ すなわち $\Omega = \{\text{ 真}, \text{偽 }\}$ への射である。すると先ほどの代数閉体のジェネリックタイプは、点が全ての代数的集合（この場合は有限集合）に対して「入ってないよ」と主張する関数に対応している。つまりあらゆる特定の関係を満たさない点であるので、ジェネリック（一般的）な点であるのだ。

これはモデル理論その他で使われるウルトラプロダクトでウルトラフィルターが使われる理由と同じである。ウルトラプロダクトもいくつものモデルからジェネリックな性質を持つモデルを作るのに使われたり、ジェネリックな性質を持つ元を持つモデルを作るために使われたりするのだ。

このようにモデル理論を使えば、存在が可能だけど今は実現されていない点を関数や関係から増やすことができる。

ではそれでも足りなかったらどうするのか。モデル理論では関数や関係は固定して考えるが、数学においてはいざとなったら新しい関数や関係を持ち込めばいい。

それを行うのがグロタンディーク・トポロジーである（詳しくは [8] を参照)。

グロタンディーク・トポロジーでは開集合の定義から部分集合であることを取り除いて射へと一般化する。ザリスキー位相では開集合が足りないと思えば、ザリスキー開集合の代わりにエタール射という単射ではない射をまるで開集合のようにみなして、エタール・トポロジーなどを構成したりする。

すると当然、新しいトポロジーで点はどうなっているのだろうか、という疑問が起こる。

エタール・トポロジーでは点は増えないが、元の空間よりも点が増えてしまうグロタンディーク・トポロジーは実際あるのだ。p 進体において解析幾何の類似を行うリジッド幾何などではそのような手法を使うと聞く。

点が足りないなら加えてしまえばいいのだ。

これも空間が先で、点が後、という観点がもたらした空間概念の柔軟性から来ている。

3.3.7 点のない世界に向けて

今回はすでに点のある空間に対して点を加えたりしたが、本当に点のない空間も我々はそろそろ相手にしないといけない潮時が来ている。

それは量子力学に現れる非可換な作用素代数を何らかの空間の関数環だと考えた時に現れるような空間である。このような空間を対象とする幾何を非可換幾何や量子幾何と呼ぶ（ [9] に例がある)。

またヒルベルト空間の閉部分空間のなす束を論理とみなしたものを量子論理と呼ぶが、この量子論理の束には一般に $2 = \{0, 1\}$ への準同型*4がないという結果がある（ [11] 参照*5)。これは量子力学の観測命題に対して、全てに真と偽とを割り振ることはできないことを意味しているが、これもある種「点がない」ことを主張する定理とも考えられる*6。

素朴な議論ではここから、量子力学における「実在」に対して疑義が表明されて来た歴史がある。しかし「実在」というのもかなり「極限の匂い」のする概念である。

数学的には例えば、従来の議論が通用する可換な部分対象を調べ、その性質をうまく合計したものを分析しようとして来たり、点の概念を弱めた「点」の概念を持ち出して、分析したりしている。

これは引き戻せばどういう「実在」ならばうまく現実に対応できるかを調べているように見える。

将来我々は「実在」という言葉を捨てるかもしれない、「実在」という言葉の周囲に現在の我々とはずいぶん違う信念のネットワークを張りめぐらせるかもしれないが、「実在」にどんな意味を持たせるにせよ、それらが織りなす世界像は、それにより今よりももっと色々なことが分かり色々なことができるようになるものだと私は信じている。

我々は世界が何でできているのか全くわからないのに、世界の構造について語らなくてはいけない。そのためには世界が何でできているのかの前に、世界の構造について語らなくてはいけない（小山虎氏が何かの折に話していた話し。出典は個人的記憶)。世界の構造についての様々な仮説と検証の中から、うっすらと世界が何でできているのかが浮かび上がってくる。これは素朴な形而上的議論とは逆の方向だ。

そういう状況に対応する手法が数学の内部で育って来ていると考えても面白いかもしれ

*4 **素フィルター**というものに対応する。ブール代数では素フィルターとウルトラフィルター（極大フィルター）は一致するし、分配的な束ではウルトラフィルターは素フィルターである（環論のイデアルと同じように)。しかし量子論理の束は分配的ではないので、ウルトラフィルターはかならずしも素フィルターではない。

*5 ただしこの本の証明は間違っている上に、3 次元以上の Hilbert 空間と書かれているが、2 次元以上の Hilbert 空間で成り立つらしい。詳しくは古賀実氏に。

*6 [13] では通常のフィルターよりも条件を強めたものを「point」と名付け、それが一般には存在しないことが示されている。また、この論文では素フィルターではないウルトラフィルターが「十分にあること」を示していて、ウルトラフィルターのことを「quasipoint」と呼んでいる。ここも古賀実氏の指摘による。

ない。

参考文献

[1] 板井昌典, 『幾何的モデル理論入門』, 日本評論社, 2002.
[2] Sacks, G.E., *Saturated Model Theory, Second Edition*, World Scientific, 2010
[3] Hartshorne, R./高橋宣能／松下大介 訳, 『代数幾何学』, シュプリンガーフェアラーク東京, 2004.
[4] van der Waerden, B. L./前田博信 訳, 『代数幾何学入門』, シュプリンガーフェアラーク東京, 1991.
[5] Poizat, B., *Stable Groups*, American Mathematical Society, 1987.
[6] 穴井宏和／横山和弘, 『QE の計算アルゴリズムとその応用』, 東京大学出版会, 2011.
[7] Vickers, E., *Topology Via Logic*, Cambridge University Press, 1989.
[8] MacLane, S.,Moerdijk, I., *Sheaves in Geometry and Logic*, Springer, 1992.
[9] 生西明夫／中神祥臣, 『作用素環入門』, 岩波書店, 2007.
[10] Cassirer, E./山本義隆 訳, 『実体概念と関数概念』, みすず書房, 1979.
[11] Redei, M., *Quantum Logic in Algebraic Approach*, Springer, 1998.
[12] Lakoff, G., Núñes, R.E./植野義明／重光由加 訳, 『数学の認知科学』, 丸善出版, 2012.
[13] Doering, A, *Stone spectra of von Neumann algebras and foundations of quantum theory*, `http://inspirehep.net/record/674107/files/`, 2004

第 4 章

圏論的集合論——集合圏の特徴付け

古賀 実, 才川隆文

本稿では，Gerhard Osius の論文 “Categorical set theory” [5] に基づいて，1970 年代の圏論的集合論と，その圏論的道具立てについてまとめる．圏論的集合論を調べる方法として，（初等）トポスの理論を扱う．トポスの理論が如何なる意味で集合論と対応するのかを明確にするため，ZF 集合論と equiconsistent なトポスの理論の拡大を与える．

前提知識としては，『集合論—独立性証明への案内』 [1],『圏論の基礎』 [2] や『Sheaves in Geometry and Logic（SGL）』 [4] の第 IV 章程度までの基本的な内容を想定している．

4.0　導入

トポスの理論は ZF 集合論に比べて貧弱であるため, まずは弱い集合論 Z_0 を導入する．Z_0 集合論とは，外延性，空集合，対・冪集合・和集合の存在，論理式が Δ_0 であるものに制限された内包性公理図式と基礎の公理からなる集合論である．Z_0 集合論のモデルは，集合を対象とし関数を射とすると well-pointed トポスになる．そこで，well-pointed トポスから集合論のモデルを作ることを考える．所属関係の定義が必要になるが，トポスの理論には所属関係が無い．集合論において推移的集合の元はまたその集合の部分集合でもあることと，トポスの理論では部分対象が記述できることに着目して，所属関係を部分対象を経由して定義することを考える．そのために，推移的集合の圏論的特徴づけを調べ，トポスの理論においてこの性質を満たす推移的集合対象なるものを定義する．こうして，推移的集合対象と部分対象の組（集合対象）の間に「所属関係」が定義される．集合対象と「所属関係」を集合論の集合と所属関係として解釈することで, well-pointed トポス内で集合論のモデルをつくる．このモデルは Z_0 のモデルとなることがわかる．さらに，well-pointed トポスにある適当な公理（任意の対象は部分的に推移的）を付け加えた理論（ETS(Z)）を考えると，Z_0 に推移的集合に関する 2 つの公理（cf. 公理 4.4.6 と公理 4.4.8）を付け加えた理論 Z（cf. 定義 4.4.10）と equiconsistent となることが示される．すなわち，集合論 Z の圏論的特徴付けが与えられる．

この結果はさらに ZF に拡張される．ETS(Z) に，無限公理に対応するものとして自然数対象の存在公理を加え，置換公理図式に対応する公理図式を付け加えたトポスの理論 ETS(ZF) を考えると，ZF 集合論とトポスの理論 ETS(ZF) の間の equiconsistency が得られる．選択公理も同様に扱うことができ，集合論の圏論的特徴付けが与えられる．

4.1　公理的集合論

古典の一階述語論理で形式化された，公理的集合論について述べる．2 項述語記号は，等号 $=$ と所属関係 $\in$ とする．

公理 4.1.1 (外延性)

$$\forall s \forall t[\forall x(x \in s \iff x \in t) \implies s = t]. \qquad \square$$

公理 4.1.2 (空集合) 空集合が存在する：

$$\exists z \forall x[\neg(x \in z)]. \qquad \square$$

公理 4.1.3 (対) 任意の集合 x, y に対して，対 $\{x, y\}$ が存在する：

$$\forall x \forall y \exists z \forall t[t \in z \iff (t = x \vee t = y)]. \qquad \square$$

公理 4.1.4 (冪集合) 任意の集合 x に対して，「冪集合」$y = \mathcal{P}(x)$ が存在する：

$$\forall x \exists y \forall z[z \in y \iff \forall t(t \in z \implies t \in x)]. \qquad \square$$

公理 4.1.5 (和集合) 任意の集合 X に対して，「和集合」$U = \bigcup X$ が存在する：

$$\forall X \exists U \forall u[u \in U \iff \exists z(z \in X \wedge u \in z)]. \qquad \square$$

定義 4.1.6 ($\boldsymbol{\Delta_0}$ 論理式) 集合論の言語の論理式 φ が Δ_0 であるとは，φ における量化の出現がすべて，所属関係（$\in$）によって制限された形をしていること，すなわち $\forall y(y \in z \implies \dots), \exists y(y \in z \wedge \dots)$ という形であることを言う． $\Diamond$

公理 4.1.7 (制限された内包性図式) φ は Δ_0 論理式であって，変数 y を自由変数に持たないものとする．このとき次の論理式の全称閉包は公理である：

$$\exists y \forall x[x \in y \iff x \in z \wedge \varphi]. \qquad \square$$

事実 4.1.8 空集合公理を満たす集合（空集合）は唯一つだけ存在する． $\square$

証明 z と z' を共に空集合とする．このとき，

$$\forall x[x \in z \iff x \in z']$$

である．外延性公理より，$z = z'$ を得る． $\blacksquare$

記法 4.1.1 事実 4.1.8 により保証される唯一つの空集合を $\emptyset$ と書く．さらに，以下の記法を導入する[*1]：

(i) $x \subseteq y \equiv \forall z(z \in x \implies z \in y)$;
(ii) $\{x\} \equiv \{x, x\}$;
(iii) $\langle x, y\rangle \equiv \{\{x\}, \{x, y\}\}$;
(iv) $x \cup y \equiv \bigcup\{x, y\}$;
(v) $x \cap y \equiv \{z \in x \mid z \in y\}$;
(vi) $x \setminus y \equiv \{z \in x \mid \neg(z \in y)\}$. ◊

公理 4.1.9 (基礎) 所属関係は整礎である：

$$\forall x[x \neq \emptyset \implies \exists y \in x(x \cap y = \emptyset)]. \qquad \square$$

定義 4.1.10 理論 Z_0 を，外延性，空集合，対，冪集合，和集合，制限された内包性図式，基礎の公理を公理系として持つ理論として定める． ◊

定理 4.1.11 理論 Z_0 は有限公理化可能である．すなわち, Z_0 から制限された内包性図式と和集合公理を除き, 次の公理 4.1.12 から公理 4.1.16 を加えた理論を Z_0' とすると, Z_0 と Z_0' は同値である：

公理 4.1.12 (差集合) 任意の集合 x, y に対して，差集合 $x \setminus y$ が存在する：

$$\forall x \forall y \exists z \forall t[t \in z \iff (t \in x \land \neg(t \in y))]. \qquad \square$$

公理 4.1.13 (直積集合) 任意の集合 x, y に対して，直積 $x \times y$ が存在する：

$$\forall x \forall y \exists z[\forall w(w \in z \iff \exists s \exists t(w = \langle s, t\rangle \land s \in x \land t \in y))]. \qquad \square$$

公理 4.1.14 (所属関係の制限) 任意の集合 x に対して，所属関係の制限

$$\mathrm{Mem}(x) := \{\langle s, t\rangle \mid s \in t \in x\}.$$

が存在する：

$$\forall x \exists y \forall z[z \in y \iff \exists s \exists t(s \in t \land t \in x \land z = \langle s, t\rangle)]. \qquad \square$$

公理 4.1.15 (定義域) 任意の集合 x に対して，x の定義域

$$\mathrm{Dom}(x) := \{z \mid \exists t\langle z, t\rangle \in x\}$$

が存在する：

$$\forall x \exists y \forall z[z \in y \iff \exists t(\langle z, t\rangle \in x)]. \qquad \square$$

公理 4.1.16 (並び替え) 任意の集合 x に対して，次の「x を並び替えた集合」

(i) $\mathrm{Sym}(x) := \{\langle s, t\rangle \mid \langle t, s\rangle \in x\}$,

[*1] $\equiv$ は，記号列として等しいことを表す．

(ii) $\mathrm{Rot}(x) := \{\langle\langle s,t\rangle,u\rangle \mid \langle\langle t,u\rangle,s\rangle \in x\}$

が存在する：

(Sym) $\forall x \exists y \forall z[z \in y \iff \exists s \exists t(\langle t,s\rangle \in x \wedge z = \langle s,t\rangle)]$;
(Rot) $\forall x \exists y \forall z[z \in y \iff \exists s \exists t \exists u(\langle\langle t,u\rangle,s\rangle \in x \wedge z = \langle\langle s,t\rangle,u\rangle)]$. □

定理 4.1.11 の証明のためにいくつかの補題を用意する．これらの補題は Z_0' で証明する．

記法 4.1.2 直積と順序対について以下の記法を導入する．

$$\langle x\rangle := x;$$
$$\langle x,y\rangle := \{\{x\},\{x,y\}\};$$
$$\langle x,y,\dots,z\rangle := \langle x,\langle y,\dots,z\rangle\rangle.$$
$$x \times y \times \cdots \times z := x \times (y \times \cdots \times z).$$ ◊

補題 4.1.17 任意の集合 x, y に対して，その二項共通部分集合 $x \cap y$ が存在する． □

証明 $x \cap y := x \setminus (x \setminus y)$ とすればよい． ■

補題 4.1.18 任意の集合 x に対して，その和集合 $\bigcup x$ が存在する． □

証明 $\bigcup x := \mathrm{Dom}(\mathrm{Mem}(x))$ とすればよい． ■

次の補題によって, 少し変形した内包性図式を示す.

記法 4.1.3 φ を論理式とし, その自由変数は $x_0,\dots,x_n,z_0,\dots,z_n$ に含まれるものとする．X を変数 $x_0,\dots,x_n$ 一つずつと順序対記号からなる項, Z を変数 $z_0,\dots,z_n$ 一つずつと二項直積記号と括弧からなる項とする．さらに, X に出現する順序対 $\langle u,v\rangle$ を直積 $(u \times v)$ に全て置き換え, 全ての i について x_i を z_i で置き換えて得られる項は, Z に等しいものとする．[*2]

このとき

$$\{X \in Z \mid \varphi\}$$

と書いて, 以下の条件を満たすクラスを表す：

$$\forall z_0 \dots \forall z_n \forall w[w \in \{X \in Z \mid \varphi\} \iff \exists x_0 \in z_0 \dots \exists x_n \in z_n\ X = w \wedge \varphi].$$ ◊

補題 4.1.19 φ は Δ_0 論理式であって, 自由変数が $x_0,\dots,x_n,z_0,\dots,z_n$ に含まれるものとする．このとき $\{\langle x_0,\dots,x_n\rangle \in z_0 \times \cdots \times z_n \mid \varphi\}$ は集合である．すなわち次がなりたつ．

$$\forall z_0 \dots \forall z_n \exists y \forall w[w \in y \iff \exists x_0 \in z_0 \dots \exists x_n \in z_n \langle x_0,\dots,x_n\rangle = w \wedge \varphi].$$ □

[*2] このような X, Z の組の例として，$X = \langle x_0,\dots,x_n\rangle, Z = z_0 \times \cdots \times z_n$ とか，$X = \langle\langle x_2,x_3\rangle,\langle x_0,x_1\rangle\rangle, Z = (z_2 \times z_3) \times (z_0 \times z_1)$ がある．一方，$X = \langle x_0,x_1\rangle, Z = z_1 \times z_0$ や $X = \langle x_0,x_1,x_2\rangle (= \langle x_0,\langle x_1,x_2\rangle\rangle), Z = (z_0 \times z_1) \times z_2$ などは例ではない．

証明 以下の条件を満たす Δ_0 論理式の全体を Φ とする：

- 論理記号として $\exists, \wedge, \neg$ のみが出現する．
- 述語記号として $\in$ のみが出現する．
- 反射的な所属関係の出現 $u \in u$ がない．

このとき外延性公理のもとで，任意の Δ_0 論理式は Φ の中のいずれかの論理式と同値である．これは $u \in u$ が $\exists t \in u\ t = u$ と同値であることと，$u = v$ が外延性によって $\forall t \in u\ t \in v \wedge \forall t \in v\ t \in u$ と同値であることからわかる．よって以下では φ は Φ に含まれるものとして進める．

φ の構造について帰納法を行う．$z_0, \ldots, z_n$ を固定し，y を構成する．

- $\varphi \equiv \neg\psi$ のとき．帰納法の仮定によって集合
$$u := \{\langle x_0, \ldots, x_n\rangle \in z_0 \times \cdots \times z_n \mid \psi\}$$
が得られるので，$(z_0 \times \cdots \times z_n) \setminus u$ を y とすればよい．
- $\varphi \equiv \psi \wedge \theta$ のとき．帰納法の仮定によって集合
$$u := \{\langle x_0, \ldots, x_n\rangle \in z_0 \times \cdots \times z_n \mid \psi\}$$
と
$$v := \{\langle x_0, \ldots, x_n\rangle \in z_0 \times \cdots \times z_n \mid \theta\}$$
が得られるので，$u \cap v$ を y とすればよい．
- $\varphi \equiv \exists x' \in z' \psi$ のとき．帰納法の仮定によって集合
$$u := \{\langle x', x_0, \ldots, x_n\rangle \in z' \times z_0 \times \cdots \times z_n \mid \psi\}$$
が得られるので，$\mathrm{Dom}(\mathrm{Sym}(u))$ を y とすればよい．
- $\varphi \equiv x_k \in x_l$ のとき．
$$X := \langle x_0, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_{l-1}, x_{l+1}, \ldots, x_n\rangle$$
$$Z := z_0 \times \cdots \times z_{k-1} \times x_{k+1} \times \cdots \times x_{l-1} \times x_{l+1} \times \cdots \times x_n$$
とする．集合
$$u := (\mathrm{Mem}(z_l) \cap (z_k \times z_l)) \times Z$$
を考えると，
$$u = \{\langle\langle x_k, x_l\rangle, X\rangle \in (z_k \times z_l) \times Z \mid x_k \in x_l\}$$
である．$(z_k \times z_l) \times Z$ を $z_0 \times \cdots \times z_n$ に合わせるため，u に並び換えを適当に適用したものを y とすればよい．
- $\varphi \equiv z_k \in z_l$ のとき．
$$z_0 \times \cdots \times z_{k-1} \times \left(\bigcup(\{z_k\} \cap z_l)\right) \times z_{k+1} \times \cdots \times z_n$$
を y とすればよい．
- $\varphi \equiv x_k \in z_l$ のとき．$z_0 \times \cdots \times z_{k-1} \times (z_k \cap z_l) \times z_{k+1} \times \cdots \times z_n$ を y とすればよい．

- $\varphi \equiv z_k \in x_l$ のとき.

$$z_0 \times \cdots \times z_{l-1} \times (\mathrm{Dom}(\mathrm{Sym}(\mathrm{Mem}(z_l) \cap (\{z_k\} \times z_l)))) \times z_{l+1} \times \cdots \times z_n$$

を y とすればよい. ■

証明 (定理 4.1.11 の証明) Z_0' で制限された内包性図式と和集合公理がなりたつことを示す. 和集合公理については, 既に補題 4.1.18 で示した. 内包性図式について, φ を Δ_0 論理式であって, その自由変数が $x, z, v_0, \ldots, v_n$ に含まれ, いずれも y ではないものとする. このとき次の論理式がなりたつことを示せばよい.

$$\forall v_0 \ldots \forall v_n \exists y \forall x [x \in y \iff x \in z \wedge \varphi].$$

補題 4.1.19 より, 任意の $w_0, \ldots, w_n$ について, 集合

$$u := \mathrm{Dom}(\{\langle x, v_0, \ldots, v_n \rangle \in z \times \{w_0\} \times \cdots \times \{w_n\} \mid \varphi\})$$

が得られ, 次を満たす：

$$\forall x [x \in u \iff x \in z \wedge \varphi'].$$

ただし φ' は φ での $v_0, \ldots, v_n$ の自由な出現を $w_0, \ldots, w_n$ に置き換えた式である. $w_0, \ldots, w_n$ は任意であったので,

$$\forall w_0 \ldots \forall w_n \exists u \forall x [x \in u \iff x \in z \wedge \varphi']$$

が得られた. 束縛変数を変えれば所望の論理式が得られる. ■

通常の ZF 集合論を得るためには，Z_0 に次の公理を付け加えればよい：

公理 4.1.20 (無限) 無限集合 ω が存在する：

$$\exists \omega [\emptyset \in x \wedge \forall x (x \in \omega \implies x \cup \{x\} \in \omega)].$$ □

公理 4.1.21 (置換図式) φ は論理式であって, 変数 B を自由変数に持たないものとする. このとき次の論理式の全称閉包は公理である：

$$\forall A \exists B [\forall x \in A (\exists y \varphi \implies \exists y (y \in B \wedge \varphi))].$$ □

4.2 初等トポスの理論

圏を一階の理論 CAT として記述する [2, 付録　基礎論].

定義 4.2.1 (圏) 圏 $\mathbf{C}$ は次のものからなる：

対象と射　対象（object）$A, B, C, \ldots$ のクラス $\mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ と射（morphism）$f, g, h, \ldots$ のクラス $\mathrm{Mor}(\mathbf{C})$；

ドメインとコドメイン　2 つの単項演算子・ドメイン（domain）dom とコドメイン（codomain）cod：

$$\begin{aligned} \mathrm{dom} : \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Obj}(\mathbf{C}), \quad & f \mapsto \mathrm{dom}(f), \\ \mathrm{cod} : \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Obj}(\mathbf{C}), \quad & f \mapsto \mathrm{cod}(f). \end{aligned}$$

射 f に対し，$\mathrm{dom}(f) = A$, $\mathrm{cod}(f) = B$ であるとき，$f : A \to B$ と書く；

恒等射　単項演算子

$$\mathrm{id} : \mathrm{Obj}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathbf{C}), \quad A \mapsto \mathrm{id}_A;$$

合成射　部分クラス

$$\mathrm{Mor}(\mathbf{C})\times_{\mathrm{Obj}(\mathbf{C})}\mathrm{Mor}(\mathbf{C}) := \{\langle g, f\rangle \mid g, f \in \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \quad \text{and} \quad \mathrm{dom}(g) = \mathrm{cod}(f)\}$$

上の二項演算子・**合成**

$$\circ : \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \times_{\mathrm{Obj}(\mathbf{C})} \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathbf{C}),\ \langle g, f\rangle \mapsto (g \circ f) : \mathrm{dom}(f) \to \mathrm{cod}(g).$$

$g \circ f$ を単に gf と書くことがある；

$\langle \mathrm{Obj}(\mathbf{C}), \mathrm{Mor}(\mathbf{C}), \mathrm{id}, \circ\rangle$ は次の公理を満たす：

結合律　任意の $\langle g, f\rangle, \langle h, g\rangle \in \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \times_{\mathrm{Obj}(\mathbf{C})} \mathrm{Mor}(\mathbf{C})$ に対して，

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f;$$

恒等律　任意の射 $f : A \to B$ と $g : B \to C$ に対して，

$$\mathrm{id}_B \circ f = f \quad \text{and} \quad g \circ \mathrm{id}_B = g. \qquad \Diamond$$

定義 4.2.2 (モノ射・エピ射・同型射) 圏 $\mathbf{C}$ の射 $m : A \to B$ が**モノ射**（monomorphism）であるとは，任意の 2 つの射 $h, k : X \to A$ に対して，$mh = mk$ ならば $h = k$ が成立することを指す．モノ射 $m : A \to B$ を $m : A \rightarrowtail B$ と書くことがある．

圏 $\mathbf{C}$ の射 $e : A \to B$ が**エピ射**（epimorphism）であるとは，任意の 2 つの射 $h, k : B \to X$ に対して，$he = ke$ ならば $h = k$ が成立することを指す．エピ射 $e : A \to B$ を $e : A \twoheadrightarrow B$ と書くことがある．

圏 $\mathbf{C}$ の射 $i : A \to B$ が同型射（isomorphism）であるとは，射 $j : B \to A$ であって $j \circ i = \mathrm{id}_A$ かつ $i \circ j = \mathrm{id}_B$ を満たすものが存在することを指す．同型射 $i : A \to B$ が存在するとき，A と B は**同型**であるといい，$A \cong B$ と書く． $\Diamond$

定義 4.2.3 (引き戻し・押し出し) 2 つの射 $f : A \to C$ と $g : B \to C$ に対して，対象 P と 2 つの射 $\pi_1 : P \to A$ と $\pi_2 : P \to B$ が f の g による（或いは，g の f による）**引き戻し**（pullback）であるとは，$f\pi_1 = g\pi_2$ でありかつ，任意の 2 つの射 $h : X \to A$ と $k : X \to B$ に対して，$fh = gk$ ならば $\pi_1 u = h$ かつ $\pi_2 u = k$ を満たす唯一つの射 $u : X \to P$ が存在することを指す．このとき，次は引き戻し正方図式であるという：

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & B \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"'] & C.
\end{tikzcd}$$

2 つの射 $f : A \to B$ と $g : A \to C$ に対して，対象 P と 2 つの射 $\iota_1 : B \to P$ と $\iota_2 : C \to P$ が f の g による（或いは，g の f による）**押し出し**（pushout）であるとは，$\iota_1 f = \iota_2 g$ でありかつ，任意の 2 つの射 $h : B \to X$ と $k : C \to X$ に対して，$hf = kg$ ならば $u\iota_1 = h$ かつ $u\iota_2 = k$ を満たす唯一つの射 $u : P \to X$ が存在することを指す．この

とき，次は押し出し正方図式であるという：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.o.}"] & C \arrow[d, "\iota_2"] \\ B \arrow[r, "\iota_1"'] & P. \end{tikzcd}$$

◊

定義 4.2.4 (初等トポス（ET）) 初等トポス（elementary topos）の理論 ET は，CAT に以下の公理系を加えたものである：

始対象・終対象　始対象 0 と終対象 1 がある．すなわち，2 つの単項演算子

$$\cdot^0 : \mathrm{Obj}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathbf{C}), \quad A \mapsto A^0 : 0 \to A,$$
$$! : \mathrm{Obj}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathbf{C}), \quad A \mapsto !^A : A \to 1$$

が存在し，A^0 は 0 をドメインとする唯一の射，$!^A$ は 1 をコドメインとする唯一つの射である；

引き戻し・押し出し　部分クラス

$$\mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \times_C \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) := \{\langle f, g\rangle \mid f, g \in \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \quad \text{and} \quad \mathrm{cod}(f) = \mathrm{cod}(g) = C\}$$

上の二項演算子

$$\pi_1 : \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \times_C \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathbf{C}), \quad \langle f, g\rangle \mapsto \pi_1(f, g),$$
$$\pi_2 : \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \times_C \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathbf{C}), \quad \langle f, g\rangle \mapsto \pi_2(f, g),$$
$$\mathrm{pb} : \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \times_C \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Obj}(\mathbf{C}), \quad \langle f, g\rangle \mapsto \mathrm{pb}(f, g)$$

が存在し，次の引き戻し正方図式を与える：

$$\begin{tikzcd} \mathrm{pb}(f,g) \arrow[r, "\pi_2(f,g)"] \arrow[d, "\pi_1(f,g)"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C. \end{tikzcd}$$

さらに，部分クラス

$$\mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \times_A \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) := \{\langle f, g\rangle \mid f, g \in \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \quad \text{and} \quad \mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g) = A\}$$

上の二項演算子

$$\iota_1 : \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \times_A \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathbf{C}), \quad \langle f, g\rangle \mapsto \iota_1(f, g),$$
$$\iota_2 : \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \times_A \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathbf{C}), \quad \langle f, g\rangle \mapsto \iota_2(f, g),$$
$$\mathrm{po} : \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \times_A \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Obj}(\mathbf{C}), \quad \langle f, g\rangle \mapsto \mathrm{po}(f, g)$$

が存在し，次の押し出し正方図式を与える：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.o.}"] & C \arrow[d, "\iota_2(f,g)"] \\ B \arrow[r, "\iota_1(f,g)"'] & \mathrm{po}(f,g); \end{tikzcd}$$

指数対象　各対象 A に対して，単項演算子

$$(-)^A : \mathrm{Obj}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Obj}(\mathbf{C}), \quad B \mapsto B^A$$

が存在し，各対象 A, B に対して，射

$$\mathrm{ev}_{A,B} : B^A \times A \to B$$

で，次を満たすものが存在する：任意の射 $f : C \times A \to B$ に対して，唯一つの射 $\hat{f} : C \to B^A$ が存在して，$f = \mathrm{ev}_{A,B} \circ (\hat{f} \times \mathrm{id}_A)$ が成立する：

$$\begin{tikzcd} C \times A \arrow[d, "\hat{f}\times\mathrm{id}_A"'] \arrow[dr, "f"] & \\ B^A \times A \arrow[r, "\mathrm{ev}_{A,B}"'] & B. \end{tikzcd}$$

ここで，$A \times B$ は A と B の二項直積であり，$\langle 1, !, \pi_1, \pi_2, \mathrm{pb} \rangle$ によって与えられる：

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "\pi_2(!^A,!^B)"] \arrow[d, "\pi_1(!^A,!^B)"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & B \arrow[d, "!^B"] \\ A \arrow[r, "!^A"'] & 1. \end{tikzcd}$$

また，$\hat{f}$ を f の exponential transpose と呼ぶ.

部分対象分類子　モノ射 $\mathrm{true} : 1 \rightarrowtail \Omega$ で次を満たすものが存在する：各モノ射 $m : B \rightarrowtail A$ に対し，次を引き戻し正方図式とする唯一つの射 $\chi(m) : A \to \Omega$ が存在する：

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "!^B"] \arrow[d, tail, "m"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & 1 \arrow[d, tail, "\mathrm{true}"] \\ A \arrow[r, "\chi(m)"'] & \Omega. \end{tikzcd}$$

ここで，対象 Ω は**真理値対象**（truth value object），モノ射 $\mathrm{true} : 1 \rightarrowtail \Omega$ は**部分対象分類子**，$\chi(m)$ は m の classifying morphism と呼ばれる.　◊

定義 4.2.5 (部分関数) 射 $f : B \to A$ とモノ射 $m : B \rightarrowtail C$ の組 (m, f) を，B から A への**部分関数**（partial map）という.　◊

事実 4.2.6 (部分関数分類子 [3, Theorem 1.26]) 任意の対象 A に対して，**部分関数分類子**（partial map classifier）j_A が存在する．すなわち，A への部分関数 $(m : B \rightarrowtail C, f : B \to A)$ に対して，次の図式を引き戻し正方図式とする唯一つの射 $\chi(m, f) : C \to \tilde{A}$ が存在する：

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "m"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & A \arrow[d, "j_A"] \\ C \arrow[r, "\chi(m,f)"'] & \tilde{A}. \end{tikzcd}$$

□

証明 まず，任意の対象 A に対して，あるモノ射 $j_A : A \rightarrowtail \tilde{A}$ が存在することを示す．対象 A と単元射 $\{\cdot\}_A$（cf. 定義 A.1）をとる．また，モノ射 $\langle\{\cdot\}_A, \mathrm{id}_A\rangle : A \rightarrowtail \Omega^A \times A$ の classifying morphsim を $\phi : \Omega^A \times A \to \Omega$ とする．さらに，ϕ の exponential tranpose を $\hat{\phi}$ とおき，$\hat{\phi}$ と id_{Ω^A} のイコライザを $e : \tilde{A} \rightarrowtail \Omega^A$ とする：

$$\begin{tikzcd} \tilde{A} \arrow[r, tail, "e"'] & \Omega^A \arrow[r, shift left, "\hat{\phi}"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{id}_{\Omega^A}"'] & \Omega^A. \end{tikzcd}$$

次の引き戻し図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mathrm{id}_A"] \arrow[d, tail, "\Delta_A"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & A \arrow[r, "!^A"] \arrow[d, tail, "\langle\{\cdot\}_A, \mathrm{id}_A\rangle"] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & 1 \arrow[d, tail, "\mathrm{true}"] \\ A \times A \arrow[r, "\{\cdot\}_A \times \mathrm{id}_A"'] & \Omega^A \times A \arrow[r, "\phi"'] & \Omega. \end{tikzcd}$$

に注意すると，

$$\phi \circ (\{\cdot\}_A \times \mathrm{id}_A) = \delta_A$$

を得る．両辺の exponential transpose をとると，

$$\hat{\phi}\{\cdot\}_A = \{\cdot\}_A$$

を得る．これは $\{\cdot\}_A$ が $\hat{\phi}$ と id_{Ω^A} をイコライズすることを意味する．よって，次を満たす射 $j_A : A \to \tilde{A}$ が唯一つ存在する：

$$\{\cdot\}_A = e \circ j_A.$$

$\{\cdot\}_A$ がモノ射であることから，j_A もモノ射である．

次に，部分関数分類子の存在を示す．A への部分関数 $(m : B \rightarrowtail C, f : B \to A)$ をとる．モノ射 $\langle m, f\rangle : B \rightarrowtail C \times A$ の classifying morphism を $\psi : C \times A \to \Omega$ と書き，その exponential tranpose を $\hat{\psi} : C \to \Omega^A$ と書く．次が引き戻し正方図式であることを示せば十分である：

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "\langle m,f\rangle"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & A \arrow[d, "\{\cdot\}_A \times \mathrm{id}_A"] \\ C \times A \arrow[r, "\hat{\psi} \times \mathrm{id}_A"'] & \Omega^A \times A. \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

実際，このとき，$\phi \circ (\hat{\psi} \times \mathrm{id}_A)$ が $\langle m, f\rangle$ の classifying morphism であることを意味するから，$\phi \circ (\hat{\psi} \times \mathrm{id}_A) = \psi$ が成立する．両辺の exponential tranpose をとると，

$$\hat{\phi} \circ \hat{\psi} = \hat{\psi}$$

を得る．これは，$\hat{\psi} : C \to \Omega^A$ が $\hat{\phi}$ と id_A をイコライズすることを意味する．従って，次を満たす射 $\tilde{f} : C \to \tilde{A}$ が唯一つ存在する：

$$\hat{\psi} = e \circ \tilde{f}.$$

さらに，射 $\tilde{f} : C \to \tilde{A}$ は次の引き戻し正方図式を与える：

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "m"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & A \arrow[d, "j_A"] \\ C \arrow[r, "\tilde{f}"'] & \tilde{A}. \end{tikzcd} \tag{4.2}$$

以下ではまず，(4.1) が引き戻し正方図式であることを示す．そのためには，次が引き戻し正方図式であることを示せばよい：

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "m"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & A \arrow[d, "\{\cdot\}_A"] \\ C \arrow[r, "\hat{\psi}"'] & \Omega^A. \end{tikzcd} \tag{4.3}$$

そこで，$h : U \to C$ と $k : U \to A$ で $\hat{\psi}h = \{\cdot\}_A k$ であるものをとる．このとき，射 $u : U \to B$ で $mu = h$ かつ $fu = k$ を満たすものが唯一つ存在することを示せば良い．等式 $\hat{\psi}h = \{\cdot\}_A k$ に対して，両辺の exponential tranpose をとると，$\psi \circ (\mathrm{id}_C \times h) = \delta_A \circ (\mathrm{id}_A \times k)$ を得る．両辺に右から $\langle k, \mathrm{id}_U \rangle$ を合成すると，

$$\psi \circ \langle k, h \rangle = \delta_A \langle k, k \rangle$$

を得る．$\delta_A \langle k, k \rangle = \mathrm{true} \circ !^U$ であるから，$\psi \langle k, h \rangle = \mathrm{true} \circ !^U$ を得る．ψ は $\langle m, f \rangle$ の classifying morphism であったから，射 $u : U \to B$ で $\langle m, f \rangle u = \langle h, k \rangle$ を満たすものが唯一つ存在する：

$$\begin{tikzcd} U \arrow[dr, dotted, "\exists ! u"] \arrow[drr, bend left, "!^U"] \arrow[ddr, bend right, "\langle h,k \rangle"'] & & \\ & B \arrow[r, "!^B"] \arrow[d, tail, "\langle m,f \rangle"] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\ & C \times A \arrow[r, "\psi"'] & \Omega. \end{tikzcd}$$

次に，図式 (4.2) における $\tilde{f}$ が引き戻し正方図式を与えることを示す．まずは，可換性 $\tilde{f}m = j_A f$ を確かめる．図式 (4.1) より，$\hat{\psi}m = \{\cdot\}_A f$ であることに注意すると，

$$e \circ \tilde{f}m = \hat{\psi}m = \{\cdot\}_A f = e \circ j_A f$$

を得る．イコライザである e はモノ射であるから，$\tilde{f}m = j_A f$ を得る．普遍性を示すために，射 $h : X \to C$ と $k : X \to A$ で $\tilde{f}h = j_A k$ を満たすものがあるとする．このとき，両辺に左から e を合成すると，

$$\{\cdot\}_A k = \hat{\psi}h$$

を得る．引き戻し正方図式 (4.1) より，射 $l : X \to B$ で $fl = h$ かつ $ml = k$ を満たすものが唯一つ存在する．以上より，図式 (4.2) は引き戻し正方図式である．

最後に，図式 (4.2) における $\tilde{f}$ が引き戻し正方図式を与えるような唯一つの射であることを示す．$\tilde{f}_1$ と $\tilde{f}_2$ が共に図式 (4.2) を引き戻し正方図式とするとする．このとき，$ej_A = \{\cdot\}_A$ に注意すると次の引き戻し図式

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "m"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & A \arrow[r, "\mathrm{id}_A"] \arrow[d, tail, "j_A"] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & A \arrow[d, tail, "\{\cdot\}_A"] \\ c \arrow[r, "\tilde{f}_i"'] & \tilde{A} \arrow[r, tail, "e"'] & \Omega^A. \end{tikzcd} \qquad (i = 1, 2)$$

が得られるが，引き戻し正方図式 (4.3) により，これは

$$e \circ \tilde{f}_1 = \hat{\psi} = e \circ \tilde{f}_2$$

を意味する．e はモノ射であるから，$\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$ である． ■

注意 4.2.7 事実 4.2.6 における，対象 A に $\tilde{A}$ を対応させる演算子 $\tilde{\ }$ は，「関手」に拡張できる．部分関数 $(m : B \rightarrowtail C, f : B \to A)$ と射 $g : A \to D$ が与えられたとき，部分関数 (j_A, g) の classifying morphism $\chi(j_A, g)$ を $\tilde{g}$ と定める：

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "m"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d, tail, "j_A"] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & D \arrow[d, tail, "j_D"] \\ B \arrow[r, "\chi(m,f)"'] & \tilde{A} \arrow[r, "\tilde{g}"'] & \tilde{D}. \end{tikzcd}$$

引き戻し図式の張り合わせに関する補題と部分関数に対する classifying morphism の唯一性から，別の射 $h : D \to E$ について，$(\widetilde{hg}) = \tilde{h}\tilde{g}$ となることがわかる． ◊

4.3　集合の成すトポスとトポス理論・EWPT

Z_0 における集合の成す圏 $\mathcal{S}_0$ は CAT のモデルであり，さらに ET のモデルでもある：

事実 4.3.1 $\mathcal{S}_0$ は始対象 0 と終対象 1 をもつ． □

証明 空集合 $0 := \emptyset$ と一元集合 $1 := \{\emptyset\}$ が，それぞれ始対象と終対象である． ■

事実 4.3.2 $\mathcal{S}_0$ は引き戻しと押し出しをもつ． □

事実 4.3.3 $\mathcal{S}_0$ は指数対象をもつ． □

事実 4.3.4 $\mathcal{S}_0$ は部分対象分類子をもつ． □

証明 写像 $\mathrm{true} : 1 \to 2 := \{0, 1\}$ が部分対象分類子である． ■

$\mathcal{S}_0$ は，ET の公理に加えて次を満たす：

事実 4.3.5 始対象 0 と終対象 1 は同型でない：$0 \ncong 1$． □

事実 4.3.6 終対象 1 が generator である． □

事実 4.3.7 包含 $\iota_1 : A \to A + 1$ は A の部分関数分類子である．特に，$\iota_1 : 1 \to 1 + 1$ は部分対象分類子である． □

事実 4.3.8 終対象 1 の部分対象は始対象 0 と終対象 1 のみである． □

選択公理を次の形で与える：

公理 4.3.9 (選択公理 (S-AC)) 全射である写像はセクションを持つ． □

$\mathcal{S}_0$ が満たす性質を抽象化して，ET に加えて次の公理系を考える．

公理 4.3.10 (非退化 (T-ND)) 始対象 0 と終対象 1 は同型でない：$0 \ncong 1$． □

公理 4.3.11 (Booleaness (T-B)) 射 $(\mathrm{true}, \mathrm{false}) : 1 + 1 \to \Omega$ が同型射である． □

公理 4.3.12 (two-valuedness (T-TV)) 終対象 1 の部分対象は始対象 0 と終対象 1 のみである. □

公理 4.3.13 (generator (T-G)) 終対象を generator としてもつ. □

定義 4.3.14 (EWPT) 理論 EWPT を

$$\mathrm{EWPT} := \mathrm{ET} + (\text{T-ND}) + (\text{T-G})$$

とし，**well-pointed** トポスの理論と呼ぶ. ◊

EWPT における有用な定理を幾つか集めておく（ET における基本的事実は付録 A 参照).

事実 4.3.15 (in EWPT) (i) 始対象でない任意の対象 A に対して，global element $1 \to A$ が存在する；

(ii) 始対象でない任意の対象 A に対して，射 $!^A$ にセクションが存在する；

(iii) 射 $f : A \to B$ がモノ射であるための必要十分条件は，任意の global element $x, y : 1 \to A$ に対して，$fx = fy$ ならば $x = y$ が成立することである；

(iv) 射 $f : A \to B$ がエピ射であるための必要十分条件は，任意の global element $y : 1 \to B$ に対して，global element $x : 1 \to A$ が存在して $fx = y$ が成立することである；

(v) 真理値対象 Ω は cogenerator である；

(vi) 射 $f : A \to B$ がエピ射であるための必要十分条件は，任意の射 $s, t : B \to \Omega$ に対して，$tf = sf$ ならば $t = s$ が成り立つことである；

(vii) 射 $f : A \to B$ がモノ射であるための必要十分条件は，任意の射 $t : A \to \Omega$ に対して，射 $s : B \to \Omega$ が存在して $sf = t$ が成立することである. □

証明 (i) 始対象でない対象 A をとる．A が始対象でないことから，単元射 $\{\cdot\}_A : A \to PA$ と射 $A \times A^0 : 0 \to A \times A$ の classifying morphism $\chi(A \times A^0)$ の exponential transpose $\chi(A \hat{\times} A)$ は異なる射である：

$$\{\cdot\}_A \neq \chi(A \hat{\times} A).$$

いま，トポスは well-pointed であるから，射 $a : 1 \to A$ で，$\{\cdot\}_A a \neq \chi(A \hat{\times} A)a$ となるものが存在する．射 a が求めるものである．

(ii) 始対象でない対象 A をとる．直和の包含射 $\iota_1, \iota_2 : A \to A + A$ をとる．$\iota_1 = \iota_2$ とすると，ι_1 の ι_2 に沿った引き戻しは再び A となるが，包含射の引き戻しは始対象を与える（cf. [4, Corollary IV.10.5]）から，これは A が始対象でないことに矛盾する．よって，$\iota_1 \neq \iota_2$ である．いま，トポスは well-pointed であるから，global element $a : 1 \to A$ で $\iota_1 a \neq \iota_2 a$ となるものが存在する．$!^A a : 1 \to 1$ は恒等射であるから，この a が求めるセクションである．

(iii) 必要性を示す．f がエピ射であるとし，global element $y : 1 \to B$ をとる．f の y

に沿った引き戻し $!^Q : Q \to 1$ をとる：

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "q"] \arrow[d, "!^Q"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & A \arrow[d, "f"] \\ 1 \arrow[r, "y"'] & B. \end{tikzcd}$$

トポスにおいてエピ射の引き戻しは再びエピ射となる（cf. [4, Proposition IV.7.3]）から，$!^Q$ はエピ射である．Q が始対象であるとき，トポスにおいてドメインを始対象とする射はモノ射だから（cf. [4, Corollary IV.7.5]），$!^Q$ はモノかつエピとなる．トポスにおいてモノかつエピである射は同型射である（cf. [4, Proposition IV.1.2]）から，$!^Q$ は同型射である．これは非退化性に矛盾する．よって，Q は始対象ではない．このとき，(ii) より，$!^Q$ にはセクション $s : 1 \to Q$ が存在する．合成射 $x := qs : 1 \to A$ が求める global element である．

十分性を示す．f がエピ射でないと仮定して矛盾を導く．このとき，$hf = kf$ かつ $h \neq k$ なる射 $h, k : B \to X$ が存在する．いま，トポスは well-pointed であるから，global element $y : 1 \to B$ で $hy \neq ky$ となるものが存在する．仮定より，global element $x : 1 \to A$ で $fx = y$ となるものが存在する．よって，$hfx \neq kfx$ を得るが，これは $hf = kf$ に矛盾する．

(iv) 十分性のみ示す．すなわち，任意の global element $x, y : 1 \rightarrowtail A$ に対して，$fx = fy$ ならば $x = y$ が成立すると仮定して，f がモノ射であることを示す．2 つの射 $h, k : X \to A$ が $fh = fk$ を満たしているとする．X が始対象であるとき $h = k$ であるから，X が始対象でないとする．任意の global element $x : 1 \rightarrowtail X$ に対して，$fhx = fkx$ である．仮定より，$hx = kx$ が任意の global element $x : 1 \rightarrowtail X$ に対して成立する．いま，トポスは well-pointed であるから，$h = k$ を得る．

(v) 射 $f, g : A \to B$ をとる．任意の射 $\chi : B \to \Omega$ に対して，$\chi f = \chi g$ であるとする．このとき，$f = g$ を示せばよい．global element $a : 1 \rightarrowtail A$ を任意にとる．fa はモノ射であるから，次の引き戻し正方図式が存在する：

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "!^1"] \arrow[d, tail, "fa"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & 1 \arrow[d, tail, "\text{true}"] \\ B \arrow[r, "\chi(fa)"'] & \Omega. \end{tikzcd}$$

仮定より，

$$\chi(fa)ga = \chi(fa)fa = \text{true} \circ !^1$$

であるから，引き戻しの普遍性より，$fa = ga$ を得る．いま，1 は generator であり，global element $a : 1 \rightarrowtail A$ は任意だったから，$f = g$ を得る．

(vi) 十分性のみ示す．射 $h, k : B \to Z$ が $hf = kf$ を満たしているとする．Ω は cogenerator だから，任意の $t : Z \to \Omega$ に対して $th = tk$ となることを示せばよい．条件 $hf = kf$ より，任意の $t : Z \to \Omega$ に対して，$thf = tkf$ であり，仮定より，$th = tk$ を得る．

(vii) 必要性は，真理値対象 Ω は入射的（cf. [4, Proposition IV.10.1]）であることによりよい．十分性を示す．(iii) を使う．global element $a, b : 1 \to A$ で $fa = fb$ を

満たすものが存在したとする．a の classifying morphism を $\chi(a)$ ととると，仮定より，射 $s_a : B \to \Omega$ で $s_a f = \chi(a)$ を満たすものが存在する．条件 $fa = fb$ より，$s_a fb = s_a fa = \chi(a)a = \mathrm{true} \circ !^1$ である．引き戻し図式

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr, dotted, "\mathrm{id}_1"] \arrow[drr, bend left, "!^1"] \arrow[ddr, bend right, "b"'] & & \\
& 1 \arrow[r, "!^1"] \arrow[d, tail, "a"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & 1 \arrow[d, tail, "\mathrm{true}"] \\
& A \arrow[r, "s_a f"'] & \Omega.
\end{tikzcd}$$

に注意すれば，$a = b$ を得る． ■

通常の ZFC 集合論を射程に入れて，ET において，無限公理と選択公理を考える．

公理 4.3.16 (選択公理 (T-ES)) 任意のエピ射はセクションを持つ．

公理 4.3.17 (自然数対象 (T-NNO)) 自然数対象が存在する．すなわち，対象 $\mathbf{N}$，射 $0 : 1 \rightarrowtail \mathbf{N}$, $s : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ で, 次を満たすものが存在する : 任意の射 $a : 1 \rightarrowtail A$ と $g : A \to A$ に対して，次の図式を可換にする唯一つの射 $f : \mathbf{N} \to A$ が存在する：

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "0"] \arrow[d, equal] & \mathbf{N} \arrow[r, "s"] \arrow[d, "f"] & \mathbf{N} \arrow[d, "f"] \\
1 \arrow[r, "a"'] & A \arrow[r, "g"'] & A.
\end{tikzcd}$$

□

次に，EWPT において，Z_0 のモデルをつくることを考える．まず，所属関係 $\in$ の圏論的記述について考察する．集合 A に対して，その元と部分集合が射 $1 \rightarrowtail A$ と $A \to 2$ にそれぞれ一対一に対応することを使う．この対応を $\bar{\cdot}$ で表すことにする．このとき，元 $x \in A$ と部分集合 $B \subseteq A$ に対して，$x \in B$ であることは，$\bar{x} : 1 \rightarrowtail A$ と $\bar{B} : A \to 2$ を用いて，次の図式の可換性で特徴づけることが出来た：

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "!^1"] \arrow[d, tail, "\bar{x}"'] & 1 \arrow[d, tail, "\mathrm{true}"] \\
A \arrow[r, "\bar{B}"'] & 2,
\end{tikzcd} \tag{4.4}$$

$$\bar{B}\bar{x} = \mathrm{true} \quad \text{iff} \quad x \in B.$$

「作業する宇宙を集合 A に局所化」した場合には，部分対象分類子をもつ ET でこの機能を実装できる．しかし，この「局所集合論」を「大域的」なものに拡大しようとする場合，次の二つの「型」に関する問題がある：

(i) Z_0 においては，「元」も「部分集合」も共に集合である一方，ET では「局所的な元」$\bar{x} : 1 \rightarrowtail A$ と「部分集合」$\bar{B} : A \to 2$ は射として異なるドメインとコドメインをもつこと；

(ii) Z_0 においては，集合 B が異なる集合 A と A' の部分集合であることができる，すなわち，$B \subseteq A$ かつ $B \subseteq A'$ が記述できる一方，ET では対応する「A における部分集合」$\bar{B} : A \to 2$ と「A' における部分集合」$\bar{B}' : A' \to 2$ は，射としては異なるものとなってしまうこと．

以上の二つの問題に対する解決方法は以下の通りである：

(i) 我々の集合を推移的なものに限定する．このとき，元 $x \in A$ も A の部分集合 $x \subseteq A$ で表現できる；

(ii) 集合 B が異なる推移的集合 A と A' の部分集合となっている場合，和集合 $A \cup A'$ への包含写像 $i : A \hookrightarrow A \cup A'$ と $i' : A' \hookrightarrow A \cup A'$ を用いて，共通のドメイン $A \cup A'$ をもつ射 $(\bar{B}, \bar{B}')$ として表現する：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\bar{B}"'] & A \cup A' \arrow[d, dotted, "{(\bar{B},\bar{B}')}"] & A' \arrow[l, "i'"'] \arrow[dl, "\bar{B}'"] \\ & 2. & \end{tikzcd}$$

以上の考察に従い，次節以降では，推移的集合と包含写像の圏論的特徴付けを行う．

4.4　推移的集合と包含写像

本節ではまず，集合論における推移的集合と包含写像を写像の言葉で表現することを考える．

関係について考察する．集合 A 上の関係 R とは，$A \times A$ の部分集合であった．これは射 $\bar{R} : A \times A \to 2$ で表現される．このとき $\bar{R}$ の exponential transpose $r : A \to \mathcal{P}(A)$ によって，次の式，或いは図式で表現することができる：

$$(a, b) \in R \quad \text{iff} \quad a \in r(b) \quad (a, b \in A),$$

$$\begin{tikzcd} A \times A \arrow[d, "r \times \mathrm{id}_A"'] \arrow[dr, "\bar{R}"] & \\ \mathcal{P}(A) \times A \arrow[r, "\in_A"'] & 2. \end{tikzcd}$$

この考察を以って，射 $r : A \to \mathcal{P}(A)$ を関係と定義する：

定義 4.4.1 (in $\mathbf{Z_0}$) 対象 A 上の関係とは，射 $r : A \to \mathcal{P}(A)$ を指す．さらに，関係 $r : A \to \mathcal{P}(A)$ が**外延的**（extensional）であるとは，r がモノ射であることを指す．また，関係 $r : A \to \mathcal{P}(A)$ が**整礎**（well-founded）であるとは，空でない任意の部分集合 $M \subseteq A$ が r-極小元 $x \in M$ をもつことを指す：

$$\text{(WF)} \quad \forall M \subseteq A[M \neq \emptyset \implies \exists x \in M(r(x) \cap M = \emptyset)]. \qquad \diamondsuit$$

事実 4.4.2 (in $\mathbf{Z_0}$) 関係 $r : A \to \mathcal{P}(A)$ が整礎であることは，次の超限帰納法の原理（TI）と同値である：

$$\text{(TI)} \quad \text{任意の部分集合 } N \subseteq A \text{ に対して，} r^{-1}[\mathcal{P}(N)] \subseteq N \implies N = A. \qquad \square$$

冪集合をとる操作 $\mathcal{P}(-)$: 写像 $f : A \to B$ への作用 $\mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ を，$x \mapsto f[x]$ で定める．

定理 4.4.3 (in $\mathbf{Z_0}$) 関係 $r : A \to \mathcal{P}(A)$ が整礎であるための必要十分条件は，r が次の普遍再帰性（universal recursion property）を満たすことである : 任意の写像 $g : \mathcal{P}(B) \to B$ に対して次の図式を可換にする唯一つの写像 $f : A \to B$ が存在する :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"'] & B \\ \mathcal{P}(A) \arrow[r, "\mathcal{P}(f)"'] & \mathcal{P}(B). \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$ □

定理 4.4.4 (in ZF) 任意の外延的，整礎関係 $r : A \to \mathcal{P}(A)$ は，ある推移的集合 T 上の所属関係 $\in\restriction_T$ に同型である．すなわち，全単射 $f : A \to T$ で次の図式を可換にするものが存在する :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"'] & T \arrow[d, hook] \\ \mathcal{P}(A) \arrow[r, "\mathcal{P}(f)"'] & \mathcal{P}(T). \end{tikzcd}$$ □

定理 4.4.3 と定理 4.4.4 は，推移的集合上の所属関係を特徴づける．次で，推移的集合間の包含写像の特徴付けを行う．

事実 4.4.5 (in $\mathbf{Z_0}$) 推移的集合 T, T' と写像 $f : T \to T'$ に対して，図式

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & T' \arrow[d, hook] \\ \mathcal{P}(T) \arrow[r, "\mathcal{P}(f)"'] & \mathcal{P}(T'). \end{tikzcd}$$

が可換であるための必要十分条件は，$T \subseteq T'$ かつ f が包含写像であることである． □

公理 4.4.6 (axiom of transitivity (S-TA)) 任意の集合は，ある推移的集合の部分集合である :

$$\forall x \exists y [x \subseteq y \land y \text{ is transitive}].$$ □

注意 4.4.7 (in $\mathbf{Z_0}$ + (S-TA)) 公理 4.4.6 により，任意の集合 A に対して，A を含む最小の推移的集合，すなわち，A の推移閉包が存在する．A の推移閉包を $\mathrm{trcl}(A)$ と書く.◊

公理 4.4.8 (axiom of transitive representation (S-ATR)) 任意の外延的かつ整礎な関係 $r : A \to PA$ は，ある推移的集合 T 上の関係 $\mathrm{Mem}(T)$ に同型である :

$$\begin{aligned} &(r \text{ is an extensional, well-founded relation on A}) \\ &\implies \exists T \exists f (T \text{ is transitive}) \land (f \text{ is a bijection from } A \text{ to } T) \\ &\quad \land [\forall s \forall t (s \in r(t) \iff f(s) \in f(t)). \end{aligned}$$ □

注意 4.4.9 公理 4.4.8 における推移的集合 T は，関係 r から唯一つに定まる．これを $\mathrm{TR}(r)$ と書く. ◊

定義 4.4.10 (Z) 理論 Z を

$$\mathrm{Z} := \mathrm{Z}_0 + (\text{S-TA}) + (\text{S-ATR})$$

で定め，Z 集合論と呼ぶ. ◊

4.5　トポス理論における冪対象関手

トポスの理論 ET について考察する．集合圏における推移的集合に対応する「推移的集合対象」なるものを ET 内で表現するために，冪対象関手を定義し，その性質を調べる．

定義 4.5.1 各対象 A に対して，$PA := \Omega^A$ を A の**冪対象**と呼び，この evaluation morphism $\mathrm{ev}_{A,\Omega} : PA \times A \to \Omega$ を e_A と書く．

各対象 A に対して，射 $M : A \to \Omega$ を**部分対象**と呼ぶ. [*3] A の部分対象全体を $\mathrm{Sub}(A)$ と書く．A の部分対象 $M, N : A \to \Omega$ に対して，M, N が classify するモノ射をそれぞれ，$m : B \rightarrowtail A, n : C \rightarrowtail A$ としたとき，順序関係 $M \subseteq N$ を，射 $f : B \to C$ が存在して $m = nf$ が成立すること

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "m"'] & & C \arrow[dl, "n"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

として定めることができる．$\mathrm{Sub}(A)$ はこの順序に関する最小元 $0(A)(:= \chi(0 \rightarrowtail A))$ と最大元 $1(A)(:= \chi(\mathrm{id}_A))$ をもつ. ◊

事実 4.5.2 各対象 A に対して $(\mathrm{Sub}(A), \subseteq, 0(A), 1(A))$ はハイティング代数を成す. □

ハイティング代数 $(\mathrm{Sub}(A), \subseteq, 0(A), 1(A))$ の上限，下限，含意をそれぞれ，$\cap, \cup, \Rightarrow$ と書く．部分対象 $M : A \to \Omega$ に対して，その擬補元 $M \Rightarrow 0$ を $\neg M$ と書く．

定義 4.5.3 任意の射 $f : A \to B$ は，各部分対象 $N : B \to \Omega$ に対して，N の f による inverse image $f^{-1}[N]$ を誘導する．すなわち，N が classify するモノ射を $n : C \rightarrowtail B$ と書くと，次の引き戻し図式を得る：

$$\begin{tikzcd} f^{-1}[C] \arrow[r] \arrow[d, "f^{-1}[n]"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & C \arrow[r] \arrow[d, "n"] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & 1 \arrow[d, "\text{true}"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \arrow[r, "N"'] & \Omega. \end{tikzcd}$$

すなわち，$f^{-1}[N] = N \circ f$ である. ◊

事実 4.5.4 任意の射 $f : A \to B$ に対して，inverse image 関手 $f^{-1}[-]$ には，左随伴 $f[-]$ と右随伴 $f\langle - \rangle$ が存在する：

$$f[-] \dashv f^{-1}[-] \dashv f\langle - \rangle.$$

すなわち，任意の部分対象 $M : A \to \Omega$ と $N : B \to \Omega$ に対して，次が成立する：

[*3] 通常，「A の部分対象」はコドメインを A とするモノ射の適当な同値類として定義されるが，ここでは [5] の語法に従った．

(i) $f[M] \subseteq N \quad \text{iff} \quad M \subseteq f^{-1}[N]$;
(ii) $N \subseteq f\langle M\rangle \quad \text{iff} \quad f^{-1}[N] \subseteq M$. □

$f[-]$ と $f\langle -\rangle$ はそれぞれ，direct (existential) image 関手と universal image 関手と呼ばれる．

事実 4.5.5 任意の射 $f : A \to B$，$g : B \to C$ と部分対象 $M : A \to \Omega$，$N : C \to \Omega$ に対して，次が成立する：

(i) $(gf)[M] = g[f[M]]$，$(gf)\langle M\rangle = g\langle f\langle M\rangle\rangle$，$(gf)^{-1}[N] = g^{-1}\left[f^{-1}[N]\right]$;
(ii) $\mathrm{id}_A[M] = M = \mathrm{id}_A\langle M\rangle$，$\mathrm{id}_C{}^{-1}[N] = N$;
(iii) f がモノ射であるならば，$f^{-1}[f[M]] = M = f[f\langle M\rangle]$;
(iv) g がエピ射であるならば，$g\left[g^{-1}[N]\right] = N = g\langle g[M]\rangle$. □

補題 4.5.6 (Beck-Chevalley condition (B-C condition)) 図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & C \arrow[d, "g_2"] \\ B \arrow[r, "g_1"'] & D. \end{tikzcd}$$

が引き戻し正方図式であるとき，次は可換図式である：

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sub}(A) \arrow[d, "f_1[-]"'] & \mathrm{Sub}(C) \arrow[l, "f_2^{-1}"'] \arrow[d, "g_2[-]"] \\ \mathrm{Sub}(B) & \mathrm{Sub}(D), \arrow[l, "g_1^{-1}"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{Sub}(A) \arrow[d, "f_1\langle -\rangle"'] & \mathrm{Sub}(C) \arrow[l, "f_2^{-1}"'] \arrow[d, "g_2\langle -\rangle"] \\ \mathrm{Sub}(B) & \mathrm{Sub}(D). \arrow[l, "g_1^{-1}"] \end{tikzcd}$$

$$f_1\left[f_2{}^{-1}[-]\right] = g_1{}^{-1}[g_2[-]],$$
$$f_1\left\langle f_2{}^{-1}[-]\right\rangle = g_1{}^{-1}[g_2\langle -\rangle].$$

特に，射 $f : A \to B$ と $g : C \to D$ に対して，次の引き戻し正方図式

$$\begin{tikzcd} A \times C \arrow[r, "f \times \mathrm{id}_C"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A \times g"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & B \times C \arrow[d, "\mathrm{id}_B \times g"] \\ A \times D \arrow[r, "f \times \mathrm{id}_D"'] & B \times D \end{tikzcd}$$

に注意すると，

$$(\mathrm{id}_A \times g)\left[(f \times \mathrm{id}_C)^{-1}[-]\right] = (f \times \mathrm{id}_D)^{-1}[(\mathrm{id}_B \times g)[-]],$$
$$(\mathrm{id}_A \times g)\left\langle (f \times \mathrm{id}_C)^{-1}[-]\right\rangle = (f \times \mathrm{id}_D)^{-1}[(\mathrm{id}_B \times g)\langle -\rangle]$$

を得る． □

任意の射 f に対して，関手 $f[-]$ や $f^{-1}[-]$，$f\langle -\rangle$ の “internal operation” を導入する．まず，部分対象 $M : A \to \Omega$ は，その exponential transpose である，次の図式を可

換にする射 $x:1\to PA$ と一対一に対応することに注意する：

$$\begin{tikzcd} 1\times A \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "x\times \mathrm{id}_A"'] & A \arrow[d, "M"] \\ PA\times A \arrow[r, "e_A"'] & \Omega. \end{tikzcd}$$

ここで，$e_A := \mathrm{ev}_{A,\Omega}$ である．この対応を $x = M_{\mathrm{e}}$，$M = x_s$ と表記する．

より一般に，$g : C \to PA$ という形の射は，その exponential transpose $(g\times \mathrm{id}_A)^{-1}[e_A] : C\times A\to\Omega$ で決まる．これは，各射 $f : A\to B$ に対して，$(\mathrm{id}_{PA}\times f)[e_A]$ や $(\mathrm{id}_{PA}\times f)^{-1}[e_A]$，$(\mathrm{id}_{PB}\times f)\langle e_B\rangle$ が冪対象 PA と PB の間の射を誘導することを意味する：

定義 4.5.7 各射 $f : A\to B$ に対して，射

$$PA \xrightarrow{Pf} PB, \qquad PA \xrightarrow{P_\forall f} PB, \qquad PB \xrightarrow{P^*f} PA,$$

が次で定義される：

$$(Pf\times \mathrm{id}_B)^{-1}[e_B] = (\mathrm{id}_{PA}\times f)[e_A], \tag{4.5}$$
$$(P_\forall f\times \mathrm{id}_B)^{-1}[e_B] = (\mathrm{id}_{PA}\times f)\langle e_A\rangle, \tag{4.6}$$
$$(P^*f\times \mathrm{id}_A)^{-1}[e_A] = (\mathrm{id}_{PB}\times f)^{-1}[e_B]. \tag{4.7}$$

◊

事実 4.5.8 射 $f : A\to B$，部分対象 $M : A\to\Omega$ と $N : B\to\Omega$ に対して，次が成立する：

(i) $f[M]_{\mathrm{e}} = Pf\circ M_{\mathrm{e}}$;
(ii) $f\langle M\rangle = P_\forall f\circ M_{\mathrm{e}}$;
(iii) $f^{-1}[N] = P^*f\circ N_{\mathrm{e}}$. □

証明 (i) を示すためには，等式

$$((Pf\circ M_{\mathrm{e}})\times \mathrm{id}_B)^{-1}[e_B] = (f[M]_{\mathrm{e}}\times \mathrm{id}_B)^{-1}[e_B]$$

を示せばよいが，次に注意すればよい：

$$\begin{aligned}
&((Pf\circ M_{\mathrm{e}})\times \mathrm{id}_B)^{-1}[e_B] \\
=&(M_{\mathrm{e}}\times \mathrm{id}_B)^{-1}\left[(Pf\times \mathrm{id}_B)^{-1}[e_B]\right] \\
=&(M_{\mathrm{e}}\times \mathrm{id}_B)^{-1}[(\mathrm{id}_{PA}\times f)[e_A]] && (\because (4.5)) \\
=&(\mathrm{id}_1\times f)\left[(M_{\mathrm{e}}\times \mathrm{id}_A)^{-1}[e_A]\right] && (\because \text{B-C condition}) \\
=&(\mathrm{id}_1\times f)[M\circ\pi_2] && (\because M_{\mathrm{e}}\text{ の定義}) \\
=&(\mathrm{id}_1\times f)\left[{\pi_2}^{-1}[M]\right] \\
=&(\pi_2')^{-1}[f[M]] && (\because \text{B-C condition}, \pi_2' : 1\times B\to B) \\
=&(f[M]_{\mathrm{e}}\times \mathrm{id}_B)^{-1}[e_B].
\end{aligned}$$

(ii), (iii) についても同様である． ■

P は共変関手であり，P^* と $P_\forall$ は反変関手である．

事実 4.5.5 (iii), (iv) を internal に言い換えれば，次の通り：

事実 4.5.9　(i) モノ射 $f : A \rightarrowtail B$ に対して，

$$P^*fPf = \mathrm{id}_{PA} : PA \to PB \to PA$$

が成立する．特に，Pf はモノ射であり，P^*f はエピ射である；

(ii) エピ射 $f : A \twoheadrightarrow B$ に対して，

$$PfP^*f = \mathrm{id}_{PB} : PB \to PA \to PB$$

が成立する．特に，Pf はエピ射であり，$P_\forall f$ はモノ射である．　□

関手 P がモノ射を保つことから，次の internal power operation $P[-]$ が定義できる：

定義 4.5.10 部分対象 $M : A \to \Omega$ に対して，M が classify するモノ射 $m : B \rightarrowtail A$ をとると，Pm の classifying morphism $P[M] : PA \to \Omega$ が唯一つ定まる：

$$\begin{tikzcd} PB \arrow[r, "!^{PB}"] \arrow[d, tail, "Pm"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & 1 \arrow[d, tail, "\text{true}"] \\ PA \arrow[r, "P[M]"'] & \Omega. \end{tikzcd}$$

◊

定理 4.5.11 冪対象関手 P は，引き戻し正方図式を保つ．すなわち，図式

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] \arrow[d, tail, "n"'] & D \arrow[d, tail, "m"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

が引き戻し正方図式であるならば，

$$\begin{tikzcd} PC \arrow[r, "Pg"] \arrow[d, tail, "Pn"'] & PD \arrow[d, tail, "Pm"] \\ PA \arrow[r, "Pf"'] & PB \end{tikzcd}$$

も引き戻し正方図式である．　□

証明 次の可換図式を考える：

$$\begin{tikzcd} E \arrow[drr, bend left, "v"] \arrow[ddr, bend right, "u"'] & & \\ & PC \arrow[r, "Pg"] \arrow[d, "Pn"] & PD \arrow[d, "Pm"] \\ & PA \arrow[r, "Pf"'] & PB. \end{tikzcd}$$

このとき，射 u が Pn を経由して分解されることを示す．具体的には，次を示す：

$$u = Pn \circ P^*n \circ u.$$

このためには，両辺の exponential transpose をとった，次式を示せばよい：

$$(u \times \mathrm{id}_A)^{-1}[e_A] = ((Pn \circ P^*n \circ u) \times \mathrm{id}_A)^{-1}[e_A].$$

$(u \times \mathrm{id}_A)^{-1}[e_A]$ と $((Pn \circ P^*n \circ u) \times \mathrm{id}_A)^{-1}[e_A]$ が classify するモノ射をそれぞれ，$U \rightarrowtail E \times A, U' \rightarrowtail E \times A$ と書くと，上式は

$$U' \cong (\mathrm{id}_E \times n)\left[(\mathrm{id}_E \times n)^{-1}[U]\right]$$

を意味する．$\mathrm{id}_E \times n$ がモノ射であり，次の引き戻し正方図式に注意すれば，これを示すためには，U から $E \times C$ へのモノ射が存在することを示せばよい：

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{id}_E \times n)^{-1}[U] \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & U \arrow[d, tail] \\
E \times C \arrow[r, tail, "\mathrm{id}_E \times n"'] & E \times A.
\end{tikzcd}$$

次に注意する：

$$\begin{aligned}
& (u \times \mathrm{id}_A)^{-1}[e_A] \subseteq ((Pf \circ P^*f \circ u) \times \mathrm{id}_A)^{-1}[e_A] && (\because f[-] \dashv f^{-1}[-] \text{ の unit}) \\
\text{iff}\quad & (u \times \mathrm{id}_A)^{-1}[e_A] \subseteq ((Pf \circ P^*m \circ v) \times \mathrm{id}_A)^{-1}[e_A] && (\because Pf \circ u = Pm \circ v) \\
\text{iff}\quad & (u \times \mathrm{id}_A)^{-1}[e_A] \subseteq ((Pn \circ P^*g \circ v) \times \mathrm{id}_A)^{-1}[e_A]. && (\because \text{B-C condition})
\end{aligned}$$

両辺が classify するモノ射で書くと，$E \times A$ において

$$U \subseteq (\mathrm{id}_E \times n)\left[(\mathrm{id}_E \times g)^{-1}[V]\right]$$

が成立している．ここで，V は $(v \times \mathrm{id}_D)^{-1}[e_D]$ が classify する $E \times D$ のモノ射を表す．上式右辺を V' と書くと，次の図式により，U が $E \times C$ へのモノ射を与えることがわかる：

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, tail] \arrow[ddr, tail, bend right] & V' \arrow[r] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & V \arrow[d, tail] \\
& E \times C \arrow[r, "\mathrm{id}_E \times g"'] \arrow[d, tail, "\mathrm{id}_E \times n"] & E \times D \\
& E \times A. &
\end{tikzcd}$$

よって，$u = Pn \circ P^*n \circ u$ を得る．

次に，$v = Pg \circ P^*n \circ u$ を示す．次に注意する：

$$\begin{aligned}
Pm \circ Pg \circ P^*nu &= Pf \circ Pn \circ P^*n \circ u && (\because mg = fn) \\
&= Pf \circ u && (\because Pn \circ P^*n \circ u = u) \\
&= Pm \circ v. && (\because Pf \circ u = Pm \circ v)
\end{aligned}$$

Pm はモノ射であるから，$v = Pg \circ P^*n \circ u$ を得る．

Pn はモノ射であるから，$P^*n \circ u$ は u を Pn 経由で分解する唯一つの射である．　■

事実 4.5.12 射 $f : A \to B$ と部分対象 $N : B \to \Omega$ に対して，次が成立する：

$$P\left[f^{-1}[N]\right] = (Pf)^{-1}[P[N]].$$

□

証明 部分対象 N が classify するモノ射を $n : D \rightarrowtail B$ と書く．次の引き戻し図式に注意する：

$$\begin{tikzcd} PC \arrow[r] \arrow[d, "(Pf)^{-1}[Pn]"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & PD \arrow[r] \arrow[d, "Pn"] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\ PA \arrow[r, "Pf"'] & PB \arrow[r, "P[N]"'] & \Omega. \end{tikzcd}$$

■

本節の最後に，各対象 A での交わり $\cap_A$ と結び $\cup_A$，冪 P_A を定義する：

$$PA \times PA \xrightarrow{\cap_A} PA, \quad PA \times PA \xrightarrow{\cup_A} PA, \quad PA \xrightarrow{P_A} PPA.$$

交わり $\cap_A$ は，次の図式を可換にする唯一つの射として定まる：

$$\begin{tikzcd} PA \times PA \times A \arrow[d, "\cap_A \times \mathrm{id}_A"'] \arrow[dr, "\langle \pi_1, \pi_3 \rangle^{-1}[e_A] \cap \langle \pi_2, \pi_3 \rangle^{-1}[e_A]"] & \\ PA \times A \arrow[r, "e_A"'] & \Omega. \end{tikzcd} \tag{4.8}$$

ここで，$\pi_i (i = 1, 2, 3)$ は $PA \times PA \times A$ から i 番目の成分への射影を表す．

同様にして，結び $\cup_A$ は，次の図式を可換にする唯一つの射として定まる：

$$\begin{tikzcd} PA \times PA \times A \arrow[d, "\cup_A \times \mathrm{id}_A"'] \arrow[dr, "\langle \pi_1, \pi_3 \rangle^{-1}[e_A] \cup \langle \pi_2, \pi_3 \rangle^{-1}[e_A]"] & \\ PA \times A \arrow[r, "e_A"'] & \Omega. \end{tikzcd} \tag{4.9}$$

冪 P_A は，次の図式を可換にする唯一つの射として定まる：

$$\begin{tikzcd} PA \times PA \arrow[d, "P_A \times \mathrm{id}_A"'] \arrow[dr, "\subseteq_A^{-1}"] & \\ PPA \times A \arrow[r, "e_A"'] & \Omega. \end{tikzcd} \tag{4.10}$$

ここで，$\subseteq_A^{-1}$ は，$\cap_A : PA \times PA \to PA$ と $\pi_2 : PA \times PA \to PA$ のイコライザの classifying morhism である．

A での交わり $\cap_A$ と結び $\cup_A$，冪 P_A は，部分対象に対する演算 $\cap, \cup, P[-]$ を internal に表現したものである：

事実 4.5.13 部分対象 $M : A \to \Omega$ と $N : A \to \Omega$ に対して，次が成立する：

$$\cap_A \langle M_\mathrm{e}, N_\mathrm{e} \rangle = (M \cap N)_\mathrm{e}, \quad \cup_A \langle M_\mathrm{e}, N_\mathrm{e} \rangle = (M \cup N)_\mathrm{e}, \quad P_A(M_\mathrm{e}) = P[M]_\mathrm{e}.$$

□

注意 4.5.14 任意の対象 A に対して，P_A はモノ射である． ◊

4.6　トポス理論における推移的集合対象

前節で構成した冪対象関手 P を用いて，集合論における推移的集合に対応する，「推移的集合対象」をトポス理論 ET で定義する．そのために，関係・外延性・整礎性を集合論の場合と平行に定義していく．

定義 4.6.1 各対象 A に対して，射 $r : A \to PA$ を**関係**と呼ぶ．

(i) 関係 $r : A \to PA$ は，r がモノ射であるとき，**外延的**であるという；

(ii) 関係 $r : A \to PA$ は，次の超限帰納法の原理が成り立つとき，**整礎**であるという：

$$\forall N (N : A \to \Omega \wedge r^{-1}[P[N]] \subseteq N \implies N = 1(A));$$

(iii) 関係 $r : A \to PA$ は，次の**再帰性**を満たすとき，**再帰的**であるという：
任意の射 $g : PB \to B$ に対して，次の図式を可換にする唯一の射 f が存在する：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"'] & B \\ PA \arrow[r, "Pf"'] & PB. \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

ここで，f は g **によって** r**-再帰的に定義される**といい，$f = \mathrm{rec}_r(g)$ と表記する．◊

集合論においては，推移的集合は，外延的かつ再帰的な関係として特徴づけることが出来た．これと平行に，トポス理論で「推移的集合」に対応する対象を定義する．

定義 4.6.2 (推移的集合対象) 各対象 A に対して，関係 $r : A \to PA$ は，外延的かつ再帰的であるとき，**推移的集合対象**（transitive-set-object）であると呼ばれる．◊

Mostowski 崩壊定理によって，集合圏における推移的集合対象は，推移的集合 T への包含写像と同型となる．すなわち，推移的集合そのものと同一視できる．

定義 4.6.3 (包含射) 関係 $r : A \to PA$ と $s : B \to PB$ に対して，射 $f : A \to B$ は，次の図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"'] & B \arrow[d, "s"] \\ PA \arrow[r, "Pf"'] & PB. \end{tikzcd}$$

を可換にするとき，r から s への**包含射**であると呼び，$f : r \hookrightarrow s$ と表記する．包含射 $f : r \hookrightarrow s$ が存在するとき，$r \subseteq s$ と表記する．◊

包含射の特徴付けのために，部分関数を使う．

定義 4.6.4 モノ射 $t : C \to PC$ に対して，部分関数 $((Pj_C)t, \mathrm{id}_C)$ の classifying morphism を，$\tilde{t} : P\tilde{C} \to \tilde{C}$ と書く：

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\mathrm{id}_C"] \arrow[d, tail, "t"'] & C \arrow[dd, "j_C"] \\ PC \arrow[d, tail, "Pj_C"'] \arrow[r, phantom, "\text{p.b.}"] & \\ P\tilde{C} \arrow[r, "\hat{t}"'] & \tilde{C}. \end{tikzcd}$$ ◊

事実 4.6.5 再帰的な関係 $r : A \to PA$ と外延的な関係 $s : B \to PB$ に対して，次が成立する：

(i) 射 $f : A \to B$ が r から s への包含射であることと，次の図式

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"'] & B \arrow[r, "j_B"] & \tilde{B} \\
PA \arrow[r, "Pf"'] & PB \arrow[r, "Pj_B"'] & P\tilde{B}. \arrow[u, "\hat{s}"']
\end{tikzcd}$$

が可換図式となること，すなわち，$j_B f = \mathrm{rec}_r(\hat{s})$ となることは同値である；

(ii) $r \subseteq s$ ならば，包含射 $r \hookrightarrow s$ は唯一つ存在する．これを $\mathrm{in}(r, s)$ と書く；

(iii) $r \subseteq s$ かつ r, s が推移的集合対象であるならば，包含射 $\mathrm{in}(r, s)$ はモノ射である．□

証明　(i) f が r から s への包含射であるとき，上の長方形に $s : B \to PB$ を付け加えた図式全体が可換となる．r が再帰的であることより，合成射 $j_B f$ は $\hat{s}$ によって r-再帰的に定義される．すなわち，$j_B f = \mathrm{rec}_r(\hat{s})$ である．逆に，$j_B f = \mathrm{rec}_r(\hat{s})$ とする．次の図式に注意する：

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "f"] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "Pj_B Pfr"'] & & \\
& B \arrow[r, "\mathrm{id}_B"] \arrow[d, "Pj_B s"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{p.b.}"] & B \arrow[d, tail, "j_B"] \\
& P\tilde{B} \arrow[r, "\hat{s}"'] & \tilde{B}.
\end{tikzcd}$$

この図式より，$Pj_B sf = Pj_B Pfr$ である．Pj_B はモノ射であったから，$sf = Pfs$ を得る．

(ii) i, i' が共に r から s への包含射であるとすると，(i) より，$j_B i = \mathrm{rec}_r(\hat{s}) = j_B i'$ が成立する．j_B はモノ射であったから，$i = i'$ を得る．

(iii) 次の図式を考える：

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "s"] & \tilde{A} \\
PA \arrow[r, "Pf"'] & PB \arrow[r, "Pg"'] & P\tilde{A}. \arrow[u, "\hat{r}"']
\end{tikzcd}$$

ここで，$f = \mathrm{in}(r, s)$, $g = \mathrm{rec}_s(\hat{r})$ である．長方形が可換であることから，gf は $\hat{r}$ によって r-再帰的に定義されている．すなわち，$gf = \mathrm{rec}_r(\hat{r})$ である．さらに，$\hat{r}$ を定義している引き戻し正方（可換）図式

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "j_A"] \arrow[d, "r"'] & \tilde{A} \\
PA \arrow[r, "Pj_A"'] & P\tilde{A}. \arrow[u, "\hat{r}"']
\end{tikzcd}$$

は，j_A が $\hat{r}$ によって r-再帰的に定義されていることを意味している．すなわち，$j_A = \mathrm{rec}_r(\hat{r})$ である．よって，$j_A = gf$ を得る．j_A はモノ射であるから，f もモノ射である．■

事実 4.6.6 推移的集合対象 r, s に対して，次が成立する：

$$r \subseteq s \quad \text{and} \quad s \subseteq r \quad \text{iff} \quad r \cong s.$$

ここで，$r \cong s$ は，包含射 $\mathrm{in}(r,s), \mathrm{in}(s,r)$ が同型射となることを意味する．　□

通常の集合論における基本的事実（推移的集合の部分集合は推移的集合）と同様な命題が，ET において成立する．

定理 4.6.7 (in ET) 関係 $r : A \to PA$ と $s : B \to PB$ があり，$i : s \hookrightarrow r$ を包含射とする．このとき，次が成立する：

(i) r が整礎であるならば，s も整礎である：

(ii) 包含射 i がモノ射であるならば，r が推移的集合対象であることから s が推移的集合対象であることが従う．　□

本定理を証明するために，次の 2 つの事実を用いる：

定理 4.6.8 (in ET) 推移的集合対象は整礎である．　□

証明 $r : A \to PA$ を推移的集合対象，$M : A \to \Omega$ を A の部分対象で $r^{-1}[P[M]] \subseteq M$ を満たすものとする．$M = 1(A)$ を示すために，M を classifying morphism とするモノ射 $m : B \rightarrowtail A$ をとる．m が同型射であることを示せばよい．Pm の r に沿った引き戻しをとる：

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, tail, "s"] \arrow[d, tail, "n"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & PB \arrow[d, tail, "Pm"] \\ A \arrow[r, tail, "r"'] & PA. \end{tikzcd}$$

仮定 $r^{-1}[P[M]] \subseteq M$ より，モノ射 $k : C \rightarrowtail B$ であって，$n = mk$ を満たすものが存在する．r は外延的であることからモノ射であり，その引き戻しである s もモノ射であることに注意する．そこで，部分関数 $(Pj_B s : C \rightarrowtail PB \rightarrowtail j_B, k : C \to B)$ の classifying morphism $g : P\tilde{B} \to \tilde{B}$ をとる：

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "k"] \arrow[d, tail, "s"'] & B \arrow[dd, "j_B"] \\ PB \arrow[d, tail, "Pj_B"'] \arrow[r, phantom, "\text{p.b.}"] & \\ P\tilde{B} \arrow[r, "g"'] & \tilde{B}. \end{tikzcd}$$

次の図式を考える：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "r"'] & \tilde{B} \arrow[r, "\tilde{m}"] & \tilde{A} \\ PA \arrow[r, "Pf"'] & P\tilde{B} \arrow[u, "g"] \arrow[r, "P\tilde{m}"'] & P\tilde{A}. \arrow[u, tail, "\hat{r}"'] \end{tikzcd}$$

ここで，f は g によって r-再帰的に定義される射，すなわち，$f = \mathrm{rec}_r(g)$ であり，上の図式の左側の正方形は可換である．さらに，上の図式の右側の正方形も可換であること，

すなわち，

$$\hat{r}P\tilde{m} = \tilde{m}g \tag{4.11}$$

を示せば，r が再帰的であることから，$\tilde{m}f = \mathrm{rec}_r(\hat{r})$ を得る．このとき，$\hat{r}$ の定義から，$\mathrm{rec}_r(\hat{r}) = j_A$ である．さらに，次の引き戻し図式を考える：

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "l"] \arrow[d, tail, "d"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & B \arrow[r, "m"] \arrow[d, tail, "j_B"] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & A \arrow[d, tail, "j_A"] \\
A \arrow[r, "f"'] & \tilde{B} \arrow[r, "\tilde{m}"'] & \tilde{A}.
\end{tikzcd}$$

$\tilde{m}f = \mathrm{rec}_r(\hat{r}) = j_A$ であることから，ml は同型射であり，従って，m はエピ射である．モノ射 m がエピ射でもあることから，m は同型射であることがわかる（cf. [4, Proposition IV.1.2]）．以下では，(4.11) を示す．そのためには，$\hat{r}P\tilde{m}$ と $\tilde{m}g$ が共に部分関数 (Pj_Bs, n) の classifying morphism であることを示せばよい．g が部分関数 (Pj_Bs, k) の classifying morphism であることと，$\tilde{\ }$ の定義より，次の引き戻し図式を得る：

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "k"] \arrow[d, tail] & B \arrow[r, tail, "m"] \arrow[dd, tail, "j_B"] & A \arrow[dd, tail, "j_A"] \\
PB \arrow[d, "Pj_B"'] \arrow[r, phantom, "\text{p.b.}"] & {} \arrow[r, phantom, "\text{p.b.}"] & {} \\
P\tilde{B} \arrow[r, "g"'] & \tilde{B} \arrow[r, "\tilde{m}"'] & \tilde{A}.
\end{tikzcd}$$

$n = mk$ だったから，これは $\tilde{m}g$ が部分関数 (Pj_Bs, n) の classifying morphism であることを意味する．$\hat{r}P\tilde{m}$ と $\tilde{m}g$ が部分関数 (Pj_Bs, n) の classifying morphism であることを示すためには，次の図式に注意すればよい：

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "n"] \arrow[d, tail, "s"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & A \arrow[r, "\mathrm{id}_A"] \arrow[d, tail, "r"] & A \arrow[dd, tail, "j_A"] \\
PB \arrow[r, tail, "Pm"] \arrow[d, "Pj_B"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & PA \arrow[d, "Pj_A"] \arrow[r, phantom, "\text{p.b.}"] & {} \\
P\tilde{B} \arrow[r, "P\tilde{m}"'] & P\tilde{A} \arrow[r, "\hat{r}"'] & \tilde{A}.
\end{tikzcd}$$

ここで，左上の引き戻しは定義より，左下の引き戻しは $\tilde{\ }$ の定義と事実 4.5.12 による．右側の引き戻しは $\hat{r}$ の定義による．よって，外側の正方形も引き戻しとなるから，この図式は $P\tilde{m}\hat{r}$ が部分関数 (Pj_Bs, n) の classifying morphism であることを意味する．■

事実 4.6.9 任意の整礎関係 $r : A \to PA$ と任意の射 $g : PB \to B$ に対して，次の図式

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"'] & B \\
PA \arrow[r, "Pf"'] & PB. \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd} \tag{4.12}$$

を可換にする射 $f : A \to B$ は，高々一つである．□

証明 $r : A \to PA$ を整礎関係，$g : PB \to B$ を任意の射とする．2 つの射 $f, f' : A \to B$ が共に (4.12) を可換にするものとする．$f = f'$ を示すために，f と f' のイコライザ $e : E \rightarrowtail A$ をとり，e の classifying morphism を $M : A \to \Omega$ とおく．このとき，e が A で最大であることを示せばよい．r が整礎関係であることから，$r^{-1}[P[M]] \subseteq M$ を示せばよい．そこで，$Pe : PE \rightarrowtail PA$ の r に沿った引き戻しを考える：

$$\begin{tikzcd} r^{-1}[PE] \arrow[r, "l"] \arrow[d, "n"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & PE \arrow[d, "Pe"] \\ A \arrow[r, "r"'] & PA. \end{tikzcd}$$

e が f と f' のイコライザであることから，$n : r^{-1}[PE] \to A$ が f と f' をイコライズすることを示せば十分である．実際，次が成立する：

$$fn = g(Pf)rn = g(Pf)rn = g(Pf)(Pm)l = g(Pf')ml = g(Pf')rn = f'n. \qquad \blacksquare$$

証明 of 定理 4.6.7.

(i) 部分対象 $N : B \to \Omega$ で，$s^{-1}[P[N]] \subseteq N$ なるものをとる．次の不等式

$$r^{-1}[P[i\langle N\rangle]] \subseteq i\langle N\rangle. \tag{4.13}$$

を示せばよい．実際，r が整礎であることから，$i\langle N\rangle = 1(A)$ が従い，

$$1(B) = i^{-1}[1(A)] = i^{-1}[i\langle N\rangle] \subseteq N \subseteq 1(B)$$

を得る．以下で，(4.13) を示す．次に注意する：

$$\begin{aligned} (Pi)^{-1}[P[i\langle N\rangle]] &= P\left[i^{-1}[i\langle N\rangle]\right] && (\because \text{事実 } 4.5.12) \\ &\subseteq P[N]. && (\because i^{-1} \dashv i\langle - \rangle \text{ の counit}) \end{aligned}$$

仮定より $s^{-1}[P[N]] \subseteq N$ だから，次を得る：

$$s^{-1}\left[(Pi)^{-1}[P[i\langle N\rangle]]\right] \subseteq s^{-1}[P[N]] \subseteq N.$$

いま，i は s から r への包含射であるから，$(Pi)s = ri$ である．よって，上の不等式は

$$i^{-1}\left[r^{-1}[P[i\langle N\rangle]]\right] \subseteq N$$

を与える．随伴 $i^{-1}[-] \dashv i\langle - \rangle$ により，(4.13) を得る．

(ii) 包含射 $i : s \hookrightarrow r$ がモノ射であるとする．r は推移的集合対象であるとする．まず，s が再帰的であることを示す．任意の射 $g : PC \to C$ をとり，g に対して $f = \mathrm{rec}_r(g)$ ととると，次の図式は可換である：

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "i"] \arrow[d, "s"'] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"] & C \\ PB \arrow[r, "Pi"'] & PA \arrow[r, "Pf"'] & PC. \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

従って，合成射 $h := fi$ は $h = g \circ Ph \circ s$ を満たす．(i) より r が整礎であることから s も整礎であり，事実 4.6.9 により，g に対して上の長方形を可換にする射 h

は唯一つに定まる．よって，s は再帰的である．さらに，i と r が共にモノ射であることと，等式 $ri = Pis$ により，s もモノ射であること，すなわち，外延的であることがわかる．以上より，s は推移的集合対象である．■

定理 4.6.10 推移的集合対象 $r : A \rightarrowtail PA$ と $s : B \rightarrowtail PB$ に対して，推移的集合対象 $r \cap s : A \cap B \rightarrowtail P(A \cap B)$ と $r \cup s : A \cup B \rightarrowtail P(A \cup B)$ が存在して，$r \cap s$ と $r \cup s$ はそれぞれ，半順序 $\subseteq$ に関する下限と上限である．□

証明 まず，r と s の下限 $r \cap s : A \cap B \to P(A \cap B)$ が存在することを示す．次の図式を考える：

$$\begin{tikzcd}
& A \cap B \arrow[rr, "d_2"] \arrow[dl, "d_1"'] \arrow[dd, dotted, "r \cap s"] & & B \arrow[dl, "j_B"] \arrow[dd, "s"] \\
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dd, "r"'] & & \tilde{B} & \\
& P(A \cap B) \arrow[rr, "Pd_2"] \arrow[dl, "Pd_1"'] & & PB \arrow[dl, "Pj_B"] \\
PA \arrow[rr, "Pf"'] & & P\tilde{B}. \arrow[uu, "\hat{s}"] &
\end{tikzcd} \tag{4.14}$$

ここで，

$$f = \mathrm{rec}_r(\hat{s}), \qquad A \cap B = \mathrm{pb}(f, j_B),$$
$$d_1 = \pi_1(f, j_B), \qquad d_2 = \pi_2(f, j_B)$$

である．図式 (4.14) の上面は引き戻し正方図式であるから，定理 4.5.11 により，底面も引き戻し正方図式である．等式

$$\hat{s}Pfrd_1 = rd_1 = j_Bd_2$$

と次の引き戻し図式

$$\begin{tikzcd}
A \cap B \arrow[dr, "d_2"] \arrow[drr, bend left, "d_2"] \arrow[dddr, bend right, "Pfrd_1"'] & & \\
& B \arrow[r, "\mathrm{id}_B"] \arrow[d, tail, "s"'] & B \arrow[dd, "j_B"] \\
& PB \arrow[d, "Pj_B"'] \arrow[r, phantom, "\text{p.b.}"] & \\
& P\tilde{B} \arrow[r, "\hat{s}"'] & \tilde{B}.
\end{tikzcd}$$

に注意すれば，$Pfrd_1 = Pj_Bsd_2$ を得る．これは，図式 (4.14) 全体を可換にするような射 $r \cap s : A \cap B \to P(A \cap B)$ が存在することを意味する．$r \cap s$ が推移的集合対象であることを示す．j_B がモノ射であることから，その引き戻しである d_2 もモノ射である．図式 (4.14) の左側面に注目すると，r が推移的集合対象であることから，定理 4.6.7 により，$r \cap s$ も推移的集合対象であることが導かれる．

次に，$r \cap s$ が r と s の下限であることを示す．図式 (4.14) の左側面と背面の可換図式から，$r \subseteq r \cap s$ と $s \subseteq r \cap s$ がわかる．$r \subseteq s$ が r と s の下限としての普遍性をもつことを示す．推移的集合対象 $t : C \to PC$ で，包含射 $\mathrm{in}(t, r)$ と $\mathrm{in}(t, s)$ が存在すると仮定する．このとき，可換図式

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\mathrm{in}(t,s)"] \arrow[d, "t"'] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"] & \tilde{B} \\
PC \arrow[r, "P\mathrm{in}(t,s)"'] & PA \arrow[r, "Pf"'] & P\tilde{B}, \arrow[u, "\hat{s}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\mathrm{in}(t,s)"] \arrow[d, "t"'] & B \arrow[r, "j_B"] \arrow[d, "s"] & \tilde{B} \\
PC \arrow[r, "P\mathrm{in}(t,s)"'] & PB \arrow[r, "j_B"'] & P\tilde{B}. \arrow[u, "\hat{s}"']
\end{tikzcd}
$$

に注意すれば，$f\mathrm{in}(t, r)$ と $j_B\mathrm{in}(t, s)$ が共に $\hat{s}$ によって t-再帰的に定義されていることがわかる．従って，$f\mathrm{in}(t, r) = j_B\mathrm{in}(t, s)$ が成立する．次の引き戻し図式

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, dotted, "i"] \arrow[drr, bend left, "\mathrm{in}(t,s)"] \arrow[ddr, bend right, "\mathrm{in}(t,r)"'] & & \\
& A \cap B \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, tail, "s"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & B \arrow[d, "j_B"] \\
& P\tilde{B} \arrow[r, "f"'] & \tilde{B}.
\end{tikzcd}
$$

に注意すれば，射 $i : C \to A \cap B$ で $d_1 i = \mathrm{in}(t, r)$ かつ $d_2 i = \mathrm{in}(t, s)$ を満たすものが唯一つ存在する．i が包含関係 $t \subseteq r \cap s$ を与えることを確かめる．実際，図式 (4.14) の左側面に注意すれば，

$$Pd_1(r \cap s)i = rd_1 i = r\mathrm{in}(t, r)P\mathrm{in}(t, r)t = Pd_1 Pit$$

を得る．Pd_1 はモノ射であったから，$(r \cap s)i = Pit$，すなわち，$t \subseteq r \cap s$ を得る．以上により，$r \cap s$ が r と s の下限であることが示された．

次に，r と s の上限 $r \cup s : A \cup B \to P(A \cup B)$ が存在することを示す．次の図式を考える：

$$
\begin{tikzcd}
& A \cap B \arrow[rr, "d_2"] \arrow[dl, "d_1"'] \arrow[dd, "r\cap s" near start] & & B \arrow[dl, "v_2"] \arrow[dd, "s"] \\
A \arrow[rr, "v_1" near end] \arrow[dd, "r"'] & & A \cup B \arrow[dd, dotted, "r\cup s" near start] & \\
& P(A \cap B) \arrow[rr, "Pd_2" near start] \arrow[dl, "Pd_1"'] & & PB \arrow[dl, "Pv_2"] \\
PA \arrow[rr, "Pv_1"'] & & P(A \cup B). &
\end{tikzcd}
\tag{4.15}
$$

ここで，

$$A \cup B = \mathrm{po}(d_1, d_2), \quad v_1 = \iota_1(d_1, d_2), \quad v_2 = \iota_2(d_1, d_2)$$

である．上面は押し出し正方図式であり，可換性

$$Pv_1 rd_1 = Pv_1 Pd_1(r \cap s) = Pv_2 Pd_2(r \cap s) = Pv_2 sd_2$$

に注意すると，前面と右側面を可換にする唯一つの射 $r \cup s : A \cup B \to P(A \cup B)$ を得る．

$r \cup s$ が再帰的であることを示す．そのために，任意に射 $g : PC \to C$ をとる．このとき，r と s が再帰的であることから，次の図式を可換にするような射 $\mathrm{rec}_r(g) : A \to C$ と $\mathrm{rec}_s(g) : B \to C$ を得る：

$$\begin{tikzcd}
A \cap B \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "r\cap s"'] & A \arrow[r, "\mathrm{rec}_r(g)"] \arrow[d, "r"] & C & B \arrow[l, "\mathrm{rec}_s(g)"'] \arrow[d, "s"'] & A \cap B \arrow[l, "d_2"'] \arrow[d, "r\cap s"] \\
P(A \cap B) \arrow[r, "Pd_2"'] & PA \arrow[r, "P\mathrm{rec}_r(g)"'] & PC \arrow[u, "g"] & PB \arrow[l, "P\mathrm{rec}_s(g)"] & P(A \cap B). \arrow[l, "Pd_2"]
\end{tikzcd}$$

これは，$\mathrm{rec}_r(g)d_1$ と $\mathrm{rec}_s(g)d_2$ がともに g によって $r \cap s$-再帰的に定義されていることを意味している．従って，$\mathrm{rec}_r(g)d_1 = \mathrm{rec}_s(g)d_2$ を得る．次の押し出し正方図式

$$\begin{tikzcd}
A \cap B \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, "d_1"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.o.}"] & B \arrow[d, "v_2"] \arrow[ddr, bend left, "\mathrm{rec}_s(g)"] & \\
A \arrow[r, "v_1"'] \arrow[drr, bend right, "\mathrm{rec}_r(g)"'] & A \cup B & \\
& & C.
\end{tikzcd}$$

に注意すれば，$k : A \cup B \to C$ で

$$kv_1 = \mathrm{rec}_r(g) \quad \text{and} \quad kv_2 = \mathrm{rec}_s(g) \tag{4.16}$$

を満たす唯一つの射を得る．$r \cup s$ が再帰的であることを示すために，射 k が，次の図式

$$\begin{tikzcd}
A \cup B \arrow[r, "k"] \arrow[d, "r\cup s"'] & C \\
P(A \cup B) \arrow[r, "Pk"'] & PC. \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}$$

を可換にする唯一つの射であることを示す．(4.16) と $v_1 = \mathrm{in}(r, r \cup s), v_2 = \mathrm{in}(s, r \cup s)$ より，

$$kv_1 = gPkv_1 \quad \text{and} \quad kv_2 = gPkv_2$$

である．従って，

$$k(v_1, v_2) = gPk(r \cup s)(v_1, v_2)$$

を得る．押し出しとしての $A \cup B$ は，余積 $A + B$ への適当な包含射のコイコライザとして得られるが，これは押し出し正方図式における射 $(v_1, v_2) : A + B \to A \cup B$ に等しかった．コイコライザはエピ射であるから，(v_1, v_2) もエピ射である．よって，上の図式の可換性が示された．唯一性は，押し出しの普遍性より従う．

次に，$r \cup s$ がモノ射であることを示す．(4.15) において，d_1 がモノ射であり，モノ射の押し出しはモノ射（cf. [4, Corollary IV.10.4]）であるから，v_2 はモノ射である．そこ

で，部分関数 (v_2, id_B) の classifying morphism $w_2 := \chi(v_2, \mathrm{id}_B)$ をとる．

$$
\begin{tikzcd}
& A \cap B \arrow[rr, "d_2"] \arrow[dl, "d_1"'] \arrow[dd, "r \cap s"] & & B \arrow[rr, "\mathrm{id}_B"] \arrow[dl, "v_2"'] \arrow[dd] & & B \arrow[dl, "j_B"] \arrow[dd, "s"] \\
A \arrow[rr, "v_1"] \arrow[dd, "r"'] & & A \cup B \arrow[rr, "w_2"'] \arrow[dd, "r \cup s"] & & \tilde{B} & \\
& P(A \cap B) \arrow[rr, "Pd_2"] \arrow[dl, "Pd_1"'] & & PB \arrow[rr, "\mathrm{id}_{PB}"] \arrow[dl, "Pv_2"] & & PB \arrow[dl, "Pj_B"] \\
PA \arrow[rr, "Pv_1"'] & & P(A \cup B) \arrow[rr, "Pw_2"'] & & P\tilde{B}. \arrow[uu, "\hat{s}"] &
\end{tikzcd}
$$

右側の立方体の前面が可換であることを示す．すなわち，$w_2 = \mathrm{rec}_{r \cup s}(\hat{s})$ を示す．押し出し正方図式の性質から，このためには，

$$w_2 v_i = \hat{s} P w_2 (r \cup s) v_i \quad (i = 1, 2)$$

を示せばよい．$i = 2$ の場合について考える．右側立方体の上面から右側面と背面，底面を経由して左側面にまわるように図式を追いかけると，

$$w_2 v_2 = j_B \mathrm{id}_B = \hat{s} P j_B s \mathrm{id}_B = \hat{s} P j_B \mathrm{id}_{PB} s = \hat{s} P w_2 P v_2 s = \hat{s} P w_2 (r \cup s) v_2$$

を得る．$i = 1$ の場合について考える．r が再帰的であることから，$w_2 v_1$ が $\hat{s}$ によって r-再帰的に定義されていること，すなわち，$w_2 v_1 = \mathrm{rec}_r(\hat{s})$ であるこを示せばよい．左側の立方体の上面は，モノ射 d_1 の押し出し正方図式であり，これは引き戻し正方図式でもある（cf. [4, Corollary IV.10.4]）から，二つの立方体の上面の長方形は引き戻し図式となっている．従って，$w_2 v_1$ は部分関数 (d_1, d_2) の classifying morphism である．一方，図式 (4.14) において，$\mathrm{rec}_r(\hat{s})$ も部分関数 (d_1, d_2) の classifying morphism として与えられていた．よって，$w_2 = \mathrm{rec}_r(\hat{s}) = \hat{s} P w_2 (r \cup s)$ である．

さて，$r \cup s$ がモノ射であることを示すために，$x_1, x_2 : C \to A \cup B$ で

$$(r \cup s) x_1 = (r \cup s) x_2$$

であるものをとる．$w_2 = \hat{s} P w_2 (r \cup s)$ であるから，$w_2 x_1 = w_2 x_2$ である．j_B の $w_2 x_i$ $(i = 1, 2)$ に沿った引き戻しを考える：

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{pb}(x_i w_2, v_2) \arrow[r, "z_2"] \arrow[d, "y_2"'] & B \arrow[r, "\mathrm{id}_B"] \arrow[d, "v_2"] & B \arrow[d, "j_B"] \\
C \arrow[r, "x_i"'] & A \cup B \arrow[r, "w_2"'] & \tilde{B}.
\end{tikzcd}
$$

右側の正方形は引き戻し正方図式であったから，左側の正方形も引き戻し正方図式である．$w_2 x_1 = w_2 x_2$ であるから，y_2, z_2 は x_i $(i = 1, 2)$ に依らない．従って，$\mathrm{pb}(x_1, v_2) = \mathrm{pb}(x_i w_2, j_B) = \mathrm{pb}(x_2, v_2)$ である．同様にして，$\mathrm{pb}(x_1, v_1) = \mathrm{pb}(x_2, v_1)$ を得ることが

できる．具体的には，次の図式を考える：

$$\begin{tikzcd}
& A \cap B \arrow[rr, "d_1"] \arrow[dl, "d_2"'] \arrow[dd, "r \cap s"' near start] & & A \arrow[rr, "\mathrm{id}_A"] \arrow[dl, "v_1"'] \arrow[dd] & & A \arrow[dl, "j_A"] \arrow[dd, "r"] \\
B \arrow[rr, "v_2" near start] \arrow[dd, "s"'] & & A \cup B \arrow[rr, "w_1"' near start] \arrow[dd, "r \cup s" near start] & & \tilde{A} & \\
& P(A \cap B) \arrow[rr, "Pd_1" near start] \arrow[dl, "Pd_2"'] & & PB \arrow[rr, "\mathrm{id}_{PA}" near start] \arrow[dl, "Pv_1"] & & PA \arrow[dl, "Pj_A"] \\
PB \arrow[rr, "Pv_2"'] & & P(A \cup B) \arrow[rr, "Pw_1"'] & & P\tilde{A}. \arrow[uu, "\hat{r}"' near end] &
\end{tikzcd}$$

ここで，w_1 は部分関数 (v_1, id_A) の classifying morphism である（d_2 は包含射 $\mathrm{in}(r \cap s, s)$ であるからモノ射であり，モノ射の押し出しである v_1 もモノ射であることに注意）．$w_2 = \mathrm{rec}_r(\hat{s})$ を示したときと同様にして，$w_1 = \mathrm{rec}_s(\hat{r}) = \hat{r}Pw_1 r \cup s$ が示され，$w_1 x_1 = w_1 x_2$ を得る．j_A の $w_1 x_i$ $(i = 1, 2)$ に沿った引き戻しを考える：

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{pb}(x_i w_1, v_1) \arrow[r, "z_1"] \arrow[d, "y_1"'] & A \arrow[r, "\mathrm{id}_A"] \arrow[d, "v_1"] & A \arrow[d, "j_A"] \\
C \arrow[r, "x_i"'] & A \cup B \arrow[r, "w_1"'] & \tilde{A}.
\end{tikzcd}$$

右側の正方形は引き戻し正方図式であったから，左側の正方形も引き戻し正方図式である．$w_1 x_1 = w_1 x_2$ であるから，y_1, z_1 は x_i $(i = 1, 2)$ に依らない．従って，$\mathrm{pb}(x_1, v_1) = \mathrm{pb}(x_2, v_1)$ である．

次の図式を考える：

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{pb}(z_1, z_2) \arrow[rr, "p_2"] \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dd, dotted] & & \mathrm{pb}(x_i, v_2) \arrow[dl, "z_2"] \arrow[dd, "y_2"] \\
\mathrm{pb}(x_i, v_1) \arrow[rr, "z_1"' near end] \arrow[dd, "y_1"'] & & C \arrow[dd, "x_i" near end] & \\
& A \cap B \arrow[rr, "d_2" near start] \arrow[dl, "d_1"'] & & B \arrow[dl, "v_2"] \\
A \arrow[rr, "v_1"'] & & A \cap B. &
\end{tikzcd}$$

押し出し正方図式の引き戻しは押し出し正方図式であるから，上図の上面は押し出し正方図式である．立方体の外側の射を追いかけると

$$v_1 y_1 p_1 = x_i z_1 p_1 = x_i z_2 p_2 = v_2 y_2 p_2 \quad (i = 1, 2)$$

を得る．一方，x_1 と x_2 は共に上図の前面と右側面を可換にするような射である．上面の押し出し図式の普遍性より，$x_1 = x_2$ を得る．よって，$r \cup s$ はモノ射である．

最後に，$r \cup s$ が r と s の上限となっていることを示す．図式 (4.15) の前面と右側面の可換性より，$v_1 = \mathrm{in}(r, r \cup s)$ かつ $v_2 = \mathrm{in}(s, r \cup s)$，すなわち，

$$r \subseteq r \cup s \quad \text{and} \qquad s \subseteq r \cup s$$

を得る．いま，推移的集合対象 $t : C \to PC$ で，$r \subseteq t$ かつ $s \subseteq t$ を満たすものが存在したとする．このとき，$r \cap s \subseteq t$ であり，$\subseteq$ は半順序を定めることから，

$$\mathrm{in}(r,t)d_1 = \mathrm{in}(r,t) \circ \mathrm{in}(r \cap s, t) = \mathrm{in}(r \cap s, r) = \mathrm{in}(s,t) \circ \mathrm{in}(r \cap s, s) = \mathrm{in}(s,t)d_2$$

が成立する．よって，$A \cap B$ を定める押し出し正方図式（図式 (4.15) の上面）の普遍性から，射 $h : A \cup B \to C$ で

$$hv_1 = \mathrm{in}(r,t) \quad \text{and} \quad hv_2 = \mathrm{in}(s,t)$$

を満たすものが存在する．このとき，

$$thv_i = t\mathrm{in}(r,t) = P\mathrm{in}(r,t)r = PhPv_ir = Ph(r \cup s)v_i \quad (i = 1, 2)$$

を得る．(v_1, v_2) がエピ射であることから，$th = Ph(r \cup s)$，すなわち，$r \cup s \subseteq t$ を得る．以上により，定理は示された．■

事実 4.6.11 射 $0 \to P0$ は最小の推移的集合対象である．□

事実 4.6.12 $r : A \to PA$ が推移的集合対象であるとき，$Pr : PA \to PPA$ も推移的集合対象である．□

証明 $r : A \to PA$ はモノ射であるから，Pr もモノ射である．Pr が再帰性を持つことを示せばよい．射 $g : PB \to B$ をとる．r が再帰的であることから，$gP\mathrm{rec}_r(g)r = \mathrm{rec}_r(g)$ である．$f := g \circ P(\mathrm{rec}_r(g))$ とおくと，

$$gPfPr = g(PgPP(\mathrm{rec}_r(g)))Pr = gP(gP\mathrm{rec}_r(g)r) = gP\mathrm{rec}_r(g) = f.$$

これは，$f = \mathrm{rec}_{Pr}(g)$ であることを意味する．■

定義 4.6.13 (部分的に推移的な対象) 対象 A が**部分的に推移的**（partially trasitive）であるとは，推移的集合対象 $r : B \rightarrowtail PB$ で $A \subseteq B$ なるものが存在することをいう．ここで，$A \subseteq B$ は，モノ射 $m : A \rightarrowtail B$ が存在することを指す．◊

部分的に推移的対象全体の成す部分圏は “subtopos” である：

定理 4.6.14 (in ET) 始対象 0，終対象 1 と真理値対象 Ω は部分的に推移的である．さらに，部分的に推移的な対象全体は，有限極限，有限余極限と冪演算で閉じている．□

証明 まず，対象 A が部分的に推移的であることと，PA が部分的に推移的であることが同値であることを示しておく．もし PA が部分的に推移的であるならば，モノ射 $m : PA \rightarrowtail B$ と推移的集合対象 $s : B \rightarrowtail PB$ が存在する．モノ射である単元射 $\{\cdot\}_A : A \rightarrowtail PA$ が存在することにより，A も部分的に推移的である．逆に，A が部分的に推移的であるとすると，モノ射 $m : A \rightarrowtail B$ と推移的集合対象 $s : B \rightarrowtail PB$ が存在する．冪対象関手がモノ射を保つことから，$Pm : PA \rightarrowtail PB$ もモノ射であり，事実 4.6.12 より，$Ps : PB \rightarrowtail PPB$ も推移的集合対象である．よって，PA は部分的に推移的である．

事実 4.6.11 より，始対象 0 は部分的に推移的である．同型 $1 \cong P0$ と $\Omega \cong P1$ により，終対象 1 と真理値対象 Ω も部分的に推移的である．

次に，部分的に推移的な対象 A, B に対して，$A \times B$ と $A + B$ も部分的に推移的であることを示す．定理 4.6.10 より，推移的集合対象 $t : D \rightarrowtail PD$ で $A \subseteq D$ かつ $B \subseteq D$ であるものが存在する．従って，モノ射 $m : A \rightarrowtail D$ と $n : B \rightarrowtail D$ が存在する．モノ射 m, n の直積 $m \times n : A \times B \to D \times D$ と直和 $m + n : A + B \rightarrowtail D + D$ はまたモノ射（cf. [4, Corollary IV.10.6]）だから，$A \times B \subseteq D \times D$ かつ $A + B \subseteq D + D$ である．$A \times B$ と $A + B$ が部分的に推移的であることを示すためには，$D \times D$ と $D + D$ が部分的に推移的であることを示せばよい．モノ射 $k : \{\cdot\}_{PD}\{\cdot\}_D : D \rightarrowtail PD \rightarrowtail PPD$ とモノ射 $l : P_D\{\cdot\}_D : D \rightarrowtail PD \rightarrowtail PPD$ のイコライザは始対象となる．従って，$(k, l) : D + D \rightarrowtail PPD$ はモノ射となり，$D + D \subseteq PPD$ を得る．$t : D \rightarrowtail PD$ は推移的集合対象であったから，事実 4.6.12 より，$PPt : PPD \rightarrowtail PPPD$ も推移的集合対象であり，従って，$D + D$ は部分的に推移的である．また，不等式

$$D \times D \subseteq PD \times PD \cong P(D + D) \subseteq PPPD$$

により，$D \times D$ も部分的に推移的であることがわかる．

次に，部分的に推移的な対象 A, B と射 $f, g : A \to B$ に対して，f と g のイコライザ E とコイコライザ Q もまた，部分的に推移的であることを示す．A と B のイコライザとコイコライザの図式

$$E \rightarrowtail^{e} A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B \xrightarrow{q} \!\!\!\!\rightarrow Q$$

を考える．e はモノ射であるから，E もまた部分的に推移的である．コイコライザはエピ射であるから，Q が部分的に推移的であることを示すためには，エピ射 $q : B \twoheadrightarrow Q$ のドメイン B が部分的に推移的であるとき，q のコドメインもまた部分的に推移的であることを示せば十分である．$q : B \twoheadrightarrow Q$ をエピ射とする．事実 4.5.9 より，$P^*q : PQ \to PB$ はモノ射であり，B が部分的に推移的であることから PB も部分的に推移的である．従って，PQ も部分的に推移的である．よって，Q は部分的に推移的である．

最後に，指数対象 B^A について考える．合成射

$$\Delta_B \circ (\mathrm{ev}_{A,B} \times \mathrm{id}_B) : B^A \times A \times B \to B \times B \rightarrowtail \Omega$$

の exponential transpose $B^A \rightarrowtail P(A \times B)$ はモノ射であり，$P(A \times B)$ は部分的に推移的であるから，B^A は部分的に推移的である．

有限極限，有限余極限はそれぞれ，二項直積とイコライザ，二項直和とコイコライザにより得られるから，以上により，定理は示された．■

4.7　トポス理論における集合対象のモデルの定義

EWPT で作業して，集合論のモデルをつくる．まず，“local set theory” を定義する．

定義 4.7.1 (local set theory) 各対象 A に対して，「A に関する local set theory」を以下のように定義する：射 $a : 1 \rightarrowtail A$ と部分対象 $M : A \to \Omega$ をそれぞれ，A-元（A-element）と A-集合（A-set）と呼ぶ．さらに，A-元 $a : 1 \rightarrowtail A$ と A-集合 $M : A \to \Omega$ に対して，A に関する所属関係 $\in_A$ を，次で定義する：

$$a \in_A M \overset{\text{def}}{\iff} Ma = \text{true}. \tag{4.17}$$

A-集合 $M : A \to \Omega$，$N : A \to \Omega$ に対して，A に関する部分集合関係 $\subseteq_A$ を，次で定義する：

$$M \subseteq_A N \overset{\text{def}}{\iff} \forall(a : 1 \rightarrowtail A)[a \in_A M \implies a \in_A N]. \tag{4.18}$$

$\Diamond$

事実 4.7.2 A-集合 $M, N : A \to \Omega$ に対して，次が成立する：

$$M \subseteq_A N \quad \text{iff} \quad M \subseteq N.$$

$\square$

証明 M, N が classify するモノ射をそれぞれ，$m : B \rightarrowtail A$, $n : C \rightarrowtail A$ とおき，m と n の引き戻しをとる：

$$\begin{tikzcd}
B \cap C \arrow[r, tail, "k"] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & B \arrow[d, "m"] \\
C \arrow[r, tail, "n"'] & A.
\end{tikzcd}$$

$M \subseteq N$ は $M = M \cap N$ と同値だから，これは k がエピ射となることと同値である（k はモノ射であり，トポスにおいてモノかつエピである射は同型射であることに注意）．事実 4.3.15 (iv) より，k がエピであることは，任意の B-元 y に対して射 $x : 1 \to B \cap C$ で $y = kx$ となるものが存在することと同値であるが，次の図式に注意すれば，この条件は，任意の A-元 $a : 1 \to A$ に対して，$a \in_A M$ ならば $a \in_A N$ であること，すなわち，$M \subseteq_A N$ と同値である：

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr, dotted, "y"] \arrow[drr, bend left, "!^1"] \arrow[ddr, bend right, "a"'] & & \\
& B \arrow[r, "!^B"] \arrow[d, "m"] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & 1 \arrow[d, "\text{true}"] \\
& A \arrow[r, "M"'] & \Omega,
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr, dotted, "x"] \arrow[drr, bend left, "!^1"] \arrow[ddr, bend right, "y"'] & & \\
& B \cap C \arrow[r, "!^{B \cap C}"] \arrow[d, "k"] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & 1 \arrow[d, "\text{true}"] \\
& B \arrow[r, "K"'] & \Omega.
\end{tikzcd}$$

ここで，K は k の classifying morphism である． ■

事実 4.7.2 より，次が従う．

事実 4.7.3 A-集合 $M, N : A \to \Omega$ に対して，次が成立する：

$$\begin{aligned} & M \subseteq_A N \quad \text{and} \quad N \subseteq_A M \\ \text{iff} \quad & M = N. \end{aligned}$$

$\square$

記法 4.7.1 局所集合論に対する内包表記を導入する．事実 4.7.3 より，ET の論理式 $F(x)$ に対して，

$$\forall x : 1 \to A(x \in_A M \iff F(x))$$

を満たす A-集合 $M : A \to \Omega$ が存在するならば唯一つに定まる．この M を

$$\{x \mid_A F(x)\}.$$

と表記する． $\Diamond$

事実 4.7.4 $1(A)$ は「普遍集合」$\mathbf{E}_A$ である：

$$\mathbf{E}_A := 1(A) = \{x \mid_A x = x\}. \qquad \square$$

事実 4.7.5 $0(A)$ は「空集合」$\emptyset_A$ である：

$$\emptyset_A := 0(A) = \{x \mid_A \neg(x = x)\}. \qquad \square$$

事実 4.7.6 A-集合 M, N に対して，次が成立する：

(i) $\neg M$ は M の「補集合」である：

$$\neg M = \{x \mid_A \neg(x \in_A M)\};$$

(ii) $M \cap N$ は M と N の「共通部分」である：

$$M \cap N = \{x \mid_A x \in_A M \wedge x \in_A N\};$$

(iii) $M \cup N$ は M と N の「和集合」である：

$$M \cup N = \{x \mid_A x \in_A M \vee \in_A N\}. \qquad \square$$

事実 4.7.7 A-元 x の classifying morphism $\chi(x)$ は，x の「単元集合」$\{x\}_A$ である：

$$\{x\}_A := \chi(x) = \{y \mid_A y = x\}. \qquad \square$$

事実 4.7.8 A-集合 M と B-集合 N，射 $f : A \to B$ に対して，次が成立する：

(i) $f^{-1}[N] = \{x \mid_A fx \in_B N\}$;
(ii) $f\langle M\rangle = \{y \mid_B \forall(x : 1 \to A)(fx = y \implies x \in_A M)\}$;
(iii) $f[M] = \{y \mid_B \exists(x : 1 \to A)(fx = y \wedge x \in_A M)\}$. $\square$

証明 (i) 任意の A-元 $x : 1 \to A$ に対して，

$$x \in_A f^{-1}[N] \quad \text{iff} \quad fx \in_B N$$

が成立することを示せばよいが，

$$\begin{array}{ll} & x \in_A f^{-1}[N] \\ \text{iff} & x \in_A N \circ f \\ \text{iff} & (N \circ f)x = \text{true} \\ \text{iff} & N \circ (fx) = \text{true} \\ \text{iff} & fx \in_B N \end{array}$$

によりよい．

(ii) 簡単のため，

$$N := \{y \mid_B \forall(x : 1 \to A)(fx = y \implies x \in_A M)\}$$

とおく．(a)$N \subseteq f\langle M\rangle$ と (b)$f\langle M\rangle \subseteq N$ を示せばよい．(a) について．随伴 $f^{-1}[-] \dashv f\langle -\rangle$ より，$N \subseteq f\langle M\rangle$ は $f^{-1}[N] \subseteq M$ と同値である．(i) より，任意の A-元 x に対して，

$$x \in_A f^{-1}[N] \quad \text{iff} \quad fx \in_B N$$

であるが，N の定義より，これは $x \in_B M$ を意味する．よって，$f^{-1}[N] \subseteq M$ を得る．

(b) について．$y \in_B f\langle M\rangle$ をとる．ある A-元 x が存在して $y = fx$ であるとする．このとき，$x \in_A M$ を示せばよい．次に注意する：

$$\begin{aligned} & fx \in_B f\langle M\rangle \\ \text{iff} \quad & f\langle M\rangle(fx) = \text{true} \\ \text{iff} \quad & f^{-1}[f\langle M\rangle]\,x = \text{true} \\ \text{iff} \quad & x \in_A f^{-1}[f\langle M\rangle]. \end{aligned}$$

随伴 $f^{-1}[-] \dashv f\langle -\rangle$ の counit は $f^{-1}[f\langle M\rangle] \subseteq M$ を与える．よって，$x \in_A M$ を得る．

(iii) 簡単のため，

$$N := \{y \mid_B \exists(x : 1 \to A)(fx = y \wedge x \in_A M)\}$$

とおく．(a)$f[M] \subseteq N$ と (b)$N \subseteq f[M]$ を示せばよい．(a) について．随伴 $f[-] \dashv f^{-1}[-]$ より，$f[M] \subseteq N$ は $M \subseteq f^{-1}[N]$ と同値である．(i) より，任意の A-元 x に対して

$$x \in_A f^{-1}[N] \quad \text{iff} \quad fx \in_B N$$

であるが，$x \in_A M$ ととると，N の定義より $fx \in_B N$ である．よって，$M \subseteq f^{-1}[N]$ が成立する．(b) について．B-元 y で $y \in_B N$ であるものをとる．このとき，N の定義より，ある A-元 x で $fx = y$ かつ $x \in_A M$ であるものが存在する．$fx \in_B f[M]$ を示せばよい．次に注意する：

$$\begin{aligned} & fx \in_B f[M] \\ \text{iff} \quad & f[M]\,fx = \text{true} \\ \text{iff} \quad & f^{-1}[f[M]] = \text{true} \\ \text{iff} \quad & x \in_A f^{-1}[f[M]]. \end{aligned}$$

さらに，随伴 $f[-] \dashv f^{-1}[-]$ のユニットより，$M \subseteq f^{-1}[f[M]]$ であるから，$x \in_A M$ は $fx \in_B f[M]$ を意味する．以上より，$N \subseteq f[M]$ が成立する．■

事実 4.7.9 A-集合 M に対して，次が成立する：

$$P[M] = \{N_{\mathrm{e}} \mid_{PA} N \text{ は } A\text{-集合} \wedge N \subseteq M\}. \qquad \square$$

証明 A-集合 $N : A \to \Omega$ に対して，

$$N_{\mathrm{e}} \in_A P[M] \quad \text{iff} \quad N \subseteq M$$

となることを示せばよい．M が classify するモノ射を $m : C \rightarrowtail A$ と書く．次に注意する：

$$N_{\mathrm{e}} \in_A P[M] \quad \text{iff} \quad P[M] \circ N_{\mathrm{e}} = \text{true}.$$

この条件は，次の図式にあるように，N_{e} が Pm を経由して分解されることと同値である：

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[rrd, bend left, "!^1"] \arrow[rd, dotted, "L_{\mathrm{e}}"] \arrow[rdd, bend right, "N_{\mathrm{e}}"'] & & \\
& PC \arrow[r, "!^{PC}"] \arrow[d, tail, "Pm"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & 1 \arrow[d, tail, "\mathrm{true}"] \\
& PA \arrow[r, "P[M]"'] & \Omega.
\end{tikzcd}$$

事実 4.5.8 (i) より，この条件は，C-集合 $L : C \to \Omega$ で $m\,[L] = N$ となるものが存在することと同値である．L が classify するモノ射を $l : B \rightarrowtail C$ と書くと，m がモノ射であることから，これは $ml = n$ と同値であり，従って $N \subseteq M$ と同値である． ■

事実 4.7.10 A-集合 M, N に対して，次が成立する：

$$M \times N = \{\langle x, y\rangle\,|_{A\times B}\, x \in_A M \wedge y \in_B N\}\,. \qquad \square$$

事実 4.7.11

$$e_A = \{\langle M_{\mathrm{e}}, x\rangle\,|_{PA\times A}\, M \text{ は } A\text{-集合} \wedge x \text{ は } A\text{-元} \wedge x \in_A M\}\,. \qquad \square$$

定義 4.7.12 外延的関係 $r : A \to PA$ と A-集合 M に対して，PA-元 M_{e} が r を経由して分解されるとき，M は r-元であるという．すなわち，M が r-元であるとは，A-元 x が存在して，$M_{\mathrm{e}} = rx$ が成立することをいう：

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[d, dotted, "x"'] \arrow[dr, "M_{\mathrm{e}}"] & \\
A \arrow[r, "r"'] & PA.
\end{tikzcd}$$

◊

r が外延的であることから，r-元 M と M_{e} を分解する A-元 x は一対一に対応する．そこで，この対応を，$M = (x|r)$ と $x = (M|r)$ と表記する．局所所属関係 $\in_A$ は，A-集合間の所属関係を誘導する：

定義 4.7.13 A-集合 M, N に対して，

$$M \in_r N \overset{\mathrm{def}}{\iff} M \text{ は } r\text{-元} \quad \text{and} \quad (M|r) \in_A N. \qquad \lozenge$$

事実 4.7.14 2 つの外延的関係 $r : A \to PA$ と $s : B \to PB$ に包含射 $i : r \hookrightarrow s$ が存在するとする．このとき，A-元 x と A-集合 M, N に対して，次が成立する：

(i) $(ix|s) = i\,[(x|r)]$;
(ii) M が r-元であるならば，$i\,[M]$ は s-元であり，$i(M|r) = (i\,[M]\,|s)$;
(iii) i がモノ射であるならば，$M \in_r N$ iff $i\,[M] \in_s i\,[N]$. □

証明 (i) $(ix|s)_{\mathrm{e}} = i\,[(x|r)]_{\mathrm{e}}$ を示せばよい．事実 4.5.8 (i) より，

$$i\,[(x|r)]_{\mathrm{e}} = (Pi)(x|r)_{\mathrm{e}}$$

であることに注意する．さらに，i が r から s への包含射であることに注意すると，次を得る：

$$\begin{aligned} (ix|s)_{\mathrm{e}} &= six && (\because (ix|s)_{\mathrm{e}} \text{の定義}) \\ &= (Pi)rx && (\because i : r \hookrightarrow s) \\ &= (Pi)(x|r)_{\mathrm{e}} && (\because (x|r)_{\mathrm{e}} \text{の定義}) \\ &= i\left[(x|s)\right]_{\mathrm{e}}. \end{aligned}$$

(ii) M が r-元であるとする．すなわち，$r(M|r) = M_{\mathrm{e}}$ とする．このとき，事実 4.5.8 (i) より，次が可換図式となる：

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "(M|r)"'] \arrow[dr, "M_{\mathrm{e}}"] & \\ A \arrow[r, "r"] \arrow[d, "i"'] & PA \arrow[d, "Pi"] \\ B \arrow[r, "s"'] & PB. \end{tikzcd}$$

すなわち，次が成立する：

$$\begin{aligned} i\left[M\right]_{\mathrm{e}} &= (Pi) \circ M_{\mathrm{e}} \\ &= (Pi) \circ r(M|r) \\ &= si(M|r). \end{aligned}$$

これは，$(i\left[M\right]|s) = i(M|r)$ であり，$i\left[M\right]$ が s-元であることを意味する．

(iii) $M \in_r N$ とする．すなわち，M は r-元かつ $(M|r) \in_A N$ とする．(ii) より，$i\left[M\right]$ は s-元であるから，$(i\left[M\right]|s) \in_A i\left[N\right]$ を示せばよい．(ii) より，$(i\left[M\right]|s) = i(M|r)$ だから，$i\left[N\right] \circ i(M|r) = \mathrm{true}$ を示せばよい．仮定より，$(M|r) \in_A N$，すなわち，$N(M|r) = \mathrm{true}$ であるから，$i\left[N\right] \circ i = N$ を示せばよい（次の図式参照）：

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "(M|r)"'] \arrow[ddr, bend left, "\mathrm{true}"] & \\ A \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, "N"] & \\ B \arrow[r, "i[N]"'] & \Omega. \end{tikzcd}$$

i はモノ射だから，事実 4.5.5 (iii) より

$$i\left[N\right] \circ i = i^{-1}\left[i\left[N\right]\right] = N. \tag{4.19}$$

を得る．逆に，$i\left[M\right] \in_s i\left[N\right]$ とする．このとき，$(i\left[M\right]|s) \in_B i\left[N\right]$ である．M が r-元であれば，(ii) より，$i\left[N\right] i(M|r) = \mathrm{true}$ である．このとき，(4.19) より，$N(M|r) = \mathrm{true}$ を得る．すなわち，$(M|r) \in_A N$ である．そこで，M が r-元であることを示す．仮定より，$i\left[M\right]$ は s-元であるから，$sy = i\left[M\right]_{\mathrm{e}}$ となる B-元 y が存在する．N が classify するモノ射を $n : C \rightarrowtail A$ と書く．仮定より，$i\left[N\right] y = \mathrm{true}$

であるから，射 $z : 1 \to C$ で $i\,[n]\,z = y$ となるものが存在する：

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr, dotted, "z"] \arrow[drr, bend left, "!^1"] \arrow[ddr, bend right, "y"'] & & \\
& C \arrow[r, "!^C"] \arrow[d, tail, "{i[n]}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & 1 \arrow[d, tail, "\mathrm{true}"] \\
& B \arrow[r, "{i[N]}"'] & \Omega.
\end{tikzcd}
$$

次の引き戻し図式を考える：

$$
\begin{tikzcd}
q^{-1}\,[1] \arrow[r, tail] \arrow[d, tail, "{q^{-1}[z]}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & 1 \arrow[d, tail, "z"] \\
i^{-1}\,[i\,[C]] \arrow[r, tail, "q"] \arrow[d, tail, "{i^{-1}[i[n]]}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & i\,[C] \arrow[d, tail, "{i[n]}"] \\
A \arrow[r, tail, "i"'] & B.
\end{tikzcd}
$$

$i^{-1}\,[i\,[N]] = N$ より，q は同型射となる．よって，$q^{-1}\,[1]$ は終対象である．これは，射 $x : 1 \to A$ で $ix = y$ となるものが存在することを意味する．従って，

$$(Pi)M_{\mathrm{e}} = i\,[M]_{\mathrm{e}} = sy = six = (Pi)rx$$

を得るが，Pi はモノ射であるから，$M_{\mathrm{e}} = rx$ となる．よって，M は r-元である．
■

トポスの理論における「集合」対象を，「推移的集合の部分集合」となるように定義する：

定義 4.7.15 (in ET) 推移的関係 $r : A \to PA$ と部分対象 $M : A \to \Omega$ の組 (r, M) を**集合対象**（set-object）と呼ぶ． ◊

定義 4.7.16 集合対象 (r, M) と (s, N) が**同値**（equivalent）であるとは，包含射 $r \to r \cup s$ と $s \to r \cup s$ が M と N を同じ部分対象へ送ること，すなわち，

$$\mathrm{in}(r, r \cup s)\,[M] = \mathrm{in}(s, r \cup s)\,[N]$$

が成立することと定義し，$(r, M) \sim (s, N)$ と表記する． ◊

事実 4.7.17 集合対象 (r, M) と (s, N) に対して，次は同値である：

(i) $(r, M) \sim (s, N)$;

(ii) 推移的集合対象 t で，$r \subseteq t, s \subseteq t$ と $\mathrm{in}(r, t)\,[M] = \mathrm{in}(s, t)\,[N]$ を満たすものが存在する;

(iii) 任意の推移的集合対象 t に対して，$r \subseteq t$ と $s \subseteq t$ は $\mathrm{in}(r, t)\,[M] = \mathrm{in}(s, t)\,[N]$ を意味する． □

証明 (i) $\Longrightarrow$ (ii) : $t = r \cup s$ ととればよい．

(ii) $\Longrightarrow$ (i)：推移的集合対象 t で，$r \subseteq t, s \subseteq t$ と $\mathrm{in}(r,t)\,[M] = \mathrm{in}(s,t)\,[N]$ を満たすものが存在するとする．このとき，$r, s \subseteq r \cup s \subseteq t$ より，

$$\mathrm{in}(r,t) = \mathrm{in}(r \cup s, t) \circ \mathrm{in}(r, r \cup s),$$
$$\mathrm{in}(s,t) = \mathrm{in}(r \cup s, t) \circ \mathrm{in}(s, r \cup s)$$

であるから，

$$(\mathrm{in}(r \cup s, t) \circ \mathrm{in}(r, r \cup s))\,[M] = (\mathrm{in}(r \cup s, t) \circ \mathrm{in}(s, r \cup s))\,[N]$$

を得る．$\mathrm{in}(r \cup s, t)$ はモノ射であるから，事実 4.5.5 (iii) より，

$$\mathrm{in}(r, r \cup s)\,[M] = \mathrm{in}(s, r \cup s)\,[N]$$

を得る．

(i) $\Longrightarrow$ (iii)：$\mathrm{in}(r, r \cup s)\,[M] = \mathrm{in}(s, r \cup s)\,[N]$ とする．このとき，$r \subseteq t$ かつ $s \subseteq t$ である任意の推移的集合対象 t について，$r \cup s \subseteq t$ であるから，

$$\begin{aligned}\mathrm{in}(r,t)\,[M] =& (\mathrm{in}(r \cup s, t) \circ \mathrm{in}(r, r \cup s))\,[M] \\ =& (\mathrm{in}(r \cup s, t) \circ \mathrm{in}(s, r \cup s))\,[N] = \mathrm{in}(s,t)\,[N]\end{aligned}$$

が成立する．

(iii) $\Longrightarrow$ (i)：仮定 (iii) で $t = r \cup s$ ととればよい． ■

補題 4.7.18 集合対象 $(r, M), (r, N)$ に対して，次が成立する：

$$(r, M) \sim (r, N) \quad \text{iff} \quad M = N. \qquad \square$$

証明 事実 4.7.17 (iii) において，$t = r = s$ ととればよい． ■

補題 4.7.19 推移的集合対象 r, s, t で $r \subseteq t, s \subseteq t$ であるものと，r-元 M と s-元 N に対して，次が成立する：

$$(r, M) \sim (s, N) \quad \text{iff} \quad \mathrm{in}(r,t)(M|r) = \mathrm{in}(s,t)(N|s). \qquad \square$$

証明 $(r, M) \sim (s, N)$ とすると，事実 4.7.14 (ii) と事実 4.7.17 (iii) より，

$$\mathrm{in}(r,t)(M|r) = (\mathrm{in}(r,t)\,[M]\,|t) = (\mathrm{in}(s,t)\,[N]\,|t) = \mathrm{in}(s,t)(N|r).$$

逆に，$\mathrm{in}(r,t)(M|r) = \mathrm{in}(s,t)(N|s)$ とすると，

$$\mathrm{in}(r,t)\,[M] = \mathrm{in}(s,t)\,[N]$$

であるが，事実 4.7.17 (ii) より，これは $(r, M) \sim (s, N)$ を意味する． ■

定義 4.7.20 (in ET) 2 つの集合対象 (r, M) と (s, N) に対して，$(r, M) \in (s, N)$ が成立するということを，集合対象 (t, M') と (t, N') が存在して $(r, M) \sim (t, M')$ かつ $(s, N) \sim (t, N')$ かつ $M' \Subset_t N'$ であることと定義する． ◊

事実 4.7.21 2 つの集合対象 (r, M) と (s, N) に対して，次は同値である：

(i) $(r, M) \in (s, N)$;

(ii) s-元 $K \in_s N$ で $(r, M) \sim (s, K)$ なるものが存在する；

(iii) $\mathrm{in}(r, r \cup s)[M] \in_{r \cup s} \mathrm{in}[s, r \cup s][N]$. □

証明 (i) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (i) の順に示す．

(i) $\Longrightarrow$ (iii)：集合対象 $(t, M'), (t, N')$ で

$$(r, M) \sim (t, M'), \quad (s, N) \sim (t, N'), \quad M' \in_t N'$$

を満たすものが存在したとする．$(r, M) \sim (t, M')$ より，

$$\mathrm{in}(r, r \cup s)\,[M] = \mathrm{in}(t, r \cup s)\,[M'].$$

$(s, N) \sim (t, N')$ より，

$$\mathrm{in}(s, r \cup s)\,[M] = \mathrm{in}(t, r \cup s)\,[M']$$

を得る．ここで，$u = r \cup s \cup t$ とおくと，$r \cup t, s \cup t \subseteq u$ だから，

$$\mathrm{in}(r, u)\,[M] = \mathrm{in}(t, u)\,[M'],$$
$$\mathrm{in}(s, u)\,[N] = \mathrm{in}(t, u)\,[N']$$

が成立する．これらと $M' \in_t N'$，事実 4.7.14 (iii) より，

$$\mathrm{in}(r, u)\,[M] = \mathrm{in}(t, u)\,[M'] \in_u \mathrm{in}(t, u)\,[N'] = \mathrm{in}(s, u)\,[N]$$

が成立する．$r \subseteq r \cup s \subseteq u$ だから，包含射は $\mathrm{in}(r, u) = \mathrm{in}(r \cup s, u) \circ \mathrm{in}(r, r \cup s)$, $\mathrm{in}(s, u) = \mathrm{in}(r \cup s, u) \circ \mathrm{in}(s, r \cup s)$ と分解される．これと事実 4.7.14 (iii) より，

$$\mathrm{in}(r, r \cup s)\,[M] \in_{r \cup s} \mathrm{in}(s, r \cup s)\,[N]$$

が成立する．

(iii) $\Longrightarrow$ (ii)：$\mathrm{in}(r, r \cup s)\,[M] \in_{r \cup s} \mathrm{in}(s, r \cup s)\,[N]$ とする．

$$K := \mathrm{in}(r, r \cup s)\,[M]$$

とおくと，K は $r \cup s$-元である．

$$(r, M) \sim (r \cup s, K)$$

を示せばよい．$r \subseteq r \cup s$, $r \cup s \subseteq r \cup s$ だから事実 4.7.17 (ii) より，

$$\mathrm{in}(r, r \cup s)\,[M] = \mathrm{in}((r \cup s, r \cup s) \circ \mathrm{in}(r, r \cup s))\,[M] = \mathrm{in}(r \cup s, r \cup s)\,[K]$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i)：s-元 K で $K \in_s N$ かつ $(r, M) \sim (s, K)$ を満たすものが存在したとする．このとき，集合対象 (s, K) と (s, N) が $(r, M) \in (s, N)$ を与える． ■

補題 4.7.22 2 つの集合対象 (r, M) と (r, N) に対して，次が成立する：

$$(r, M) \in (r, N) \quad \text{iff} \quad M \in_r N. \qquad \square$$

証明 事実 4.7.21 (iii) で $r = s$ ととればよい． ■

定義 4.7.23 (トポスの理論における集合対象のモデル) トポスの理論 EWPT における集合対象，その間の所属関係，同値関係をそれぞれ，集合，その間の所属関係，等号として解釈した集合論のモデルを，**トポスの理論における集合対象のモデル**と呼ぶ． ◊

定義 4.7.24 Z 集合論のモデルの元からなるトポスを $\mathcal{S}$ とする．$\mathcal{S}$ における集合 M に対して，$\mathcal{S}$ における集合対象を

$$\mathrm{Ob}(M) := (i : T \hookrightarrow \mathcal{P}(T), \bar{M} : T \to 2)$$

で定義する．ここで，T は M の推移閉包であり，$\bar{M}$ は，集合 M の特性関数である．逆に，$\mathcal{S}$ における集合対象 $(r : A \to \mathcal{P}(A), M : A \to 2)$ に対して，推移的集合対象 r の表現 $\mathrm{TR}(r)$ の部分集合 $\mathrm{Set}(r, M)$ を，公理 4.4.8 で与えられる同型写像 $f : A \to \mathrm{TR}(r)$ における M の像 $f[M]$ として与える． $\Diamond$

事実 4.7.25 (in Z) $\mathcal{S}$ における集合 M, N と $\mathcal{S}$ における集合対象 X, Y に対して，次が成立する：

(i) $\mathrm{Set}(\mathrm{Ob}(M)) = M$;
(ii) $\mathrm{Ob}(\mathrm{Set}(X)) \sim X$;
(iii) $X \sim Y \quad \text{iff} \quad \mathrm{Set}(X) = \mathrm{Set}(Y)$;
(iv) $X \in Y \quad \text{iff} \quad \mathrm{Set}(X) \in \mathrm{Set}(Y)$;
(v) $M = N \quad \text{iff} \quad \mathrm{Ob}(M) \sim \mathrm{Ob}(N)$;
(vi) $M \in N \quad \text{iff} \quad \mathrm{Ob}(M) \in \mathrm{Ob}(N)$. □

4.8　集合対象のモデルの性質

本節の目的は，前節で構成したトポスの理論における集合対象のモデルが集合論 Z の公理を満たすことを示すことにある．以下では，トポスの理論における集合対象のモデルを単に集合対象のモデルと呼ぶ．さらに，この集合論のモデルの集合がなすトポスが，もとのトポスと同値になることも示す．特に言及がない限り，EWPT で作業しているとする．

以下では，$r : A \to PA$, $s : B \to PB$ を推移的集合対象とする．

事実 4.8.1 (in EWPT) 集合対象 (r, M) と (s, N) に対して，次の 3 条件は同値である：

(i) $(r, M) \subseteq (s, N)$;
(ii) $\mathrm{in}(r, r \cup s)\,[M] \subseteq \mathrm{in}(s, r \cup s)\,[N]$;
(iii) 集合対象 (s, K) が存在して，$(r, M) \sim (s, K)$ と $K \subseteq N$ が成立する． □

証明 (i) $\implies$ (ii)：$(r, M) \subseteq (s, N)$ とする．$y \in_{A \cup B} \mathrm{in}(r, r \cup s)\,[M]$ をとる．事実 4.7.8 (iii) より，A-元 $x : 1 \to A$ で

$$\mathrm{in}(r, r \cup s)x = y \quad \text{and} \quad x \in_A M$$

を満たすものが存在する．r-元 $(x|r)$ は $((x|r)|r) = x \in_A M$ を満たすから，$(x|r) \in_r M$ を得る．補題 4.7.22 より，$(r, (x|r)) \in (r, M)$ である．仮定より，$(r, (x|r)) \in (s, N)$ を得る．事実 4.7.21 (ii) より，s-元 K で

$$K \in_s N \quad \text{and} \quad (r, (x|r)) \sim (s, K)$$

を満たすものが存在する．$x' := (K|s)$ とおくと，$K \in_s N$ より，$x' \in_B N$ を得る．一方，$(r, (x|r)) \sim (s, K)$ と $\mathrm{in}(r, r \cup s)x = y$，補題 4.7.19 から

$$\mathrm{in}(r, r \cup s)x = y = \mathrm{in}(s, r \cup s)x'$$

が成立する．事実 4.7.8 (iii) より，これは $y \in_{A \cup B} \mathrm{in}(s, r \cup s)\,[N]$ を意味する．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) : $K := \mathrm{in}(s, r \cup s)^{-1}\,[\mathrm{in}(r, r \cup s)\,[M]]$ とおくと，仮定 (ii) より，

$$\begin{aligned} K &= \mathrm{in}(s, r \cup s)^{-1}\,[\mathrm{in}(r, r \cup s)\,[M]] \\ &\subseteq \mathrm{in}(s, r \cup s)^{-1}\,[\mathrm{in}(r, r \cup s)\,[N]] \\ &= N && (\because \text{事実 } 4.5.5 \text{ (iii)}) \end{aligned}$$

が成立する．$(r, M) \sim (s, K)$ を示す．そのためには，

$$M' := \mathrm{in}(r, r \cup s)\,[M] = \mathrm{in}(s, r \cup s)\,[K] =: K'$$

を示せばよい．$N' := \mathrm{in}(s, r \cup s)\,[N]$ とおく．M', N' が classify するモノ射をそれぞれ，$m' : C' \rightarrowtail A \cup B, n' : D' \rightarrowtail A \cup B$ とおく．仮定より $M' \subseteq N'$ であるから，モノ射 $l : C' \rightarrowtail D'$ で $m' = n'l$ であるものが存在する．m', n' の $\mathrm{in}(s, r \cup s)$ に沿った引き戻しを考える：

$$\begin{tikzcd} \mathrm{in}(s, r \cup s)^{-1}\,[C'] \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "g^{-1}[l]"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & C' \arrow[d, tail, "l"] \arrow[dd, bend left=60, "m'"] \\ \mathrm{in}(s, r \cup s)^{-1}\,[D'] \arrow[r, "g"] \arrow[d, tail, "\mathrm{in}(s, r\cup s)^{-1}[n]"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & D' \arrow[d, tail, "n'"] \\ B \arrow[r, tail, "\mathrm{in}(s, r \cup s)"'] & A \cup B. \end{tikzcd}$$

上図の上下の正方形は，共に引き戻し正方図式である．$\mathrm{in}(s, r \cup s)$ はモノ射だから，$\mathrm{in}(s, r \cup s)^{-1}\,[\mathrm{in}(s, r \cup s)\,[N]] = N$ が成立する．これは，g が同型射であることを意味する．従って，その引き戻しである f も同型射である．これは，

$$K' = \mathrm{in}(s, r \cup s)\left[\mathrm{in}(s, r \cup s)^{-1}\,[M']\right] = M'$$

を意味する．

(iii) $\Longrightarrow$ (i) : 集合対象 $(q, L) \in (r, M)$ をとる．仮定 (iii) より，集合対象 (s, K) で

$$(r, M) \sim (s, K) \quad \text{and} \quad K \subseteq N$$

を満たすものが存在する．$(r, M) \sim (s, K)$ より，

$$\mathrm{in}(r, r \cup s)\,[M] = \mathrm{in}(s, r \cup s)\,[K]$$

である．$t := q \cup r \cup s$ ととると，$(q, L) \in (r, M)$ は事実 4.7.21 より，

$$\mathrm{in}(q, q \cup r)\,[L] \in_{q \cup r} \mathrm{in}(r, q \cup r)\,[M]$$

を意味する．事実 4.7.14 (i) より，

$$L' := \mathrm{in}(q, t)\,[L] \in_t \mathrm{in}(r, t)\,[M] = \mathrm{in}(s, t)\,[K] \subseteq \mathrm{in}(s, t)\,[N] =: N'$$

を得る．これは

$$(q, L) \sim (t, L') \quad \text{and} \quad (s, N) \sim (t, N') \quad \text{and} \quad L' \in_t N'$$

を意味する．事実 4.7.21 より，$(q, L) \in (s, N)$ を得る． ■

系 **4.8.2 (in EWPT)** 集合対象のモデルは，外延性公理を満たす．□

証明 事実 4.8.1 と事実 4.7.3 より，集合対象 $(r, M), (s, N)$ に対して，

$$(r, M) \subseteq (s, N) \quad \text{and} \quad (s, N) \subseteq (r, M)$$

は

$$\text{in}(r, r \cup s)\,[M] = \text{in}(s, r \cup s)\,[N]$$

を意味する．すなわち，$(r, M) \sim (s, N)$ である．■

以下では，外延性公理が成り立つことを言及することなく用いる．

補題 4.8.3 (in EWPT) 集合対象のモデルは，集合対象 $(o : 0 \to P0, \emptyset_0)$ を空集合としてもつ．□

証明 集合対象 (r, M) で $(r, M) \in (o, \emptyset_0)$ を満たすものが存在するとする．o は最小の推移的集合対象だったから，事実 4.7.21 (iii) より，$M \in_r \text{in}(o, r)\,[\emptyset_0]$，すなわち，

$$M \text{ は } r\text{-元} \quad \text{and} \quad (M|r) \in_A \text{in}(o, r)\,[\emptyset_0]$$

が成立する．事実 4.7.8 (iii) より，条件 $(M|r) \in_A \text{in}(o, r)\,[\emptyset_0]$ は，global element $x : 1 \to 0$ で

$$\text{in}(o, r)x = (M|r)$$

を満たすものが存在することを意味するが，$x : 1 \to 0$ なる射は存在しない．よって，$(r, M) \in (o, \emptyset_0)$ なる集合対象 (r, M) は存在しない．すなわち，$(o, \emptyset_0)$ は空集合である．■

補題 4.8.4 (in EWPT) (i) 集合対象 $(r, M), (r, N)$ に対して，M, N が共に r-元であるならば，次が成立する：

$$\{(r, M), (r, N)\} \sim (r, \{(M|r), (N|r)\}).$$

ここで，A-元 x, y に対して，$\{x, y\} = \{z \mid_A z = x \vee z = y\}$ である；

(ii) 集合対象 (r, M) に対して，

$$(r, M) \sim (Pr, r\,[M])$$

が成立する．さらに，$r\,[M]$ は

$$(r\,[M]\,|Pr) = M_{\mathrm{e}}$$

なる Pr-元である；

(iii) 集合対象のモデルは，対の公理を満たす．□

証明 (i) 集合対象

$$(q, L) \in \{(r, M), (r, N)\}$$

をとる．このとき，

$$(q, L) \sim (r, M) \quad \text{or} \quad (q, L) \sim (r, N)$$

である．$(q,L) \sim (r,M)$ とする．$M \in_r \{(M|r),(N|r)\}$ だから，

$$(q,L) \sim (r,M) \in (r,\{(M|r),(N|r)\})$$

である．$(q,L) \sim (r,N)$ の場合も同様である．

逆を考える．集合対象

$$(q,L) \sim (r,\{(M|r),(N|r)\})$$

をとる．事実 4.7.21 より，r-元 K で $K \in_r \{(M|r),(N|r)\}$ と $(q,L) \sim (r,K)$ を満たすものが存在する．このとき，$(K|r) \in_A \{(M|r),(N|r)\}$ であるから，

$$(K|r) = (M|r) \quad \text{or} \quad (K|r) = (N|r)$$

が成立する．すなわち，

$$K = M \quad \text{or} \quad K = N$$

である．よって，

$$(q,L) \sim (r,M) \quad \text{or} \quad (q,L) \sim (r,N)$$

を得る．すなわち，

$$(q,L) \in \{(r,M),(r,N)\}$$

が成立する．

(ii) $\mathrm{in}(Pr, r \cup Pr) \circ r = \mathrm{in}(r, r \cup Pr)$ に注意すれば，

$$\mathrm{in}(r, r \cup Pr)\,[M] = \mathrm{in}(Pr, r \cup Pr)\,[r\,[M]]$$

を得る．よって，$(r,M) \sim (Pr, r\,[M])$ である．事実 4.5.8 (i) より，$(Pr) \circ M_{\mathrm{e}} = r\,[M]_{\mathrm{e}}$ だが，これは $r\,[M]$ が Pr-元であり，$(r\,[M]\,|Pr) = M_{\mathrm{e}}$ であることを意味する．

(iii) 2つの集合対象 $(r,M),(s,N)$ をとる．包含射

$$\mathrm{in}(Pr, Pr \cup Ps) \circ r : r \hookrightarrow Pr \hookrightarrow (Pr \cup Ps)$$

をとる．簡単のため，$i := \mathrm{in}(Pr, Pr \cup Ps)$, $t := Pr \cup Ps$，そして，

$$M' := i\,[r\,[M]]$$

とおく．このとき，(ii) より，$r\,[M]$ は Pr-元であり，$(r,M) \sim (Pr, r\,[M])$ が成立する．事実 4.7.14 (ii) より，$i\,[r\,[M]]$ は t-元であり，$(r,M) \sim (t,M')$ を得る．同様にして，集合対象 (t,N') で N' が t-元でありかつ $(s,N) \sim (t,N')$ を満たすものが存在する．(i) より，$\{(t,M'),(t,N')\}$ が存在する．$(r,M) \sim (t,M')$ かつ $(s,N) \sim (t,N')$ だから，対 $\{(r,M),(s,N)\}$ が存在する． ■

補題 4.8.5 (in EWPT) 集合対象 (r,M) に対して，$(Pr, P[M])$ は集合対象のモデルにおいて (r,M) の冪集合 $\mathcal{P}((r,M))$ である． □

証明 集合対象 (t,K) に対して，

$$(t,K) \in (Pr, P[M]) \quad \text{iff} \quad (t,K) \subseteq (r,M)$$

となることを示せばよい．事実 4.7.21 (ii) より，$(t,K) \in (Pr, P[M])$ であることと，Pr-元 N で

$$N \in_{Pr} P[M] \quad \text{and} \quad (t,K) \sim (Pr, N)$$

を満たすものが存在すること同値である．冪集合の内包表記･事実 4.7.9 より，$(N|Pr) \in_{PA} P[M]$ は，A-集合 L が存在して，

$$L_{\mathrm{e}} = (N|Pr) \quad \text{and} \quad L \subseteq M$$

となることと同値である．このとき，$(L_{\mathrm{e}}|Pr) = N$ である．従って，$(t,K) \in (Pr, P[M])$ は，A-集合 L が存在して，

$$(t,K) \sim (Pr, (L_{\mathrm{e}}|Pr)) \quad \text{and} \quad L \subseteq M$$

と同値である．補題 4.8.4 (ii) より，$(L_{\mathrm{e}}|Pr) = r\,[L]$, $(Pr, r\,[L]) \sim (r, L)$ だったから，

$$(t,K) \sim (Pr, r\,[L]) \sim (r, L)$$

である．事実 4.8.1 より，

$$(t,K) \in (Pr, P[M]) \quad \text{iff} \quad (t,K) \subseteq (r, M)$$

を得る． ■

注意 4.8.6 (in ET) 集合対象 $(r,M),(s,N)$ に対して，集合対象 $(r,M'),(t,N')$ で

$$(t,M') \sim (r,M) \quad \text{and} \quad (t,N') \sim (s,N)$$

となるものが存在する．実際，

$$t = r \cup s, \quad M' = \mathrm{in}(r, r\cup s)\,[M], \quad N' = \mathrm{in}(s, r\cup s)\,[N]$$

ととることが出来る．従って，有限個の集合対象を考えている限りは，共通の推移的集合対象の「部分集合」として考えることができる．以下では，特に言及することなく，この事実を用いる． ◊

補題 4.8.7 (in EWPT) (i) 集合対象 $(r,M),(r,N)$ に対して，$(r, M\setminus N)$ は差集合 $(r,M)\setminus(r,N)$ のモデルとなる．ここで，$M \setminus N = \{x\,|_A\, x \in_A M \wedge x \notin_A N\}$ である；

(ii) 集合対象のモデルにおいて，差集合の存在公理が成立する． □

証明 (i) 集合対象 (q,L) をとる．

$$\begin{aligned} & (q,L) \in (r, M\setminus N) \\ \text{iff} \quad & (q,L) \in (r,M) \quad \text{and} \quad (q,L) \notin (r,N) \end{aligned}$$

を示せばよい．$(q,L) \in (r, M\setminus N)$ とする．このとき，事実 4.7.21 より，r-元 K で

$$K \in_r M \setminus N \quad \text{and} \quad (q,L) \sim (r,K)$$

を満たすものが存在する．このとき，

$$(K|r) \in_A M \quad \text{and} \quad (K|r) \notin_A N$$

であるから，再び事実 4.7.21 より，

$$(q,L) \in (r,M) \quad \text{and} \quad (q,L) \notin (r,N)$$

を得る．逆に，$(q,L) \in (r,M) \quad \text{and} \quad (q,L) \notin (r,N)$ とすると，r-元 K で $K \in_r M$ かつ $(q,L) \sim (r,K)$ であるものが存在する．$(r,K) \in_{(} r, M \setminus N)$ を示せばよいが，事実 4.7.21 より，$K \in_r M \setminus N$ を示せばよい．$K \in_r M$ だから，$(K|r) \in_A M$ である．一方，$(q,L) \notin (r,N)$ だから，$(K|r) \notin_A N$ である．従って，$(K|r) \in_A M \setminus N$ であり，$K \in_r M \setminus N$ を得る．

(ii) (i) によりよい． ■

補題 4.8.8 (in EWPT) 　(i) 集合対象のモデルにおいて，基礎の公理が成立する；

(ii) 任意の集合対象 $(r, \mathbf{E}_A)$ は，集合対象のモデルにおいて推移的集合である；

(iii) 集合対象のモデルにおいて，(S-TA) が成立する． □

証明 　(i) (r,M) を空でない集合対象とする．このとき，$\mathbf{E}_A \setminus M \neq \mathbf{E}_A$ である．定理 4.6.8 より，推移的集合対象 r は整礎であるから，

$$r^{-1}\left[P[\mathbf{E}_A \setminus M]\right] \not\subseteq (\mathbf{E}_A \setminus M)$$

が成立する．従って，A-元 x で

$$x \notin_A \mathbf{E}_A \setminus M \quad \text{and} \quad rx \in_{PA} P[\mathbf{E}_A \setminus M]$$

を満たすものが存在する．すなわち，事実 4.7.9 より， A-元 x で

$$x \in_A M \quad \text{and} \quad (x|r) \subseteq (\mathbf{E}_A \setminus M)$$

を満たすものが存在する．$x \in_A M$ より $(r,(x|r)) \in (r,M)$ であり，$(x|r) \subseteq \mathbf{E}_A \setminus M$ より，

$$(r,(x|r)) \cap (r,M) \sim (o, \emptyset_0)$$

である．

(ii) 集合対象 $(s,N) \in (r,\mathbf{E}_A)$ をとる．$(s,N) \subseteq (r,\mathbf{E}_A)$ を示せばよい．事実 4.7.21 (ii) より，集合対象 (r,K) で

$$(r,K) \sim (s,N) \quad \text{and} \quad K \in_r \mathbf{E}_A$$

なるものが存在する．$K \subseteq \mathbf{E}_A$ だから，事実 4.8.1 より，

$$(s,N) \subseteq (r,\mathbf{E}_A)$$

が成立する．

(iii) 任意の集合対象 (r,M) について $M \subseteq \mathbf{E}_A$ である．事実 4.8.1 より，これは $(r,M) \subseteq (r,\mathbf{E}_A)$ を意味する．(ii) より，$(r,\mathbf{E}_A)$ は集合対象のモデルにおいて推移的集合だったから，(S-TA) が成立する． ■

補題 4.8.9 (in EWPT) r が推移的集合対象であり，x, y は A-元であるとする．このとき，$(Pr, \{\{x\}_{\mathrm{e}}, \{x, y\}_{\mathrm{e}}\})$ は，集合対象のモデルにおいて，順序対

$$\langle (r, (x|r)), (r, (y|r)) \rangle$$

である． □

証明

$$\begin{aligned}
&\langle (r, (x|r)), (r, (y|r)) \rangle \\
&\sim \{\{(r, (x|r))\}, \{(r, (x|r)), (r, (y|r))\}\} \\
&\sim \{\{(r, (x|r)), (r, (x|r))\}, \{(r, (x|r)), (r, (y|r))\}\} \\
&\sim \{(r, \{((x|r)|r), ((x|r)|r)\}), (r, ((x|r)|r), ((y|r)|r))\} && (\because \text{補題 } 4.8.4 \text{ (i)}) \\
&\sim \{(r, \{x\}), (r, \{x, y\})\} \\
&\sim \{(Pr, r[\{x\}]), (Pr, r[\{x, y\}])\} && (\because \text{補題 } 4.8.4 \text{ (ii)}) \\
&\sim (Pr, \{(r[\{x\}]|Pr), (r[\{x, y\}]|Pr)\}) && (\because \text{補題 } 4.8.4 \text{ (i)}) \\
&\sim (Pr, \{\{x\}_{\mathrm{e}}, \{x, y\}_{\mathrm{e}}\}). && (\because \text{補題 } 4.8.4 \text{ (ii)})
\end{aligned}$$
■

対象 A に対して，A-元上の対をとる「演算」

$$(x, y) \mapsto \{\{x\}_{\mathrm{e}}, \{x, y\}_{\mathrm{e}}\}$$

を，射 $A \times A \to PPA$ として表現することを考える：

事実 4.8.10 (in ET) 3 つの射

$$A \xrightarrow{\{\cdot\}_A} PA, \quad A \xrightarrow{\{\cdot,\cdot\}_A} PA, \quad A \xrightarrow{\langle\cdot,\cdot\rangle_A} PPA$$

で次を満たすものが存在する：各 A-元 x, y に対して

(i) $\{\cdot\}_A \circ x = \{x\}_{\mathrm{e}}$;
(ii) $\{\cdot,\cdot\}_A \circ \langle x, y\rangle = \{x, y\}_{\mathrm{e}}$;
(iii) $\langle\cdot,\cdot\rangle_A \circ \langle x, y\rangle = \{\{x\}_{\mathrm{e}}, \{x, y\}_{\mathrm{e}}\}_{\mathrm{e}}$. □

証明 Kronecker のデルタ δ_A の exponential transpose としての単元射 $\{\cdot\}_A$ が求めるものの一つである．射 $\{\cdot,\cdot\}_A$ は次の合成射で与える：

$$A \times A \xrightarrow{\{\cdot\}_A \times \{\cdot\}_A} PA \times PA \xrightarrow{\cup_A} PA.$$

射 $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ は次の合成射で与える：

$$A \times A \xrightarrow{f} PA \times PA \xrightarrow{\{\cdot,\cdot\}_A} PPA.$$

ここで，f は次を可換にする唯一つの射である：

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\{\cdot\}_A"] & PA \\
A \times A \arrow[u, "\pi_1"] \arrow[r, "f"'] \arrow[dr, "\{\cdot,\cdot\}_A"'] & PA \times PA \arrow[u, "\pi_1"'] \arrow[d, "\pi_2"] \\
& PA.
\end{tikzcd}$$

すなわち，$f = \langle \{\cdot\}_A \pi_1, \{\cdot,\cdot\}_A \rangle$ である．以下で，これらが所望の条件を満たすことを示す．

(i) $\{\cdot\}_A \circ x = \{x\}_{\mathrm{e}}$ を示す．両辺の exponential transpose をとった，次を示せばよい：

$$e_A \circ ((\{\cdot\}_A \circ x) \times \mathrm{id}_A) = \{x\} \circ \pi_2.$$

次の可換図式

$$\begin{tikzcd}
1 \times A \arrow[d, "x \times \mathrm{id}_A"'] \arrow[ddr, bend left, "\delta_A \circ (x \times \mathrm{id}_A)"] & \\
A \times A \arrow[d, "\{\cdot\}_A \times \mathrm{id}_A"'] \arrow[dr, "\delta_A"] & \\
PA \times A \arrow[r, "e_A"'] & \Omega.
\end{tikzcd}$$

に注意すれば，次を示せばよい：

$$\delta_A \circ (x \times \mathrm{id}_A) = \{x\} \circ \pi_2.$$

次の図式に注意すれば，$\delta_A \circ (x \times \mathrm{id}_A)$ と $\{x\} \circ \pi_2$ が共に，同一のモノ射 $\langle \mathrm{id}_1, x \rangle$ の classifying morphism であることがわかる：

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "x"] \arrow[d, tail, "\langle \mathrm{id}_1, x \rangle"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & A \arrow[r, "!^A"] \arrow[d, tail, "\Delta_A"] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & 1 \arrow[d, tail, "\mathrm{true}"] \\
1 \times A \arrow[r, "x \times \mathrm{id}_A"'] & A \times A \arrow[r, "x"'] & \Omega,
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "x"] \arrow[d, tail, "\langle \mathrm{id}_1, x \rangle"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & 1 \arrow[r, "!^1"] \arrow[d, tail, "x"] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & 1 \arrow[d, tail, "\mathrm{true}"] \\
1 \times A \arrow[r, "\pi_2"'] & A \arrow[r, "\{x\}"'] & \Omega.
\end{tikzcd}$$

(ii) $\{\cdot,\cdot\}_A \circ \langle x, y \rangle = \{x, y\}_{\mathrm{e}}$ を示す．

$$\begin{aligned}
\{\cdot,\cdot\}_A \circ \langle x, y \rangle &= (\cup_A \circ (\{\cdot\}_A \times \{\cdot\}_A)) \circ \langle x, y \rangle \\
&= \cup_A \langle \{\cdot\}_A x, \{\cdot\}_A y \rangle \\
&= \cup_A \langle \{x\}_{\mathrm{e}}, \{y\}_{\mathrm{e}} \rangle & (\because \text{(i)}) \\
&= \{x, y\}_{\mathrm{e}} & (\because \text{事実 4.5.13})
\end{aligned}$$

(iii) $\langle \cdot,\cdot \rangle_A \circ \langle x, y \rangle = \{\{x\}_{\mathrm{e}}, \{x, y\}_{\mathrm{e}}\}_{\mathrm{e}}$ を示す．

$$\begin{aligned}
\langle \cdot,\cdot \rangle_A \circ \langle x, y \rangle &= \{\cdot,\cdot\}_{PA} \circ \langle \{\cdot\}_A \pi_1, \{\cdot,\cdot\}_A \rangle \circ \langle x, y \rangle \\
&= \{\cdot,\cdot\}_{PA} \circ \langle \{x\}_{\mathrm{e}}, \{x, y\}_{\mathrm{e}} \rangle \\
&= \{\{x\}_{\mathrm{e}}, \{x, y\}_{\mathrm{e}}\}_{\mathrm{e}}. & (\because \text{(ii)})
\end{aligned}$$

■

補題 4.8.11 (in EWPT) $\{\cdot\}_A : A \to PA$ と $\langle \cdot,\cdot \rangle_A : A \times A \to PPA$ はモノ射である． □

証明　[4, Lemma IV.1.1] より，単元射 $\{\cdot\}_A$ はモノ射である．事実 4.3.15 (iii) より，$\langle \cdot,\cdot \rangle_A$ がモノ射であることを示すためには，任意の $A \times A$ 元 $\langle x, y \rangle, \langle u, v$ に対して，$\langle x, y \rangle_A = \langle u, v \rangle_A$ から $\langle x, y \rangle = \langle u, v \rangle$ を示せばよい．$\langle x, y \rangle_A = \langle u, v \rangle_A$ とすると，

$$\{\{x\}_{\mathrm{e}}, \{x, y\}_{\mathrm{e}}\} = \{\{u\}_{\mathrm{e}}, \{u, v\}_{\mathrm{e}}\}$$

であるが，これは

$$\{x\}_{\mathrm{e}} = \{u\}_{\mathrm{e}} \quad \text{and} \quad \{y\}_{\mathrm{e}} = \{v\}_{\mathrm{e}}$$

を意味する．事実 4.8.10 より，

$$\{\cdot\}_A \circ x = \{\cdot\}_A \circ u \quad \text{and} \quad \{\cdot\}_A \circ y = \{\cdot\}_A \circ v$$

であるが，$\{\cdot\}_A$ はモノ射であるから，$x = u$ かつ $y = v$ を得る． ■

記法 4.8.1 A-元 x, y に対して，

$$\langle x, y\rangle_A := \langle\cdot,\cdot\rangle_A \circ \langle x, y\rangle$$

と表記する． ◊

補題 4.8.12 (in EWPT) (i) r が推移的集合対象であり，x, y が A-元であるとき，次が成立する：

$$\langle(r,(x|r)),(r,(y|r))\rangle \sim (Pr, \langle x,y\rangle_{A_s}) \sim (PPr, (\langle x,y\rangle_A|PPr)))\,;$$

(ii) $(r, M), (r, N)$ が集合対象であるならば，$(PPr, \langle\cdot,\cdot\rangle_A\,[M \times N])$ は，集合対象のモデルにおいて，直積 $(r, M) \times (r, N)$ である；

(iii) 集合対象のモデルにおいて，直積の存在公理が成立する． □

証明 (i) まず，$\langle(r,(x|r)),(r,(y|r))\rangle \sim (Pr, \langle x,y\rangle_{A_s})$ を示す．補題 4.8.9 より，

$$\langle(r,(x|r)),(r,(y|r))\rangle \sim (Pr, \{\{x\}_{\mathrm{e}}, \{x,y\}_{\mathrm{e}}\})$$

であったから，$\langle x,y\rangle_{A_s} = \{\{x\}_{\mathrm{e}}, \{x,y\}_{\mathrm{e}}\}$ を示せばよい．実際，次が成立する：

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle_{A_s} &= (\langle\cdot,\cdot\rangle_A \circ \langle x,y\rangle)_s \\ &= (\{\{x\}_{\mathrm{e}}, \{x,y\}_{\mathrm{e}}\}_{\mathrm{e}})_s && (\because \text{事実 4.8.10}) \\ &= \{\{x\}_{\mathrm{e}}, \{x,y\}_{\mathrm{e}}\}.\end{aligned}$$

次に，$(Pr, \langle x,y\rangle_{A_s}) \sim (PPr, (\langle x,y\rangle_A|PPr)))$ を示す．補題 4.8.4 より，

$$(Pr, \langle x,y\rangle_{A_s}) \sim (PPr, Pr\,[\{x\}_{\mathrm{e}}, \{x,y\}_{\mathrm{e}}\}])\,.$$

一方，

$$\begin{aligned}(Pr\,[\{x\}_{\mathrm{e}}, \{x,y\}_{\mathrm{e}}\}]\,|PPr) &= \{\{x\}_{\mathrm{e}}, \{x,y\}_{\mathrm{e}}\}_{\mathrm{e}} && (\because \text{補題 4.8.4(ii)}) \\ &= (\langle x,y\rangle_A). && (\because \text{事実 4.8.10})\end{aligned}$$

よって，$\langle x,y\rangle_{A_s} = (\langle x,y\rangle_{A_s}|PPr)$ を得る．

(ii) 集合対象 $(q, L) \in (PPr, \langle\cdot,\cdot\rangle_A\,[M \times N])$ をとる．仮定 $(q, L) \in (PPr, \langle\cdot,\cdot\rangle_A\,[M \times N])$ と事実 4.7.21 (ii) より，PPr-元 K で

$$K \in_{PPr} \langle\cdot,\cdot\rangle_A\,[M \times N] \quad \text{and} \quad (q, L) \sim (PPr, K)$$

となるものが存在する．$(K|PPr) \in_{PPA} \langle\cdot,\cdot\rangle_A\,[M \times N]$ であるが，事実 4.7.8 (iii) と事実 4.7.10 より，これは次と同値である：$A \times A$-元 $\langle x, y\rangle$ で

$$\langle x,y\rangle_A = (K|PPr) \quad \text{and} \quad x \in_A M \quad \text{and} \quad y \in_A N$$

となるものが存在する．このとき，$K = (\langle x, y\rangle_A | PPr)$，$(q, L) \sim (PPr, K)$ と (i) により，

$$(q, L) \sim \langle (r, (x|r)), (r, (y|r))\rangle$$

であり，

$$(r, (x|r)) \in (r, M) \quad \text{and} \quad (r, (y|r)) \in (r, N)$$

であるから，

$$(q, L) \in (r, M) \times (r, N)$$

を得る．

(iii) (ii) によりよい．■

定理 4.8.13 (in EWPT) 集合対象のモデルにおいて，所属関係の制限，定義域，並び替えの存在公理が成立する．□

証明 集合対象 (r, M) をとる．まず，所属関係の制限が存在することを示す．後で示す並び替えの存在公理により，次を満たす集合対象の存在を示せば十分である：

$$\mathrm{Mem}((r, M))^{-1} := \{\langle X, Y\rangle \mid Y \in X \in (r, M)\}.$$

具体的には，

$$\mathrm{Mem}((r, M))^{-1} \sim \left(PPr, \langle\cdot,\cdot\rangle_A \left[{\pi_1}^{-1}[M] \cap (r \times \mathrm{id}_A)^{-1}[e_A]\right]\right) =: Z$$

となる．集合対象 $(q, L) \in Z$ をとる．$(q, L) \in \mathrm{Mem}((r, M))^{-1}$ を示す．このとき，PPr-元 K で

$$K \in_{PPr} \langle\cdot,\cdot\rangle_A \left[{\pi_1}^{-1}[M] \cap (r \times \mathrm{id}_A)^{-1}[e_A]\right] \quad \text{and} \quad (q, L) \sim (PPr, K)$$

を満たすものが存在する．事実 4.7.8 (iii) より，$A \times A$-元 $\langle x, y\rangle$ で $\langle x, y\rangle_A = (K|PPr)$ かつ

$$\langle x, y\rangle \in_{A\times A} {\pi_1}^{-1}[M] \quad \text{and} \quad \langle x, y\rangle \in_{A\times A} (r \times \mathrm{id}_A)^{-1}[e_A]$$

を満たすものが存在する．上の条件は

$$x \in_A M \quad \text{and} \quad e_A\langle rx, y\rangle = \mathrm{true}$$

と同値である．事実 4.7.11 より，

$$e_A\langle rx, y\rangle = \mathrm{true} \quad \text{iff} \quad y \in_A r[(x|r)]$$

だから，これらは

$$(r, (y|r)) \in (r, (x|r)) \in (r, M)$$

を意味する．また，$\langle x, y\rangle_A = (K|PPr)$ より

$$(PPr, K) \sim \langle (r, (x|r)), (r, (y|r))\rangle \qquad (\because \text{補題 4.8.12 (i)})$$

である．さらに，$(q, L) \sim (PPr, K)$ であるから，以上より，$(q, L) \in \mathrm{Mem}((r, M))^{-1}$ を得る．逆も同様である．

次に，定義域の存在を示す．補題 4.8.4 (ii) により，$(r, M) \sim (PPr, Pr\,[r\,[M]])$ である．以下では簡単のため，$N := Pr\,[r\,[M]]$ とおく．そこで，

$$\mathrm{Dom}((PPr, N)) \sim \left(r, \pi_1\left[\langle\cdot,\cdot\rangle_A{}^{-1}\,[N]\right]\right)$$

を示す．集合対象 $(q, L) \in \left(r, \pi_1\left[\langle\cdot,\cdot\rangle_A{}^{-1}\,[N]\right]\right)$ をとる．このとき，r-元 K で

$$K \in_r \pi_1\left[\langle\cdot,\cdot\rangle_A{}^{-1}\,[N]\right] \quad \text{and} \quad (q, L) \sim (r, K)$$

を満たすものが存在する．$(K|r) \in_A \pi_1\left[\langle\cdot,\cdot\rangle_A{}^{-1}\,[N]\right]$ は $A \times A$-元 $\langle x, y\rangle$ で

$$\pi_1\langle x, y\rangle = (K|r) \quad \text{and} \quad \langle x, y\rangle \in_{A\times A} \langle\cdot,\cdot\rangle_A{}^{-1}\,[N]$$

を満たすものが存在する．この条件は，

$$K = (x|r) \quad \text{and} \quad \langle (r, (x|r)), (r, (y|r))\rangle \in (PPr, N)$$

と同値である．以上より，

$$\exists\,(r, (x|r))\,[\langle (r, K), (r, (y|r))\rangle \in (PPr, N)]$$

を得る．$(q, L) \sim (r, K)$ だから，これは $(q, K) \in \mathrm{Dom}((PPr, N))$ を意味する．

次に，並び替えの存在公理の (Sym) を示す．具体的には，

$$\left(PPr, \langle\cdot,\cdot\rangle_A\left[\langle\pi_2, \pi_1\rangle\left[\langle\cdot,\cdot\rangle_A{}^{-1}\,[N]\right]\right]\right)$$

が求める集合対象であることを示す．この集合対象の元 (q, L) をとる．このとき，PPr-元 K で

$$K \in_{PPr} \langle\cdot,\cdot\rangle_A\left[\langle\pi_2, \pi_1\rangle\left[\langle\cdot,\cdot\rangle_A{}^{-1}\,[N]\right]\right]$$

かつ $(q, L) \sim (PPr, K)$ を満たすものが存在する．このとき，事実 4.7.8 (iii) より，$A \times A$-元 $\langle x, y\rangle$ で $\langle x, y\rangle_A = (K|PPr)$ かつ

$$\langle x, y\rangle \in_{A\times A} \langle\pi_2, \pi_1\rangle\left[\langle\cdot,\cdot\rangle_A{}^{-1}\,[N]\right] \tag{4.20}$$

を満たすものが存在する．再び事実 4.7.8 (iii) より，$A \times A$-元 $\langle u, v\rangle$ で

$$\langle x, y\rangle = \langle\pi_2, \pi_1\rangle \circ \langle u, v\rangle \quad \text{and} \quad \langle u, v\rangle \in_{A\times A} \langle\cdot,\cdot\rangle_A{}^{-1}\,[N]$$

を満たすものが存在するが，これは結局

$$\langle y, x\rangle_A \in_{A\times A} N$$

を意味する．補題 4.8.12 (i) より，

$$\langle (r, (y|x)), (r, (x|r))\rangle \in (PPr, N)$$

となる．以上より，$(q, L) \in \{\langle X, Y\rangle \mid \langle Y, x\rangle \in (PPr, N)\}$ を得る．

最後に，並び替えの存在公理の (Rot) を示す．具体的には，

$$\left(P^4 r, \langle\cdot,\cdot\rangle_A\left[h\left[\langle\cdot,\cdot\rangle_A{}^{-1}\,[N]\right]\right]\right) \sim \left\{\langle\langle X, Y\rangle, Z\rangle \mid \langle\langle Y, Z\rangle, X\rangle \in \left(P^4 r, N\right)\right\} \tag{4.21}$$

となることを見る．ここで，$h = \langle \pi_3, \pi_1, \pi_2 \rangle : A \times A \times A \to A \times A \times A$ である．また，$\langle \cdot, \cdot, \cdot \rangle_A : A \times A \times A \to P^4 A$ は次の合成射である：

$$A \times A \times A \xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle_A \times \mathrm{id}_A} PPA \times A \xrightarrow{\mathrm{id}_{PPA} \times Pr\circ r} PPA \times PPA \xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle_{PPA}} P^4 A$$

このとき，A-元 x, y, z に対して，

$$\langle x, y, z \rangle_A := \langle \cdot, \cdot, \cdot \rangle_A \circ \rangle x, y, z \rangle = \langle \langle x, y \rangle_A, (Prrz) \rangle_{PPA}$$

とおくと，次を満たす：

$$\left(P^4 r, (\langle x, y, z \rangle_A | P^4 r)\right) \sim \langle \langle (r, (x|r)), (r, (y|r)) \rangle, (r, (z|r)) \rangle \tag{4.22}$$

まずは，これを示す．補題 4.8.11 (i) より，$(r, M) \sim \left(P^4 r, N\right)$ であることに注意すれば，

$$\begin{aligned}
&\langle \langle (r, (x|r)), (r, (y|r)) \rangle, (r, (z|r)) \rangle \\
&\sim \langle (PPr, (\langle x, y \rangle_A | PPr)), (r, (z|r)) \rangle && (\because \text{補題 } 4.8.12 \text{ (i)}) \\
&\sim \langle (PPr, (\langle x, y \rangle_A | PPr)), (PPr, ((Pr)r) [(z|r)]) \rangle && (\because \text{補題 } 4.8.4 \text{ (i)}) \\
&\sim \langle (PPr, (\langle x, y \rangle_A | PPr)), (PPr, ((Pr)rz | PPr)) \rangle && (\because \text{補題 } 4.8.4 \text{ (i)}) \\
&\sim \left(P^4 r, (\langle \langle x, y \rangle_A, (Pr)rz \rangle_A | P^4 r)\right) \\
&\sim \left(P^4 r, (\langle x, y, z \rangle_A | P^4 r)\right) && (\because \langle \cdot, \cdot, \cdot \rangle_A \text{ の定義})
\end{aligned}$$

を得る．以上の準備の下，(4.21) を示す．集合対象

$$(q, L) \in \left(P^4 r, \langle \cdot, \cdot \rangle_A \left[h \left[\langle \cdot, \cdot \rangle_A{}^{-1} [N]\right]\right]\right)$$

をとる．このとき，$P^4 r$-元 K で

$$K \in_{P^4 r} \langle \cdot, \cdot, \cdot \rangle_A \left[h \left[\langle \cdot, \cdot, \cdot \rangle_A{}^{-1} [N]\right]\right] \quad \text{and} \quad (q, L) \sim (r, K)$$

を満たすものが存在する．事実 4.7.8 (iii) より，$A \times A \times A$-元 $\langle x, y, z \rangle$ で $(K | P^4 r) = \langle x, y, z \rangle_A$ かつ

$$\langle x, y, z \rangle \in_{A \times A \times A} h \left[\langle \cdot, \cdot, \cdot \rangle_A{}^{-1} [N]\right]$$

を満たすものが存在する．h の定義などから，これは

$$\langle y, z, x \rangle_A \in_{PPA} N$$

を意味する．(4.22) より，

$$\langle \langle (r, (y|r)), (r, (z|r)) \rangle, (r, (x|r)) \rangle \in \left(P^4 r, N\right)$$

を得る． ■

以上により，集合対象のモデルにおいて，理論 Z のうち，(S-ATR) を除く全ての公理が成立していることが確かめられた．(S-ATR) を示す前に，集合対象のモデルの集合が成すトポスと，作業している元のトポスの比較を行う．

煩雑さを避けるため，集合対象のうち，同型類から代表元を選んでおく．すなわち，集合対象全体の成すクラス上の単項演算子 ρ で，以下を満たすものを導入する：集合対象 X, Y に対して，次が成立する：

$$\rho X \sim X; \tag{4.23}$$

$$X \sim Y \quad \text{iff} \quad \rho X = \rho Y. \tag{4.24}$$

注意 4.8.14 単項演算子 ρ を導入するためには，新たに記号 ρ を追加し，条件 (4.23) と (4.24) を公理として，理論 ET に付け加える必要がある． $\Diamond$

注意 4.8.15 Z-集合の成すトポスは，条件 (4.23) と (4.24) を満たす演算をもつ．実際，

$$\rho(r : A \to PA, M) := (T \hookrightarrow \mathcal{P}(T), i\,[M])$$

ととればよい．ここで，$T = \mathrm{TR}(r)$ であり，i は同型射 $i : A \to T$ である（cf. 公理 4.4.8）． $\Diamond$

演算 ρ を用いることで，集合対象のモデルが成すトポスから作業している元のトポスへの「関手」Φ が構成できる：

補題 4.8.16 (in ET) (i) 集合対象 X で，$\rho X = (r : A \to PA, M : A \to \Omega)$ となるものをとる．このとき，射 $p_X : \Phi X \to A$ を，部分対象分類子 true の M に沿った引き戻し $\pi_1(M, \mathrm{true})$ として定義する：

$$\begin{tikzcd} \Phi X \arrow[r, "!^{\Phi X}"] \arrow[d, "p_X"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\ A \arrow[r, "M"'] & \Omega. \end{tikzcd}$$

このとき，ΦX は部分的に推移的である；

(ii) 集合対象 X, Y に対して，次が成立する：

$$X \sim Y \implies p_X = p_Y \wedge \Phi X = \Phi Y. \qquad \square$$

証明 (i) $\Phi X \subseteq A$ であり，$r : A \to PA$ は推移的集合対象であるから，ΦX は部分的に推移的である．

(ii) ρ の性質より，$X \sim Y$ は $\rho X = \rho Y = (r, M)$ を意味する．よって，

$$p_X = \pi_1(M, \mathrm{true}) = p_Y$$

であり，$\Phi X = \Phi Y$ でもある． ■

事実 4.8.17 (in EWPT) 集合対象 X, Y で $\rho X = (r, M)$, $\rho Y = (s, N)$ であるものをとる．このとき，次が成立する：

(i) 集合対象のモデルにおける任意の写像 $F : X \to Y$ に対して，次を満たす唯一つの射 $\Phi F : \Phi X \to \Phi Y$ が存在する：

$$\forall (u : 1 \to \Phi X)\,[F(r, (p_X u | r)) \sim (s, (p_Y (\Phi F) u | s))]\,.$$

(ii) Φ は，集合対象のモデルにおける写像 $X \to Y$ と射 $\Phi X \to \Phi Y$ と一対一に対応する． $\square$

証明 注意 4.8.6 より，$r = s$ としてよい．集合対象のモデルにおける X から Y への関係 $R \subseteq (X \times Y)$ は，$X \times Y \sim (\rho X \times \rho Y) \sim (PPr, \langle \cdot, \cdot \rangle_A\,[M \times N])$ より，ある $A \times A$-集合 αR と一対一に対応する．すなわち，X から Y への関係 R に対して，$A \times A$-集合 αR で

$$R \sim (PPr, \langle \cdot, \cdot \rangle_A\,[\alpha R])$$

を満たすものが唯一つ存在する．この αR は，M-元 a と N-元 b に対して，

$$\langle (r,(a|r)),(r,(b|r))\rangle \in R \quad \text{iff} \quad \langle a,b\rangle \in_{A\times A} \alpha R$$

を満たす．従って，R が写像 $F : X \to Y$ のグラフであることは，任意の $a \in_A M$ に対して唯一つの $b \in_A N$ が存在して

$$\langle a,b\rangle \in_{A\times A} \alpha R \quad \text{and} \quad F(r,(a|r)) \sim (r,(b|r))$$

が成り立つこと，と言い換えられる．次に，$A \times A$-集合 $G \subseteq M \times N$ は，$\Phi X \times \Phi Y$-集合と一対一に対応することを見る．G が classify するモノ射を $g : C \rightarrowtail A \times A$ と書き，$(p_X \times p_Y)^{-1}[G]$ が classify するモノ射を $\beta g : \beta C \rightarrowtail \Phi X \times \Phi Y$ と書く．次の引き戻し正方図式

$$\begin{tikzcd}
\Phi X \times \Phi Y \arrow[r, "!^{\Phi X\times\Phi Y}"] \arrow[d, tail, "p_X\times p_Y"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & 1 \arrow[d, tail, "\text{true}"] \\
A \times A \arrow[r, "M\times N"'] & \Omega.
\end{tikzcd}$$

に注意すると，$p_X \times p_Y$ は $M \times N$ が classify するモノ射であることがわかる．これと $G \subseteq M \times N$ により，モノ射 $m : C \rightarrowtail \Phi X \times \Phi Y$ で

$$(p_X \times p_Y) \circ m = g$$

を満たすものが存在する．次の引き戻し図式

$$\begin{tikzcd}
\beta C \arrow[r, tail, "q"] \arrow[d, tail, "\beta g"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & C \arrow[r, "!^C"] \arrow[d, tail, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & 1 \arrow[d, tail, "\text{true}"] \\
\Phi X \times \Phi Y \arrow[r, tail, "p_X\times p_Y"'] & A \times A \arrow[r, "G"'] & \Omega.
\end{tikzcd}$$

に注意する．$p_X \times p_Y$ はモノ射であるから，その引き戻しである q もモノ射である．また，$(p_X \times p_Y) \circ m = g$ と引き戻しの普遍性から，射 $l : C \to \beta C$ で $ql = \mathrm{id}_C$ を満たすものが存在する．従って，q はエピ射でもある．よって，q は同型射である．

$A \times A$-集合としてのグラフ αR は，$\Phi X \times \Phi Y$-集合 $\beta\alpha R$ と対応するから，R が $F : X \to Y$ のグラフであることは，任意の ΦX-元 u に対して唯一つの ΦY-元 v が存在して

$$\langle u,v\rangle \in_{\Phi X\times\Phi Y} \beta\alpha R \quad \text{and} \quad F(r,(p_X u|r)) \sim (r,(p_Y v|r))$$

が成り立つこと，と言い換えられる．

さらに，射 $f : \Phi X \to \Phi Y$ は，$\Phi X \times \Phi Y$-集合 γf で次を満たすものと一対一に対応する：任意の ΦX-元 u に対して，唯一つの ΦY-元 v で，$\langle u,v\rangle \in_{\Phi X\times\Phi Y} \gamma f$ を満たすものが存在する．これを示す．射 $f : \Phi X \to \Phi Y$ に対して，そのグラフである $\langle \mathrm{id}_{\Phi X}, f\rangle$ の classifying morphism $\chi(f)$ が存在する：

$$\begin{tikzcd}
\Phi X \arrow[r, "!^G"] \arrow[d, tail, "\langle \mathrm{id}_{\Phi X}, f\rangle"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & 1 \arrow[d, tail, "\text{true}"] \\
\Phi X \times \Phi Y \arrow[r, "\chi(f)"'] & \Omega.
\end{tikzcd}$$

引き戻しの普遍性より，任意の ΦX-元 u に対して，唯一つの ΦY-元 v が存在して，$\langle u, v\rangle \in_{\Phi X\times\Phi Y} \chi(f)$ が成立する．逆に，$\Phi X \times \Phi Y$-集合 χ で，任意の ΦX-元 u に対して，唯一つの ΦY-元 v が存在して，$\langle u, v\rangle \in_{\Phi X\times\Phi Y} \chi$ を満たすものが与えられたとする．χ が classify するモノ射を $\langle x, y\rangle : G \rightarrowtail \Phi X \times \Phi Y$ とする：

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "!^G"] \arrow[d, tail, "\langle x,y\rangle"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & 1 \arrow[d, tail, "\mathrm{true}"] \\ \Phi X \times \Phi Y \arrow[r, "\chi"'] & \Omega. \end{tikzcd}$$

このとき，G は ΦX と同型であり，同型射は $h := \pi_1 \circ \langle x, y\rangle$ で与えられる．ここで，$\pi_1 : \Phi \times \Phi Y \to \Phi X$ は射影である．まず，h がモノ射であることを示す．そのために，G-元 a, b で $ha = hb$ となるものをとる．条件 $ha = hb$ は $xa = xb$ を意味する．χ についての仮定より，$ya = yb$ である．よって，$\langle x, y\rangle a = \langle x, y\rangle b$ であるが，$\langle x, y\rangle$ はモノ射だから，$a = b$ を得る．次に，h がエピ射であることを示す．そのために，ΦX-元 u をとる．このとき，仮定より，ΦY-元 v で $\langle u, v\rangle \in_{\Phi X\times\Phi Y} \chi$ を満たすものが存在する．引き戻しの普遍性より，G-元 a で $\langle x, y\rangle a = \langle u, v\rangle$ を満たすものが存在する．これは，$ha = \pi_1 \circ \langle x, y\rangle a = u$ を意味する．よって，h はエピ射である．以上により，h は同型射であることが示された．χ に対応する射は，次の合成射

$$\Phi X \xrightarrow{h^{-1}} G \xrightarrow{\langle x,y\rangle} \Phi X \times \Phi Y \xrightarrow{\pi_1} \Phi Y$$

によって与えられる．

以上より，写像 $F : X \to Y$ に対して，射 $\Phi F : \Phi X \to \Phi Y$ で

$$\gamma(\Phi F) = \beta\alpha(\text{graph of } F)$$

と任意の ΦX-元 u に対して，$F\,(r, (p_X u|r)) \sim (r, (p_Y(\Phi F)u|r))$ を満たすものが存在することがわかった．もし，別の射 $\Phi F' : X \to \Phi Y$ で $\gamma(\Phi F) = \beta\alpha(\text{graph of } F)$ と任意の ΦX-元 u に対して，$F\,(r, (p_X u|r)) \sim (r, (p_Y(\Phi F')u|r))$ を満たすものが存在したとすると，任意の ΦX-元 u に対して，

$$(r, (p_Y(\Phi F)u|r)) \sim (r, (p_Y(\Phi F')u|r))$$

であるが，これは $p_Y(\Phi F)u = p_Y(\Phi F')u$ を意味する．p_Y はモノ射だから $(\Phi F)u = (\Phi F')u$ となる．いま，1 は generator だったから，$\Phi F = \Phi F'$ を得る． ■

定理 4.8.18 (in EWPT) 演算 Φ は，集合対象のモデルが成すトポスから，作業している元のトポスへの，忠実かつ充満な logical functor である．さらに，Φ の像は，部分的に推移的である対象の成す subtopos と同値である． □

証明 事実 4.8.17 より，Φ は関手であり，忠実かつ充満である．Φ が logical であることを示す．まず，Φ が部分対象分類子を保存することを示す．集合対象のモデルにおける空集合 0 は，集合対象 $(o : 0 \to 1, \emptyset_0)$ であった．$\emptyset_0 = \chi(\mathrm{id}_0)$ であり，集合対象のモデルにおける $1 = \{0\}$ と $2 = \{0, 1\}$ はそれぞれ，0 と 1 の冪集合で与えられるから，補題 4.8.5 より，

$$\{0\} \sim (Po, P[\chi(\mathrm{id}_0)]) = (1 \to \Omega, \chi(\mathrm{id}_1))$$

であり，同様にして，

$$\{0,1\} \sim (\Omega \to P\Omega, \chi(\mathrm{id}_\Omega))$$

を得る．従って，

$$\Phi(0) \cong 0, \quad \Phi(1) \cong 1, \quad \Phi(2) \cong \Omega$$

である．よって，$\Phi(\mathrm{true}: 1 \rightarrowtail 2) \cong 1 \rightarrowtail \Omega$ となるが，well-pointed トポスにおいて，終対象 1 から真理値対象 Ω への射は，true または false のみである．いずれにせよ，部分対象分類子となる．

次に，Φ が有限極限と有限余極限を保存することを示す．Φ 始対象と終対象を保存したから，Φ が引き戻しと押し出しを保存することを示せばよい．まず，引き戻しを保存することを示す．集合対象のモデルにおける 2 つの写像 $F: X \to Z$ と $G: Y \to Z$ の引き戻し $\mathrm{pb}(F,G)$ と，ΦF と ΦG の引き戻し $\mathrm{pb}(\Phi F, \Phi G)$ を考える：

$$\begin{tikzcd} \mathrm{pb}(F,G) \arrow[r, "\Pi_2"] \arrow[d, "\Pi_1"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & Y \arrow[d, "G"] \\ X \arrow[r, "F"'] & Z, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{pb}(\Phi F,\Phi G) \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & \Phi Y \arrow[d, "\Phi G"] \\ \Phi X \arrow[r, "\Phi F"'] & \Phi Z. \end{tikzcd} \tag{4.25}$$

ここで，

$$\begin{aligned} \Pi_i &= \pi_i(F,G) \quad (i=1,2) \\ \pi_i &= \pi_i(\Phi F, \Phi G) \quad (i=1,2) \end{aligned}$$

である．このとき，

$$\Phi F \circ \Phi\Pi_1 = \Phi(F \circ \Pi_2) = \Phi(G \circ \Pi_1) = \Phi G \circ \Phi\Pi_2$$

であるから，図式 (4.25) 右側の引き戻し正方図式より，射 $u: \Phi(\mathrm{pb}(F,G)) \to \mathrm{pb}(\Phi F, \Phi G)$ で

$$\Phi\Pi_i = \pi_i u \quad (i=1,2)$$

を満たすものが存在する．u が同型射であることを示せばよい．このために，u がモノ射かつエピ射であることを示す．まずは，u がモノ射であることを示す．終対象は $\Phi(1)$ で与えられるから，事実 4.3.15 (iii) より，任意の global element $x, y: \Phi(1) \to \Phi(\mathrm{pb}(F,G))$ に対して，$ux = uy$ ならば $x = y$ となることを示せばよい．global element $x, y: \Phi(1) \to \Phi(\mathrm{pb}(F,G))$ をとり，$ux = uy$ とする．Φ は忠実かつ充満であるから，写像 $D, E: 1 \to \mathrm{pb}(F,G)$ で，$\Phi D = x$ かつ $\Phi E = y$ を満たすものが唯一つ存在する．このとき，$D = E$ を示せばよい．実際，

$$\Phi(\Pi_i D) = \Phi\Pi_i \circ \Phi D = \pi_i u x = \pi_i u y = \Phi\Pi_i \circ \Phi E = \Phi(\Pi_i E) \quad (i=1,2)$$

が成立し，Φ は忠実かつ充満であるから，$\Pi_i D = \Pi_i E$ $(i=1,2)$ を得る．これは $D = E$ を意味する．次に，u がエピ射であることを示す．事実 4.3.15 (iv) より，任意の global element $z: \Phi(1) \to \mathrm{pb}(\Phi F, \Phi G)$ に対して，global element $w: \Phi(1) \to \Phi(\mathrm{pb}(F,G))$ で $z = uw$ を満たすものが存在することを示せばよい．そこで，任意に global element $z: \Phi(1) \to \mathrm{pb}(\Phi F, \Phi G)$ をとる．Φ は忠実かつ充満であるから，写像 $D: 1 \to X$ と $E: 1 \to Y$ で

$$\Phi D = \pi_1 z \quad \text{and} \quad \Phi E = \pi_2 z$$

を満たすものが存在する．さらに，

$$\Phi(FD) = \Phi F \circ \Phi D = \Phi F \pi_1 z = \Phi G \pi_2 z = \Phi G \circ \Phi E = \Phi(GE)$$

であるから，$FD = GE$ が成立する．図式 (4.25) の左側の引き戻し正方図式より，写像 $W : 1 \to \mathrm{pb}(F, G)$ で $\Pi_1 W = D$ かつ $\Pi_2 W = E$ を満たすものが存在する．ΦW が求める射であることを示す．そのためには，$\pi_1 u \Phi W = \pi_1 z$ かつ $\pi_2 u \Phi W = \pi_2 z$ を示せばよい．実際，$\Phi D = \pi_1 z$ に注意すると，

$$\pi_1 u \Phi W = \Phi \Pi_1 \circ \Phi W = \Phi(\Pi_1 W) = \Phi D = \pi_1 z$$

を得る．同様にして，$\pi_2 u \Phi W = \pi_2 z$ が得られる．以上により，u が同型射であることが示された．

次に，Φ が押し出しを保つことを示す．引き戻しの場合の双対を考えればよい．集合対象のモデルにおける 2 つの写像 $F : X \to Y$ と $G : X \to Z$ の押し出し $\mathrm{po}(F, G)$ と，ΦF と ΦG の押し出し $\mathrm{po}(\Phi F, \Phi G)$ を考える：

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "G"] \arrow[d, "F"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.o.}"] & Y \arrow[d, "I_2"] \\ Y \arrow[r, "I_1"'] & \mathrm{po}(F, G), \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Phi X \arrow[r, "\Phi G"] \arrow[d, "\Phi X"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.o.}"] & \Phi Z \arrow[d, "\iota_2"] \\ \Phi Y \arrow[r, "\iota_1"'] & \mathrm{po}(\Phi F, \Phi G). \end{tikzcd} \tag{4.26}$$

ここで，

$$\begin{aligned} I_i &= \mathrm{po}_i(F, G) \quad (i = 1, 2), \\ \iota_i &= \mathrm{po}_i(\Phi F, \Phi G) \quad (i = 1, 2) \end{aligned}$$

である．このとき，

$$\Phi I_1 \circ \Phi F = \Phi(I_1 \circ F) = \Phi(G \circ I_2) = \Phi G \circ \Phi I_2$$

であるから，図式 (4.26) の右側の押し出し正方図式より，射 $u : \mathrm{po}(\Phi F, \Phi G) \to \Phi(\mathrm{po}(F, G))$ で

$$\Phi I_i = u \iota_i \quad (i = 1, 2)$$

を満たすものが存在する．u が同型射であることを示す．まず, u がモノ射であることを示す．そのためには, 事実 4.3.15 (vii) と $\Omega \cong \Phi(2)$ より, 任意の射 $t : \mathrm{po}(\Phi F, \Phi G) \to \Phi(2)$ に対して，射 $\Phi(\mathrm{po}(F, G)) \to \Phi(2)$ で $t = su$ を満たすものが存在することを示せばよい．射 $t : \mathrm{po}(\Phi F, \Phi G) \to \Phi(2)$ をとる．Φ は充満であるから，合成射 $t\iota_1 : \Phi Y \to \Phi 2$ と $t\iota_2 : \Phi Z \to \Phi(2)$ に対してそれぞれ，射 $H : Y \to 2$ と $K : Z \to 2$ で $t\iota_1 = \Phi H$ と $t\iota_2 = \Phi K$ を満たすものが存在する．このとき，

$$\Phi(HF) = \Phi H \circ \Phi F = t\iota_1 \Phi F = t\iota_2 \Phi G = \Phi K \circ \Phi G = \Phi(KG)$$

が成立するから，図式 (4.26) の左側の押し出し正方図式より，射 $S : \mathrm{po}(F, G) \to 2$ で $SI_1 = H$ と $SI_2 = K$ を満たすものが存在する．$s := \Phi S$ が求める射である．実際，

$$t\iota_1 = \Phi H \iota_1 = \Phi S \circ \Phi I_1 \iota_1 = su\iota_1$$

が成立する．同様に，$t\iota_2 = su\iota_2$ を得る．これは，$t = su$ を意味する．よって，u はモノ射である．次に，u がエピ射であることを示す．事実 4.3.15 (vi) と $\Omega \cong \Phi(2)$ より，

任意の射 $s,t:\Phi(F,G)\to\Phi(2)$ に対して，$su=tu$ ならば $s=t$ であることを示せばよい．射 $s,t:\Phi(F,G)\to\Phi(2)$ で $su=tu$ であるものをとる．Φ は充満であるから，射 $S,T:\mathrm{po}(F,G)\to 2$ で $\Phi S=s$ と $\Phi T=t$ を満たすものが存在する．図式 (4.26) の左側の押し出し正方図式より，$SI_1F=TI_2G$ を示せばよいが，Φ は忠実であるから，$\Phi(SI_1F)=\Phi(TI_2G)$ を示せばよい．実際，

$$\Phi S\circ\Phi I_1\circ\Phi F=su\iota_1\Phi F=tu\iota_2\Phi G=\Phi T\circ\Phi I_2\circ\Phi G$$

が成立する．よって，u はエピ射である．以上より，u は同型射であることが示された．

次に，Φ が冪対象を保存することを示す．そのために，集合対象 X に対して，$\Phi(PX)\cong P(\Phi X)$ となることを示す．推移的集合対象 $r:A\to PA$ と A-集合 $M:A\to\Omega$ を，$\rho X=(r,M)$ であるものとする．すなわち，

$$\Phi X=\pi_1(M,\mathrm{true}),\quad p_X:\Phi X\rightarrowtail A$$

である．補題 4.8.4 より，$PX\sim(Pr,P[M])$ であるから，

$$\Phi PX=\pi_1(P[M],\mathrm{true}),\quad p_{PX}:\Phi PX\rightarrowtail PA$$

である：

$$\begin{tikzcd}
\Phi PX \arrow[r, "!^1"] \arrow[d, tail, "p_{PX}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & 1 \arrow[d, tail, "\mathrm{true}"] \\
PA \arrow[r, "{P[M]}"'] & \Omega.
\end{tikzcd}$$

$P[M]$ の定義より，$\Phi(PX)\cong P(\Phi X)$ を得る．

最後に，Φ のイメージが部分的に推移的な対象全体の成す subtopos と同値であることを示す．定理 4.6.14 より，部分的に推移的な対象全体は subtopos を成していた．従って，任意の部分的に推移的な対象 B に対して，集合対象 (r,M) で $\Phi(r,M)\cong B$ を満たすものが存在することを示せば十分である．部分的に推移的な対象 B をとる．このとき，モノ射 $m:B\rightarrowtail A$ と推移的集合対象 $r:A\to PA$ が存在する．モノ射 m の classifying morphism $\chi(m)$ をとる：

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "!^B"] \arrow[d, tail, "m"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & 1 \arrow[d, tail, "\mathrm{true}"] \\
A \arrow[r, "\chi(m)"'] & \Omega.
\end{tikzcd}$$

このとき，Φ の定義より，$B\cong\Phi(r,\chi(m))$ が成立する．　■

「関手」Φ が「圏同値」を与えるように，次の公理を導入する．

公理 4.8.19 (partial transitivity (T-APT)) 全ての対象は部分的に推移的である.□

注意 4.8.20 (T-APT) により，部分的に推移的な対象 B に対して，モノ射 $m_B:B\to A$ と推移的集合対象 $r_B:A\to PA$ が存在する．各対象 B に対して，m_B と r_B を選んでおく．　◊

事実 4.8.21 Z_0+(S-TA) 集合の成すトポスは，(T-APT) を満たす．　□

証明 任意の集合 B は，その推移閉包 $\mathrm{TR}(B)$ に含まれており，包含写像 $T \hookrightarrow PT$ は推移的集合対象である． ■

定義 4.8.22 (ETS(Z)) 理論 ETS(Z) を

$$\mathrm{ETS(Z)} := \mathrm{EWPT} + (\text{T-APT}) \tag{4.27}$$

とし，**Z-集合の初等トポスの理論**と呼ぶ． ◊

補題 4.8.23 (in ETS(Z)) (i) 各対象 B に対して，集合対象 $\Psi B := (r_B, \chi(m_B))$ と定義する．このとき，$\Phi\Psi B \cong B$ が成立する；
(ii) Φ は equivalence functor であり，Ψ は Φ の逆に拡大できる． □

証明 (i) (T-APT) より，任意の対象 B は部分的に推移的である．従って，定理 4.8.18 の証明にあるように集合対象 $(r, \chi(m))$ をとれば，$\Phi\Psi B \cong B$ を得る．
(ii) (i) より，Ψ は忠実，充満かつ稠密である．よって，Φ は equivalence functor である． ■

本節の最後に，作業しているトポスが ETS(Z) であれば，集合対象のモデルが (S-ATR) を満たすことを示す：

事実 4.8.24 (in ETS(Z)) (i) Φ は推移的集合対象を保つ；
(ii) 集合対象のモデルにおいて，(S-ATR) が成立する． □

証明 (i) Φ が logical equivalence であることによりよい．
(ii) $R : X \to PX$ を，集合対象のモデルにおｋる外延的かつ整礎な関係とする．ETS(Z) における集合対象のモデルは，理論 Z_0 のモデルとなっていたので，事実 4.4.2 より，$R : X \to PX$ を推移的集合対象である．元のトポスにおける関係 $r : A \to PA$ を，

$$PX \xrightarrow{\Phi R} \Phi PX \cong P(\Phi X)$$

とすると，(i) より，r は推移的集合対象である．このとき，$(r, \mathbf{E}_A)$ が集合対象のモデルにおける R の transitive representative となる．すなわち，$(r, \mathbf{E}_A) = \mathrm{TR}(R)$ である．同型射 $X \to (r, \mathbf{E}_A)$ は $\Phi X \xrightarrow{\mathrm{id}_{\Phi X}} \Phi X \cong \Phi(r, \mathbf{E}_A)$ により得られる． ■

4.9 主メタ定理

前節までの結果をまとめると，以下を得る：

メタ定理 4.9.1 集合論 Z とトポスの理論 ETS(Z) の間には，次の関係がある：

(i) Z において，集合の成すトポスは ETS(Z) のモデルである；
(ii) ETS(Z) において，集合対象のモデルは Z のモデルである；
(iii) Z のモデル $\mathcal{M}$ に対し，集合から成るトポスにおける集合対象のモデルは $\mathcal{M}$ と同型である（cf. 事実 4.7.25）；

(iv) ETS(Z) のモデル $\mathcal{E}$ に対し，集合対象のモデルが成すトポスは $\mathcal{E}$ と同値である（cf. 補題 4.8.23）． □

上のメタ定理 (iii), (iv) は，「トポスの理論 ETS(Z) は集合論 Z を特徴づける」と解釈できる．

メタ定理 4.9.2 (AX) を，トポス間の logical equivalence で真偽が保たれる ET における文であるとする．このとき，メタ定理 4.9.1 で，集合論 Z に「(AX) が集合の成すトポスで成立する」を公理に付け加え，トポスの理論 ETS(Z) に (AX) を付け加えたたものについても成立する． □

事実 4.9.3 (in Z) 集合の成すトポスにおいて (T-NNO) が成立することと，無限公理が成立することは同値である． □

公理 4.9.4 (置換図式（in ET) (T-Rep)) $\varphi(M, C)$ を ET の論理式とする．このとき，次は公理である：

$$\forall A \exists B \forall (M : A \to \Omega)[\exists C \varphi(M, C) \implies \exists C(C \leq B \land \varphi(M, C))].$$

ここで，A, B, C は対象を表す変数であり，M は射を表す変数である． □

定義 4.9.5 (ETS(ZF)) 理論 ETS(ZF) を

$$\mathrm{ETS(ZF)} := \mathrm{ETS(Z)} + \mathrm{(T\text{-}NNO)} + \mathrm{(T\text{-}Rep)}$$

とし，**ZF-集合の初等トポスの理論**と呼ぶ． ◊

メタ定理 4.9.6 メタ定理 4.9.1 とメタ定理 4.9.2 は，Z を ZF に ETS(Z) を ETS(ZF) にそれぞれ置き換えたものも成立する． □

証明 事実 4.9.3 により，次を示せば十分である：

(i) (T-Rep) が Z + (S-Rep) の集合が成すトポスで成立する；
(ii) (S-Rep) が ETS(Z) + (T-Rep) における集合対象のモデルで成立する．

(i) 集合 A をとる．(S-Rep) を $\mathcal{P}(A)$ に対して適用すれば，次を得る：

$$\exists N \forall M \subseteq A[\exists C F(M, C) \implies \exists C(C \in N \land F(M, C))].$$

$T := \mathrm{trcl}(N)$ ととれば，求める集合を得る：

$$\forall M \subseteq A[\exists C F(M, C) \implies \exists C(C \subseteq T \land F(M, C))].$$

(ii) $F(X, Y)$ を集合対象のモデルにおける論理式，(r, M) を集合対象とする．次を満たす集合対象 Z が存在することを示せばよい：

$$\forall\,(r, L) \in (r, M)\,[\exists Y F((r, L)\,, Y) \implies \exists Y(Y \in Z \land F((r, L)), Y)].$$

そこで，自由変数 C, L をもつ次の論理式

$$G(L, C) := \exists\,(t : C \to PC, K) \text{：集合対象} \land F((r, L)\,, (t, K))$$

に対して (T-Rep) を適用すると，次を満たす対象 B を得る：

$$\begin{aligned}&\forall (r, L) \in (r, M)\, [\exists Y F((r, L), Y)\\&\quad \implies \exists C(C \leq B \wedge (t : C \to PC, K) \text{：集合対象} \wedge F((r, L), (t, K))].\end{aligned}$$

以上から (S-Rep) を示すためには，任意の対象 B に対して，次を満たす集合対象 Z が存在することを示せばよい：任意の集合対象 $(t : C \to PC, K)$ に対して，

$$C \leq B \implies (t, K) \in Z$$

が成立する．この文の真偽はトポスの logical equivalence で不変であるから，メタ定理 4.9.1 により，Z の集合が成すトポスで成立することを示せばよい．理論 Z で考える．事実 4.4.2 より，普遍再帰性は整礎であることと同値だから，「X が集合対象である」ことは Δ_0 論理式で書ける．よって，制限された内包性公理により，次の集合 E が存在する：

$$E := \{(r : A \to PA, M) \text{：集合対象} \mid A \subseteq B\}.$$

次に，集合

$$D = E/\sim\restriction_E$$

を考える．ここで，$\sim\restriction_E$ は集合対象間の同値関係 $\sim$ を E に制限したものである．集合対象 $X \in E$ に対し, その $\sim\restriction_E$ 同値類を $[X]$ と書くことにする．このとき，$[X] \in D$ であり，$[X]$ を表す D-元 $1 \to D$ もまた $[X]$ と略記する．集合対象間の所属関係 $\in$ は，D 上の関係 $s : D \to PD$ を与える．すなわち，$D \times D$-集合 $S : D \times D \to 2$ を $S([Y], [X]) = 1 \overset{\text{def}}{\iff} Y \in X$ と定め，S の exponential transpose を s とする．$s \circ [X]$ に対応する部分対象 $(s \circ [X])_s$ を考える：

$$\begin{array}{ccc}1 \times D & \xrightarrow{\pi_2} & D\\ {\scriptstyle (s\circ[X])\times \mathrm{id}_D}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (s\circ[X])_s}\\ PD \times D & \xrightarrow[e_D]{} & 2.\end{array}$$

以下では簡単のため，$(s \circ [X])_s$ を $[X]_s$ と略記する．このとき，

$$[Y]_s \in_s [X]_s \quad \text{iff} \quad [X]_s[Y] = \text{true} \quad \text{iff} \quad Y \in X$$

である．集合対象 $Z := \left(s, \bar{D}\right)$ を考えると，次が成立する：

(a) $X \in E \implies X \in Z$;

(b) $(t : C \to PC, K)$: 集合対象 $\wedge\, C \leq B \implies \exists X \in E(X \sim (t, K))$.

集合対象 Z が求めるものである．以下で (a) と (b) を示す．

(a) まず，各 $X \in E$ に対して $X \sim (s, [X]_s)$ となることを示す．$X = (r, M)$ とする．集合対象間の所属関係 $\in$ は整礎関係であるので，これについての帰納法を行う．[*4] 外延性（系 4.8.2）より，任意の集合対象 Y について $Y \in X \iff Y \in (s, [X]_s)$ が成り立つことを示せばよい．$Y \in X$ とする．事実 4.7.21 と $Y \in X$ より，r-元 $N \in_r M$ で $Y \sim (r, N)$ となるものが存在

[*4] 集合対象間の $\in$ は集合論 Z 上の整礎関係でありかつ proper class.

する．$Y' := (r, N)$ とすると，$Y' \in E, [Y'] \in D$ となる．$Y' \in X$ であることから，$[Y']_s \in_s [X]_s$ である．補題 4.7.22 より $(s, [Y']_s) \in (s, [X]_s)$ となる．$Y' \in X$ により帰納法の仮定が使えて $Y' \sim (s, [Y']_s)$ となる．$Y \sim Y'$ とあわせて $Y \in (s, [X]_s)$ を得る．

逆に，$Y \in (s, [X]_s)$ とする．帰納法の仮定により $(s, [Y]_s) \in (s, [X]_s)$ である．補題 4.7.22 より，$[Y]_s \in_s [X]_s$，すなわち，$Y \in X$ である．以上で $X \sim (s, [X]_s)$ が示された．

$X \in Z$ を示す．事実 4.7.21 (ii) と $X \sim (s, [X]_s)$ より，$[X]_s \in_s \bar{D}$ を示せばよいが，$[X] \in D$ によりよい．

(b) 集合対象 $(t : C \to PC, K)$ とモノ射 $m : C \rightarrowtail B$ をとる．$A := m[C]$ ととれば，$A \subseteq B$ である．A は C のモノ射 m による像であるから，同型射 $i : C \to A$ が存在する．t の i に沿った押し出しを考えると，同型射 $Pi : PC \to PA$ と射 $r : A \to PA$ が得られる．$M := \mathrm{in}(r, t)[K]$ とおけば，集合対象 (r, M) は $(r, E) \in E$ と $(r, M) \sim (t, K)$ を満たす． ■

系 4.9.7 (in Z) (T-Rep) が集合の成すトポスで成立することと，(S-Rep) が成立することは同値である． □

メタ定理 4.9.8 Z (resp. ZF) と ETS(Z) (resp. ETS(ZF)) は equiconsistent である． □

A　ET における基本的事実

本節で，ET における基本的事実を集めておく．

定義 A.1 トポスの対象 A に対して，A から直積 $A \times A$ への射 $\Delta_A (= \langle \mathrm{id}_A, \mathrm{id}_A \rangle) : A \to A \times A$ を対角射と呼ぶ．対角射はモノ射である．対角射 Δ_A の classifying morphism $\delta_A : A \times A \to \Omega$ を，Kronecker のデルタと呼ぶ：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "!^A"] \arrow[d, "\Delta_A"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & 1 \arrow[d, "\text{true}"] \\ A \times A \arrow[r, "\delta_A"'] & \Omega. \end{tikzcd}$$

Kronecker のデルタの exponential transpose，すなわち，次の図式を可換にする唯一つの射 $\{\cdot\}_A : A \to PA$ を，単元射と呼ぶ：

$$\begin{tikzcd} A \times A \arrow[d, "\{\cdot\}_A \times A"'] \arrow[dr, "\delta_A"] & \\ PA \times A \arrow[r, "e_A"'] & \Omega. \end{tikzcd}$$
◊

事実 A.2 ([4, p. 166]) 任意の対象 A に対して，Kronecker のデルタ δ_A は次を満たす：任意の 2 つの射 $f, g : B \to A$ に対して，次が成立する：

$$\delta_A \circ \langle f, g \rangle = \mathrm{true} \circ !^A \quad \text{iff} \quad f = g. \tag{28}$$
□

事実 A.3 ([4, Lemma IV.1.1]) 任意の対象 A に対して，単元射 $\{\cdot\}_A$ はモノ射である． $\square$

事実 A.4 ([4, Proposition IV.1.2]) トポスのモノかつエピである射は，同型射である． $\square$

事実 A.5 任意の射 $f : A \to B$ に対して，イメージ分解が存在する． $\square$

事実 A.6 ([4, Proposition IV.7.3]) トポスにおいて，エピ射の引き戻しは再びエピ射となる． $\square$

事実 A.7 ([4, Corollary IV.7.5]) トポスにおいて，ドメインを始対象とする射はモノ射である． $\square$

事実 A.8 ([4, Corollary IV.10.4]) トポスにおいて，モノ射の押し出しはモノ射である．さらに，この押し出し正方図式は引き戻し正方図式でもある． $\square$

事実 A.9 ([4, Corollary IV.10.5]) トポスにおいて，余積

$$X \xrightarrow{\iota_1} X + Y \xleftarrow{\iota_2} Y$$

における包含 ι_1, ι_2 はモノ射である．さらに，次の図式は引き戻し正方図式である：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & Y \arrow[d, "\iota_2"] \\
X \arrow[r, "\iota_1"'] & X + Y.
\end{tikzcd}$$

特に，部分対象 $\iota_1 : X \rightarrowtail X + Y$ と $\iota_2 : Y \rightarrowtail X + Y$ は交わりを持たない．すなわち，$\iota_1 \cap \iota_2 \cong 0$ である． $\square$

事実 A.10 ([4, Corollary IV.10.6]) トポスにおいて，モノ射の族 $m_i : B_i \rightarrowtail A_i$ $(i \in I)$ の直和

$$m : \coprod_{i \in I} B_i \to \coprod_{i \in I} A_i$$

は（存在すれば）モノ射である． $\square$

参考文献

[1] キューネン, ケネス./藤田博司 訳, 『集合論—独立性証明への案内』, 日本評論社, 2008.

[2] マックレーン, S./三好博之／高木理 訳, 『圏論の基礎』, シュプリンガー・ジャパン, 2005.

[3] Johnstone, P. T., *Topos Theory*, Dover Publications, 2014.

[4] Mac Lane, S. and Moerdijk, I. *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory*, Springer, 1992.

[5] Osius, G., *Categorical set theory: A characterization of the category of sets*, Journal of Pure and Applied Algebra, **4**, 79–119, 1974.

数学小説 コーヒーと定理

淡中 圏

とある数学者がカフェでコーヒーを飲みながらノートにぐしゃぐしゃと汚い字で推論を書きなぐっていた。証明への道筋が見つかりそうで見つからず、計算は出口を探して同じところをぐるぐる回っていた。

ふと気が付くとマグカップが空になっていて、お代わりをしようと顔をあげた。向かい側の席に知らない男が座っていた。いつの間にそんなところにいたのか。しかし数学に夢中になっているときに、周囲の変化に全く気が付かないのはいつものことだ。それにしても、混んでいるわけでもないのに相席とは面妖だな。などと数学者は考えていた。

目の前の男は数学者と同じコーヒーを啜って言った。

「ここのコーヒー、あまりおいしくありませんね」

その通りだ。

もしコーヒーを飲みたいなら別のコーヒー屋に行く。そこはここよりもずっと繁盛している。

ここへ来るのは、静かな空間が欲しいからだ。閑古鳥が鳴いているこの喫茶店ならば、静かな空間を独り占めして、まずいコーヒーをお代わりしながらずっと居座り続けることができる。

「何杯くらい飲んだのですか？」

この男は何だろう。突然何を言い出すのだろう。

怪訝な目つきで男を眺めていると、男は突然身を乗り出して、ノートをのぞき込んだ。

そして

「あと一歩じゃないですか。この積分が値を持てばいいわけですよね」

といきなり分かったようなことを言い始めた。

分かったようなことではない。実際にわかっているように見える。

「落ち着いてくださいよ。この部分に似た式が出てくる不等式、以前に証明してません」

頭の中でいくつものニューロンがいきなり通電した。

ノートを急いでめくる。あった。これだ。これを使えばできる。

一心不乱にペンを走らせる。式を書いている時には、次の式変形はすでに見えている。そしてこのままいけば、たどり着けるはず。

もちろん、ここまで来て壁にぶつかることはいつものこと。確信はなんの保証にもならない。

何回か間違えた式をぐにぐにとペンで塗りつぶしたあと、荒くれていた暴れん坊の式はすべて不等式により上から押さえつけられ寝かしつけられて、積分は無事収束した。

この積分が値を持ちさえすれば、積分順序を変えることで、欲しい等式が証明できるこ

とはすでに証明されている。

つまりゴールだ。

まだ細部のチェックをしなくてはいけない。

しかしおおむね間違っていない筈だ。

今書いた式をとりあえず見直す。

大丈夫。

大丈夫だ。

「はあ」

数学者は椅子の背もたれに身を投げ出して、天井を見上げて大きく息を吐いた。

体の力が抜けた。

なんとかなった。喜びより疲れがまず来た。

ノートをめくる音がした。

数学者の意識が再び外界へと向かう。

男がノートをめくっている。

この男は何者なのだ。もう一度疑問が起こる。

「ううむ。いい定理ですね。これにより出所の違う二つの式がつなげられた。いい等式です」

そういうと、男は突然ノートを丸めて両手できつく握りしめ始めた。

「おい！」

数学者は止めようとする。しかしその目の前でノートは圧縮され、そこから黒いしたたりがぽとりぽとりと落ち始めた。

意味が分からなくて数学者は男を止めることを忘れてそのしたたりに見とれてしまう。

「この店のまずいコーヒーでも、数学者の脳髄というフィルターを通せば、悪魔のように黒く、地獄のように熱く、天使のように純粋で、そして恋のように甘い、素晴らしいコーヒーができるのです」

数学者の鼻孔を、素晴らしいコーヒーの香りが刺激する。

「ほら、あなたのカップも」

男にそう言われて数学者は慌ててマグカップを差し出す。その中に馥郁たる黒いマグマがぽたりぽたりと落ちていく。

「飲んでごらんなさい」

言われるまでもなかった。舌をやけどしそうになりながら、数学者は夢中になってコーヒーを楽しんだ。

その熱さを、香りを、苦みを、甘みを。すべてが脳に突き抜けるようだった。

マグカップを置いたとき、男はどこかへ去って行ってしまっていた。のこされたくしゃくしゃのノートはコーヒーの染みで読めたものではなく、

あとから証明を構成しなおそうと思っても、ところどころ抜けがあって、半分ほどしかできなかった。

残り半分はあの男が持って行ってしまったのであろう。*5

*5 数学者はコーヒーを定理に変える機械だ、という言葉はエルデシュのものとされているが、エルデシュ本人はその言葉は友人のアルフレッド・レーニのものだと言っている

淡中 圏　本名：田中健策　毎回「これだけの時間しかかけなかった割には、頑張って書いたな。次回はもっと時間をかけてもっと良いものを書くぞ」と思うのだが、まあ次回も同じことを考えているのであろう。そんなことよりも、なぜ学校のテストで得られるあれを「点」って言うのかを書きながら逆に疑問に思ったよ。

よく分からないブログ　`http://blog.livedoor.jp/kensaku_gokuraku/`

作りかけのサイト　`https://tannakaken.xyz`

鈴木 佑京　いつのまやら労働プログラミング・哲学研究・評論活動と三足の草鞋を吐くことになりました。草鞋を複数個履くのは別に難しくないのですが（極論名乗るだけなので）、複数の締め切りを同時に抱えると大変です。みなさんは気を付けてください。

才川 隆文　今回は編集作業の間, ほとんどの情報交換をオンラインで行い, 関係者が実際に顔を会わせる回数を大幅に減らすことができました. 執筆者だけでなく編集者も地理的に分散して問題ないようです. 次は「編集している自覚がないのにいつのまにか編集させられていて完成している」システムを目指したい.

古賀 実　今回@evinlatie さんにレビューをして頂きました. ありがとうございます.

龍孫江　初めて参加できた. たぶんできたと思う. できたんじゃないかな. できなかったかもしれない. レビューで「載せる価値ナシ」とかなりませんように.

とはいえ「面白そうだな」と思っても行動に移さない怠惰な性分なので, 原稿を書いただけでも個人的には充分過ぎるほど大きな出来事で, しかもなかなか楽しかったので大変満足しています. ありがとうございます.

編集後記: 新たな書き手が加わり、とうとうページ数も 100 ページを超えてしまった。こんな分厚い文章同人誌誰が買うんだろう。しかも内容もマニアック。

しかし売り子としては売れそうになければない程燃えるべきなのかもしれない。知識の叩き売り、頑張るぞ！

新たな書き手をいつでも募集してますんで、web ページにアクセスしてくださいな。バックナンバーも無料で読めるようになってます。

【淡中 圏】

発行者　:　The Dark Side of Forcing

連絡先　:　http://forcing.nagoya

発行日　:　2017 年 08 月 13 日

REVOLUTION

9