

# THE DARK SIDE OF FORCING VII

$$\begin{array}{c} \widehat{2^{\widehat{N}}} \\ \uparrow \\ \widehat{2^N} \\ \uparrow \\ \widehat{N} \end{array}$$

*d*

*d*

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\cdot} & & \\ \text{Sets} & \xrightarrow{\quad} & \text{Sh}(\mathbf{P}, \neg\neg) \\ & \xleftarrow{\Gamma_i} & \\ & \perp & \end{array}$$

HERE IS THE MATH TO THE DARK SIDE



# 目次

|   |    |
|---|----|
| 論理学者の神話——生成篇——  | 1  |
| 第 1 章 <small>なつやすみのこうさく</small> 集合の作りかた事典               | 3  |
| 1.1 使う公理系 . . . . .                                     | 3  |
| 1.2 bootstrap . . . . .                                 | 4  |
| 1.3 再帰 . . . . .  | 8  |
| 1.4 順序数 . . . . .                                       | 12 |
| 1.5 便利系集合 . . . . .                                     | 13 |
| 1.6 小さい基数の作りかた . . . . .                                | 14 |
| 1.7 構造の作りかた . . . . .                                   | 15 |
| 1.8 集合階層の作りかた . . . . .                                 | 16 |
| 1.9 半順序の作りかた . . . . .                                  | 18 |
| 1.10 巨大基数の作りかた . . . . .                                | 19 |
| 参考文献  | 20 |
| 論理学者の神話——排中篇——  | 21 |
| 第 2 章 ここがヘンだよ直観主義 (1)～二値原理と第三値の排除～                      | 23 |
| 2.1 はじめに . . . . .                                      | 23 |
| 2.2 直観主義と二値原理 . . . . .                                 | 24 |
| 2.3 第三の真理値 . . . . .                                    | 26 |
| 2.4 違和感の淵源を探る . . . . .                                 | 28 |
| 2.5 まとめとさらなる違和感 . . . . .                               | 30 |
| 参考文献  | 33 |
| 論理学者の神話——酔人篇——  | 35 |
| 第 3 章 Cohen トポスに関するノート                                  | 37 |
| 3.0 Preliminaries on Topoi . . . . .                    | 38 |
| 3.1 The Topos of Sets . . . . .                         | 41 |
| 3.2 The Cohen Topos . . . . .                           | 52 |
| 3.3 The Preservation of Cardinal Inequalities . . . . . | 56 |
| 参考文献  | 63 |

---

|                                       |    |
|---------------------------------------|----|
| 論理学者の神話——樹木篇——                        | 65 |
| 第 4 章 Ax-Grothendieck の定理 数学と論理学の共進化  | 67 |
| 4.1 主定理：Ax-Grothendieck の定理 . . . . . | 67 |
| 4.2 モデル理論を一舐め . . . . .               | 68 |
| 4.3 主定理の証明（概略） . . . . .              | 72 |
| 4.4 今後の夢 . . . . .                    | 73 |
| 参考文献                                  | 75 |
| 論理学者の神話——矛盾篇——                        | 77 |

# 論理学者の神話——生成篇——

淡中 圈

初めに神は空を創造された。神は言われた。「なにも含まないものあれ」と。すると空があった。神はそれを見て良しとされた。さらに神は空を一つにされた。そのために、神は言われた。「ひとつのものに含まれるものがもう一つのものにも含まれ、そのもう一つのものに含まれるものが最初のものにも含まれるならば、その二つは同じであれ」と。するとそのようなものは同じであった。それを見て神は良しとされた。こうして空は一つになり、神はその空を  $\emptyset$  と呼ぶことにした。第0日である。

次いで神は言われた。「もしあるものがあり、またあるものがあるならば、それらを含み、なおかつもし何かを含むとしたらそれらであるようなものあれ」と。こうして神は対を作られた。またあるものとあるものの対はただ一つであるのを見て、神は良しとされた。神は手始めに  $\emptyset$  の対を作られて、それを良しとされた。第1日である。

続いて神は言われた。「もしあるものがあるならば、それに含まれるものにも含まれるものからなるものあれ」と。するとそれらはあった。神は次々とものから、それらに含まれるものにも含まれるものからなるものを作られていき、それを良しとされた。第2, 3, ... 日である。

さらに神は無限を創造された。「空を含み、またもしあるものを含むならば、そのあるものを含むものとそのあるもの自身からなるものも含むものあれ」と。すると無限があった。神はそれを  $\aleph_0$  と名付けられた。第 $\omega$ 日である。

それから神は様々な関係について考えられた。特に一つのものに対して、ある唯一のものを関係づける関係を鑑みた。そして、神はすべての関係に対して言われた。「関係が一つのものに対して、ある唯一のものを関係づけるならば、すべてのものに対して、その含むものと先ほどの関係により関係づけられたものからなるものあれ」と。そしてそれらはあった。神はこれを見て良しとされた。第 $\omega \cdot 2$ 日である。

そして神は言われた。「もしあるものがあるならば、それに含まれるものからなるようなものだけを含むものあれ」と。これによりあった算えること可からずものを見て、神は良しとされた。第 $2^{\aleph_0}$ 日である。これが $\aleph_1$ 日なのかどうか分からないのを見て神は顔を顰められたが、それは今後の課題とされた。

神はそのあと、いくつかの奇妙なものを見られてよしとされるかどうか悩まれた。悩んだ結果、それらはあらぬことにすると決められた。「すべての空でないものは、その含むものを一切含まないものを含むようにあれ」と。するとすべてのものはそうあった。こうしてものたちは整理され、基礎の確かなものだけになった。神はそれを見て良しとされた。

最後に神は必要に迫られて言われた。「互いに同じものを含まない空でないものだけを含んだものがあつたとすると、その含んだものが含んだものを一つだけずつ含むものあ

れ」するとそれはあった。神はそれを見て、言いようのない気持ちの悪さを感じられた。今も感じているという。

神は自分の作ったすべてのものをご覧になって、これでよかったのか疑問に思われた。その疑問が解けない疑問であることを神は証明された。

神は全てが終わった日を数えようとしたが、矛盾が起こることに気付かれたので、神はその日を数えなかった。

これが創造の由来である。

# 第 1 章

## なつやすみのこうさく 集合の作りかた事典

才川隆文, 宮崎達也

不思議なプログラムを読んで動作を考えるのが楽しいのと同じように、もしかして集合論から証明を抜いて、定義と構成を並べてみたら楽しいのではないか。そんな実験。

### 1.1 使う公理系

本章で扱う理論は ZF およびその拡張であり、公理系として Kunen [3] にある形のものを使う。論理記号と  $\in$  と  $=$  以外の記号は、定義による拡張として、あるいは記法として導入されるが、どちらも記法と呼ぶことにする。例えば公理系に出現する  $0, S(-), \subset$ , 「整列順序付け」は記法である。

集合の存在  $\exists x(x = x)$ .

外延性  $\forall x \forall y (\forall z (z \in x \iff z \in y) \Rightarrow x = y)$ .

基礎  $\forall x (\exists y (y \in x) \Rightarrow \exists y (y \in x \wedge \neg \exists z (z \in x \wedge z \in y)))$ .

内包性 (公理図式) ZF の言語の任意の論理式  $\phi$  について、

$$\forall z \forall w_1, \dots, w_n \exists y \forall x (x \in y \iff x \in z \wedge \phi).$$

ただし  $\phi$  の自由変数は  $x, z, w_1, \dots, w_n$  に含まれるものとする。

対  $\forall x \forall y \exists z (x \in z \wedge y \in z)$ .

和集合  $\forall \mathcal{F} \exists A \forall Y \forall x (x \in Y \wedge Y \in \mathcal{F} \Rightarrow x \in A)$ .

置換 (公理図式) ZF の言語の任意の論理式  $\phi$  について、

$$\forall A \forall w_1, \dots, w_n (\forall x \in A \exists! y \phi \Rightarrow \exists Y \forall x \in A \exists y \in Y \phi).$$

ただし  $\phi$  の自由変数は  $x, y, A, w_1, \dots, w_n$  に含まれるものとする。

無限  $\exists x (0 \in x \wedge \forall y \in x (S(y) \in x))$ .

冪集合  $\forall x \exists y \forall z (z \subset x \Rightarrow z \in y)$ .

選択  $\forall A \exists R (R \text{ は } A \text{ を整列順序付けする})$ .

## 1.2 bootstrap

### 1.2.1 内包表記; $\{x : \phi\}, \{x \in A : \phi\}$

論理式  $\phi$  を満たす集合をすべて集めて  $\{x : \phi\}$  と書くことにする. この “ $\{x : \phi\}$ ” は, そのままでは ZF の扱う集合ではなくただの文字列である. しかし次のいずれかの方法によって, ZF の論理式の中で使うことができる.

内包性公理が使える場合  $\{x : \phi\}$  のサイズが他の集合によって制限される場合である. 任意の集合  $A$  と論理式  $\phi$  に対して, 内包性公理によって集合  $y$  が存在して, 次をみたす. <sup>\*1</sup>

$$\forall x(x \in y \iff x \in A \wedge \phi).$$

この  $y$  をあらわす記法として  $\{x : x \in A \wedge \phi\}$  および  $\{x \in A : \phi\}$  を使う.  $\phi$  から集合  $A$  の存在が言えるならば, すなわち集合  $A$  が存在して

$$\forall x(\phi \Rightarrow x \in A \wedge \phi)$$

をみたすならば,  $\{x : \phi\}$  を  $\{x \in A : \phi\}$  と同じ意味で使う.

述語記号として扱う場合 内包性公理を適用できない場合でも,  $\{x : \phi\}$  を, 特殊な記法を持った述語記号として次のように導入することができる. ただし  $\phi[x := a]$  は  $\phi$  での  $x$  の自由な出現に  $a$  を代入した論理式である.

$$a \in \{x : \phi\} \stackrel{def}{\iff} \phi[x := a].$$

### 1.2.2 クラス

一般に述語  $\mathbf{A}$  に対しても, 次の記法を導入する.

$$a \in \mathbf{A} \stackrel{def}{\iff} \mathbf{A}(a),$$

また,  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  を述語あるいは集合としたとき, 次の記法を導入する.

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \stackrel{def}{\iff} \forall x(x \in \mathbf{A} \iff x \in \mathbf{B}),$$

ZF の述語記号は  $\in$  と  $=$  だけであった. したがって上記の記法により, 多くの論理式で述語を集合のように扱うことができる. このため, ZF を用いて議論するとき, 述語をクラスとも呼ぶ.

クラス  $\mathbf{A}$  について  $\mathbf{A} = \{x : \mathbf{A}(x)\}$  である. 内包表記の節で述べたように, 集合  $B$  が存在して  $\forall x(\mathbf{A}(x) \Rightarrow x \in B \wedge \mathbf{A}(x))$  がなりたつならば,  $\{x : \mathbf{A}(x)\}$  は集合である. このとき  $\mathbf{A}$  も集合として扱う.

集合になり得ないクラスを真クラスという. 真クラスは他のクラスや集合の要素となることができない.

<sup>\*1</sup> 変数  $y$  が  $\phi$  の中で自由であってはならないので, ここでの  $y$  はこの場で新たに生成された変数名を意味するメタ変数である.



### 1.2.3 全ての集合のなすクラス; $\mathbf{V}$

全ての集合のなすクラス  $\mathbf{V}$  は次のように定義できる.\*2

$$\mathbf{V}(x) \stackrel{def}{\iff} (x = x).$$

内包表記を使って書くと次のようになる.

$$\mathbf{V} := \{x : x = x\}.$$

### 1.2.4 空集合; $\emptyset$

何か一つ集合  $X$  を用意して, 内包性公理で作る.

$$\emptyset := \{x \in X : x \neq x\}.$$

$X$  が存在することは別に導出する必要があるが, 集合の存在公理が使える.

### 1.2.5 $\{x, y\}, \{x\}, \langle x, y \rangle$

$x, y$  が与えられているとする. まず対の公理を  $x, y$  に適用して,  $\{x, y\}$  を部分集合とする集合である  $p_{xy}$  を作る. 次に内包性公理で,

$$\{x, y\} := \{z \in p_{xy} : z = x \vee z = y\}$$

とすると, ちょうど非順序対  $\{x, y\}$  が得られる.

一点集合  $\{x\}$  と順序対  $\langle x, y \rangle$  は非順序対から作れる.

$$\{x\} := \{x, x\}.$$

$$\langle x, y \rangle := \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

順序対については次がなりたつ

$$\forall x \forall y \forall x' \forall y' (\langle x, y \rangle = \langle x', y' \rangle \Rightarrow x = x' \wedge y = y').$$

### 1.2.6 置換表記; $\{f(x) : x \in \mathbf{A}\}$

論理式  $\phi$  がクラス  $\mathbf{A}$  上で関数的であるとする. すなわち,

$$\forall x \in \mathbf{A} \exists! y \phi(x, y)$$

が満たされるとする. さらに対応する関数記号  $f$  が定義されているとする.

$$y = f(x) \iff \phi(x, y).$$

このとき  $f$  の像であるクラス  $\{f(x) : x \in \mathbf{A}\}$  を次のように定義する.

$$\{f(x) : x \in \mathbf{A}\} := \{y : \exists x \in \mathbf{A} (y = f(x))\}.$$

もし  $\mathbf{A}$  が集合ならば, 置換公理によって,  $\forall x \in A (f(x) \in Y)$  を満たす  $Y$  を作ることができ,  $\{f(x) : x \in \mathbf{A}\}$  も集合となる.

\*2  $x = x$  はどのような  $x$  についても常に真.

1.2.7 和;  $\bigcup \mathcal{F}$ 

$\mathcal{F}$  をクラスとする. このとき  $\mathcal{F}$  の和であるクラス  $\bigcup \mathcal{F}$  を次のように定義する.

$$\bigcup \mathcal{F} := \{x : \exists A \in \mathcal{F} (x \in A)\}.$$

$\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_a : a \in \mathbf{A}\}$  のように  $\mathcal{F}$  の要素がクラス  $\mathbf{A}$  で添字付けられているときは, 次の記法も用いる.

$$\bigcup_{a \in \mathbf{A}} \mathcal{F}_a := \bigcup \{\mathcal{F}_a : a \in \mathbf{A}\}.$$

$\mathcal{F}$  が集合であるときは, 和集合公理によって  $\bigcup \mathcal{F}$  を部分集合とする集合が得られるので,  $\bigcup \mathcal{F}$  も集合となる.

1.2.8 共通部分;  $\bigcap \mathcal{F}$ 

$\mathcal{F}$  をクラスとする. このとき  $\mathcal{F}$  の共通部分であるクラス  $\bigcap \mathcal{F}$  を次のように定義する.

$$\bigcap \mathcal{F} := \{x : \forall A \in \mathcal{F} (x \in A)\}.$$

これは  $\mathcal{F}$  が空集合の場合  $\mathbf{V}$  と等しくなる.  $\mathcal{F}$  が要素  $A$  を持てば集合  $\{x \in A : \forall B \in \mathcal{F} (x \in B)\}$  と等しくなる.

和のときと同様次の記法も用いる.

$$\bigcap_{a \in \mathbf{A}} \mathcal{F}_a := \bigcap \{\mathcal{F}_a : a \in \mathbf{A}\}.$$

1.2.9 有限の和と共通部分;  $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}, \mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ 

クラス  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  に対しては次のように定義する.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cup \mathbf{B} &:= \{x : x \in \mathbf{A} \vee x \in \mathbf{B}\}, \\ \mathbf{A} \cap \mathbf{B} &:= \{x : x \in \mathbf{A} \wedge x \in \mathbf{B}\}. \end{aligned}$$

集合  $A, B$  に対しては, 対  $\{A, B\}$  を作ってから, その和と共通部分をとればよい.

$$\begin{aligned} A \cup B &:= \bigcup \{A, B\}, \\ A \cap B &:= \bigcap \{A, B\}. \end{aligned}$$

## 1.2.10 関係

関係とは要素が順序対であるような集合やクラスのことである.

$$\mathbf{R} \text{ は関係である} \stackrel{def}{\iff} \forall x \in \mathbf{R} \exists y \exists z (x = \langle y, z \rangle).$$

関係  $\mathbf{R}$  に要素  $\langle a, b \rangle$  が含まれることを,  $a \mathbf{R} b$  と表記することがある.

1.2.11  $\text{dom}(\mathbf{R}), \text{ran}(\mathbf{R})$ 

$\mathbf{R}$  を関係として、その定義域および値域をあらわすクラスである。

$$\begin{aligned}\text{dom}(\mathbf{R}) &:= \{a : \exists b(\langle a, b \rangle \in R)\}, \\ \text{ran}(\mathbf{R}) &:= \{b : \exists a(\langle a, b \rangle \in R)\}.\end{aligned}$$

$\mathbf{R}$  が集合  $R$  の場合は、内包性公理を使って集合にすることができる。  $\langle a, b \rangle$  の定義を思いだせば、  $a, b$  を要素として含む集合を  $\cup\cup R$  と取れることがわかる。したがって以下のように定義しなおすとよい。

$$\begin{aligned}\text{dom}(R) &:= \{a \in \cup\cup R : \exists b(\langle a, b \rangle \in R)\}, \\ \text{ran}(R) &:= \{b \in \cup\cup R : \exists a(\langle a, b \rangle \in R)\}.\end{aligned}$$

## 1.2.12 関数

$\text{dom}$  を使って、定義域が何であるかを引数としない形で、「関数である」という論理式が定義できる。

$$\mathbf{F} \text{ は関数である} \stackrel{\text{def}}{\iff} \mathbf{F} \text{ は関係である} \wedge \forall x \in \text{dom}(\mathbf{F}) \exists! y(\langle x, y \rangle \in \mathbf{F}).$$

$\mathbf{F}$  が関数であるならば、 $\mathbf{F}$  を関数記号としても導入して  $\mathbf{F}(x)$  と書けるようにする。

$$y = \mathbf{F}(x) \iff \langle x, y \rangle \in \mathbf{F}.$$

$\text{dom}(\mathbf{F})$  の部分クラス  $\mathbf{S}$  に対して、 $\mathbf{F}$  による  $\mathbf{S}$  の像を  $\mathbf{F}''\mathbf{S}$  と書く。

$$\mathbf{F}''\mathbf{S} := \{\mathbf{F}(y) : y \in \mathbf{S}\}.$$

また、 $\mathbf{F}$  の  $\mathbf{S}$  への制限を  $\mathbf{F} \upharpoonright \mathbf{S}$  と書く。

$$\mathbf{F} \upharpoonright \mathbf{S} := \{p \in \mathbf{F} : \exists x \in \mathbf{S} \exists y(p = \langle x, y \rangle)\}.$$

$\mathbf{F}$  が関数であることと、その定義域と値域とを一度に書くときは次の記法を使う。

$$\mathbf{F} : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \stackrel{\text{def}}{\iff} \mathbf{F} \text{ は関数である} \wedge \text{dom}(\mathbf{F}) = \mathbf{A} \wedge \text{ran}(\mathbf{F}) \subset \mathbf{B}.$$

1.2.13 冪集合;  $\mathcal{P}(A)$ 

まず冪集合公理を  $A$  に適用することで、 $\mathcal{P}(A)$  を部分集合とする集合である  $P_A$  を作る。次に内包性公理で、

$$\mathcal{P}(A) := \{x \in P_A : x \subset A\}$$

とすると、ちょうど  $\mathcal{P}(A)$  が得られる。

1.2.14 直積;  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 

クラス  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  に対しては次のように定義する.

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} := \{x : \exists a \in \mathbf{A} \exists b \in \mathbf{B} (x = \langle a, b \rangle)\}.$$

集合  $A, B$  に対しては,  $A, B$  の和の冪に内包性公理を適用すれば作れる.

$$A \times B := \{x \in \mathcal{P}(A \cup B) : \exists a \in A \exists b \in B (x = \langle a, b \rangle)\}.$$

冪集合公理の代わりに置換公理を使うこともできる.  $\forall x \forall y \exists! z (z = \langle x, y \rangle)$  であるので,

$$\text{prod}(A, y) := \{\langle x, y \rangle : x \in A\}$$

が各  $y$  について得られる. 今度は  $\forall y \exists! z (z = \text{prod}(A, y))$  がなりたつので,

$$\text{prod}'(A, B) := \{\text{prod}(A, y) : y \in B\}$$

が得られ, この和を取ることで  $A \times B$  が得られる.

$$A \times B := \bigcup \text{prod}'(A, B).$$

1.2.15  $A$  から  $B$  への関数全体の集合;  ${}^A B$ 

$\text{dom}(f) = A$  と  $\text{ran}(f) \subset B$  を満たすような関係  $f$  は  $\mathcal{P}(A \times B)$  の要素であるので, これをサイズを抑えることができ, 内包性公理が使える.

$$\begin{aligned} {}^A B &:= \{f \in \mathcal{P}(A \times B) : (f : A \rightarrow B)\} \\ &= \{f \in \mathcal{P}(A \times B) : \forall a \in A \exists! b (\langle a, b \rangle \in f)\}. \end{aligned}$$

1.2.16 後続者集合;  $S(x), x + 1$ 

集合  $x$  について, その後続者集合  $S(x)$  を以下のように作る.

$$S(x) := x \cup \{x\}.$$

$S(x)$  を  $x + 1$  とも表記する.

## 1.3 再帰

## 1.3.1 整礎な関係

$\mathbf{A}, \mathbf{R}$  をクラスとし,  $\mathbf{R}$  は関係であるとする.  $\langle \mathbf{A}, \mathbf{R} \rangle$  が整礎である, または  $\mathbf{R}$  が  $\mathbf{A}$  上整礎であるとは,

$\mathbf{A}$  の任意の空でない部分集合  $B$  が  $\mathbf{R}$  極小元を持つこと, すなわち

$$\forall B \subset \mathbf{A} (B \neq \emptyset \Rightarrow \exists z \in B \forall w \in B (\neg(w \mathbf{R} z)))$$

ということである。

$\langle \mathbf{A}, \mathbf{R} \rangle$  が整礎であるとき、各  $x \in \mathbf{A}$  について  $x$  と  $\mathbf{R}$  で比べて小さい元のなすクラス  $\text{pred}(\mathbf{A}, \mathbf{R}, x)$  を以下のように定義する。

$$\text{pred}(\mathbf{A}, \mathbf{R}, x) := \{y : y \in \mathbf{A} \wedge y \mathbf{R} x\}.$$

$\langle \mathbf{A}, \mathbf{R} \rangle$  が文脈から明らかなきときは、単に  $\text{pred}(x)$  と書くこともある。

### 1.3.2 集合状な関係

クラス  $\mathbf{A}$  について、 $\langle \mathbf{A}, \mathbf{R} \rangle$  が集合状であるとは、 $\mathbf{A}$  の任意の元  $x$  について、クラス  $\text{pred}(\mathbf{A}, \mathbf{R}, x)$  が集合となることである。

$\mathbf{A}$  が集合ならば  $\langle \mathbf{A}, \mathbf{R} \rangle$  は集合状である。

### 1.3.3 整礎帰納法

定理  $\langle \mathbf{A}, \mathbf{R} \rangle$  を整礎かつ集合状な関係とする。このとき任意の論理式  $\phi$  について次がなりたつ。

$$\forall x \in \mathbf{A} (\forall y \in \mathbf{A} (y \mathbf{R} x \Rightarrow \phi(y)) \Rightarrow \phi(x)) \Rightarrow \forall x \in \mathbf{A} \phi(x).$$

証明  $\forall x \in \mathbf{A} (\forall y \in \mathbf{A} (y \mathbf{R} x \Rightarrow \phi(y)) \Rightarrow \phi(x))$  を仮定する。ここから背理法を使う。 $\neg(\forall x \in \mathbf{A} \phi(x))$  を仮定すると  $\{x \in \mathbf{A} : \neg\phi(x)\}$  が空ではないので、整礎性から極小元  $z$  を取れる。<sup>\*3</sup> 極小性から  $w \mathbf{R} z$  となる  $\mathbf{A}$  の任意の元  $w$  について  $\phi(w)$  がなりたつ。したがって最初の仮定から  $\phi(z)$  がなりたつ。矛盾である。

### 1.3.4 整列順序

クラス  $\mathbf{A}$  と関係  $\sqsubset$  について、

$\langle \mathbf{A}, \sqsubset \rangle$  は整列順序である  $\stackrel{def}{\iff} (\langle \mathbf{A}, \sqsubset \rangle \text{ は整礎である}) \wedge (\langle \mathbf{A}, \sqsubset \rangle \text{ は狭義の全順序である})$ .

$\langle \mathbf{A}, \sqsubset \rangle$  が整列順序であることを、 $\sqsubset$  が  $\mathbf{A}$  を整列順序付けするとも言う。

$\langle \mathbf{A}, \sqsubset \rangle$  は狭義の全順序である  $\stackrel{def}{\iff} (\forall y \in \mathbf{A} \forall z \in \mathbf{A} \forall w \in \mathbf{A} (y \sqsubset z \wedge z \sqsubset w \Rightarrow y \sqsubset w))$   
 $\wedge (\forall y \in \mathbf{A} \forall z \in \mathbf{A} (y = z \vee y \sqsubset z \vee z \sqsubset y))$   
 $\wedge (\forall y \in \mathbf{A} (\neg(y \sqsubset y)))$ .

### 1.3.5 推移性

クラス  $\mathbf{A}$  について、 $\langle \mathbf{A}, \in \rangle$  が推移的であるとは、 $\mathbf{A}$  の任意の元  $x$  について、 $x$  が  $\mathbf{A}$  の部分クラスとなることである。

$\langle \mathbf{A}, \in \rangle$  が推移的である  $\stackrel{def}{\iff} \forall x (x \in \mathbf{A} \Rightarrow x \subset \mathbf{A})$ .

<sup>\*3</sup> 集合状という条件をここで使う。  $\{x \in \mathbf{A} : \neg\phi(x)\}$  は一般に集合とはならないことに注意せよ。

1.3.6 全ての順序数のなすクラス;  $\mathbf{ON}$ 

$$\mathbf{ON} := \{x : x \text{ は順序数である}\}.$$

集合  $x$  が順序数であるとは,

- $\langle x, \in \rangle$  が推移的であり, かつ
- $\langle x, \in \rangle$  が整列順序であることである.

$\mathbf{ON}$  自身についても,  $\langle \mathbf{ON}, \in \rangle$  が推移的かつ整列順序となる.

## 1.3.7 順序数に対する再帰

汎関数  $\mathbf{F}$  として与えられた再帰的定義から, 関数  $\mathbf{G}$  を作ることができる.

定理 任意の関数  $\mathbf{F} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  について, 次をみたす関数  $\mathbf{G} : \mathbf{ON} \rightarrow \mathbf{V}$  が唯一存在する.

$$\forall \alpha \in \mathbf{ON} (\mathbf{G}(\alpha) = \mathbf{F}(\mathbf{G} \upharpoonright \alpha)).$$

証明 唯一であることと存在することを証明する. ■

唯一であることについて,  $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2$  がそのような関数であったと仮定して,

$$\forall \alpha \in \mathbf{ON} (\mathbf{G}_1(\alpha) = \mathbf{G}_2(\alpha))$$

を整礎帰納法で証明する.  $\alpha \in \mathbf{ON}$  とする. 任意の  $\beta \in \alpha$  について  $\mathbf{G}_1(\beta) = \mathbf{G}_2(\beta)$  であるというのが帰納法の仮定である. 仮定より  $\mathbf{G}_1(\alpha) = \mathbf{F}(\mathbf{G}_1 \upharpoonright \alpha)$  および  $\mathbf{G}_2(\alpha) = \mathbf{F}(\mathbf{G}_2 \upharpoonright \alpha)$  であるが, 帰納法の仮定より  $\mathbf{G}_1 \upharpoonright \alpha = \mathbf{G}_2 \upharpoonright \alpha$  であるので,  $\mathbf{G}_1(\alpha) = \mathbf{G}_2(\alpha)$  である.

存在について, 次の論理式  $\phi$  を考える.

$$\begin{aligned} \phi(\alpha) := & \exists! g (g \text{ は関数である} \\ & \wedge \text{dom}(g) = \alpha + 1 \\ & \wedge \forall \beta \in \text{dom}(g) (g(\beta) = \mathbf{F}(g \upharpoonright \beta))). \end{aligned}$$

$\phi(\alpha)$  がなりたつとき, 唯一存在する  $g$  を  $g_\alpha$  と呼ぶことにする. まず,  $\mathbf{G}$  が唯一であることを証明したときと同様にして,  $g_\alpha \upharpoonright (\alpha \cap \beta) = g_\beta \upharpoonright (\alpha \cap \beta)$  を示すことができる. 次に  $\forall \alpha \in \mathbf{ON} \phi(\alpha)$  を整礎帰納法で証明する.  $\alpha \in \mathbf{ON}$  とし,  $\forall \beta \in \alpha \phi(\beta)$  を仮定する.  $g_\beta$  たちを使って次の定義を行う.

$$\begin{aligned} h & := \bigcup_{\beta \in \alpha} g_\beta, \\ g & := h \cup \langle \alpha, \mathbf{F}(h) \rangle. \end{aligned}$$

すると  $g$  が  $\phi(\alpha)$  の証拠となる. ■

系 任意の関数  $\mathbf{F} : \mathbf{ON} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  について, 次をみたす関数  $\mathbf{G} : \mathbf{ON} \rightarrow \mathbf{V}$  が唯一存在する.

$$\forall \alpha \in \mathbf{ON} (\mathbf{G}(\alpha) = \mathbf{F}(\alpha, \mathbf{G} \upharpoonright \alpha)).$$

これを証明するには  $\mathbf{F}'(g) := \mathbf{F}(\text{dom}(g), g)$  として,  $\mathbf{F}'$  に定理を適用する. ■

注 汎関数<sup>\*4</sup> から関数を作る方法というとは  $\lambda$  計算の不動点オペレータがあり、これは  $F : (T \rightarrow U) \rightarrow (T \rightarrow U)$  を受けとって  $G : T \rightarrow U$  を返す。  $F$  の引数の順番を入れかえて uncurry 化すれば  $F : T \times (T \rightarrow U) \rightarrow U$  である。一方で系の  $\mathbf{F}$  を見ると、主張および証明において第二引数はいつも定義域が制限された関数であるので、  $\mathbf{F} : \prod_{\alpha \in \mathbf{ON}} (\mathbf{ON}_{<\alpha} \rightarrow \mathbf{V}) \rightarrow \mathbf{V}$  という型が付くと考えることができる。つまり両者は機能においても型においても良く似ている。再帰呼び出しの形が制限されない汎関数を fix して部分関数を作るのが不動点オペレータであり、再帰呼び出しが整礎なデータ構造に沿って制限された汎関数を fix して全域関数を作るのがこの定理ということになる。

### 1.3.8 整礎な関係の推移的閉包; cl

$\mathbf{R}$  は  $\mathbf{A}$  上の整礎かつ集合状な関係であるとし、  $x$  を  $\mathbf{A}$  の元であるとする。このとき、  $\mathbf{R}$  の推移的閉包で比べて  $x$  よりも小さい元の集合  $\text{cl}(\mathbf{A}, \mathbf{R}, x)$  を、  $\omega$  上の整列帰納法を使って定義する。

$$\begin{aligned} \text{pred}^0(\mathbf{A}, \mathbf{R}, x) &:= \text{pred}(\mathbf{A}, \mathbf{R}, x), \\ \text{pred}^{n+1}(\mathbf{A}, \mathbf{R}, x) &:= \bigcup_{y \in \text{pred}^n(\mathbf{A}, \mathbf{R}, x)} \text{pred}(\mathbf{A}, \mathbf{R}, y), \\ \text{cl}(\mathbf{A}, \mathbf{R}, x) &:= \bigcup_{n < \omega} \text{pred}^n(\mathbf{A}, \mathbf{R}, x). \end{aligned}$$

$\langle \mathbf{A}, \mathbf{R} \rangle$  が文脈から明らかなきときは、単に  $\text{cl}(x)$  と書くこともある。

$\mathbf{A}$  上の関係  $\sqsubset$  を

$$x \sqsubset y \stackrel{\text{def}}{\iff} x \in \text{cl}(y)$$

と定義すると、  $\sqsubset$  は  $\mathbf{R}$  の推移的閉包であり、  $\mathbf{A}$  上の厳密な半順序関係である。

### 1.3.9 外延的

クラス  $\mathbf{A}$  について、  $\langle \mathbf{A}, \mathbf{R} \rangle$  が外延的であるとは、  $\mathbf{A}$  の任意の元  $x, y$  について、

$$(\forall z \in \mathbf{A} (z \mathbf{R} x \iff z \mathbf{R} y)) \Rightarrow x = y$$

がなりたつことである。

### 1.3.10 整礎な関係に対する再帰

整礎な関係の上でも、関数の再帰的定義ができる。

定理  $\mathbf{A}, \mathbf{R}$  をクラスとし、  $\langle \mathbf{A}, \mathbf{R} \rangle$  は整礎かつ集合状であるとする。このとき任意の関数  $\mathbf{F} : \mathbf{A} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  について、次をみたす関数  $\mathbf{G} : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{V}$  が唯一存在する。

$$\forall x \in \mathbf{A} (\mathbf{G}(x) = \mathbf{F}(x, \mathbf{G} \upharpoonright \text{pred}(x))).$$

■

<sup>\*4</sup> ここでは単に関数を引数とする関数という意味で汎関数と書いた。

証明は順序数についての再帰と同様に、次の  $\phi$  について  $\forall x \in \mathbf{A} \phi(x)$  を帰納法で示して  $\mathbf{G}$  を近似する.

$$\begin{aligned} \phi(x) := & \exists! g (g \text{ は関数である} \\ & \wedge \text{dom}(g) = \text{cl}(x) \cup \{x\} \\ & \wedge \forall y \in \text{dom}(g) (g(y) = \mathbf{F}(y, g \upharpoonright \text{pred}(y))))). \end{aligned}$$

### 1.3.11 ランク; $\text{rank}(\mathbf{A}, \mathbf{R}, x)$

$\mathbf{A}, \mathbf{R}$  をクラスとし、 $\langle \mathbf{A}, \mathbf{R} \rangle$  は整礎かつ集合状であるとする. このとき  $\mathbf{A}$  の元  $x$  のランク  $\text{rank}(\mathbf{A}, \mathbf{R}, x)$  を次のように定義する.

$$\text{rank}(\mathbf{A}, \mathbf{R}, x) := \bigcup \{ \text{rank}(\mathbf{A}, \mathbf{R}, y) + 1 : y \in \mathbf{A} \wedge y \mathbf{R} x \}.$$

- $\text{rank}(\mathbf{A}, \mathbf{R}, x)$  は順序数となる.
- 基礎の公理がなりたつとき、 $\text{rank}(\mathbf{V}, \in, x)$  を単に  $\text{rank}(x)$  と書く.

### 1.3.12 順序型; $\text{type}(A, \sqsubset)$

$A$  は集合で、 $\langle A, \sqsubset \rangle$  は整列順序であるとする. このとき  $\langle A, \sqsubset \rangle$  の順序型  $\text{type}(A, \sqsubset)$  を次のように定義する.

$$\text{type}(A, \sqsubset) := \bigcup_{x \in A} (\text{rank}(A, \sqsubset, x) + 1)$$

$\text{type}(A, \sqsubset)$  は順序数であり、 $\langle A, \sqsubset \rangle$  と  $\langle \text{type}(A, \sqsubset), \in \rangle$  は順序同型である.

### 1.3.13 Mostowski collapse

$\mathbf{A}, \mathbf{R}$  をクラスとし、 $\langle \mathbf{A}, \mathbf{R} \rangle$  は整礎かつ集合状であるとする. このとき、関数  $\mathbf{G}$  を次のように定義する.

$$\mathbf{G}(x) := \{ \mathbf{G}(y) : y \in \mathbf{A} \wedge y \mathbf{R} x \}.$$

$\mathbf{G}$  による  $\mathbf{A}$  の像を  $\mathbf{M}$  とすると、 $\mathbf{M}$  について次がなりたつ.

- $\mathbf{M}$  は推移的である.
- $\langle \mathbf{A}, \mathbf{R} \rangle$  が外延的であれば、 $\mathbf{G}$  は  $\langle \mathbf{A}, \mathbf{R} \rangle$  と  $\langle \mathbf{M}, \in \rangle$  の同型を与える. すなわち  $\mathbf{G}$  は  $\mathbf{A}$  から  $\mathbf{M}$  への関数として全単射であり、かつ

$$\forall x \in \mathbf{A} \forall y \in \mathbf{A} (x \mathbf{R} y \iff \mathbf{G}(x) \in \mathbf{G}(y))$$

がなりたつ.

## 1.4 順序数

### 1.4.0

$$0 := \emptyset.$$



## 1.4.1

$$1 := \{0\}.$$

## 1.4.2

$$2 := \{0, 1\}.$$

## 1.4.3

$$3 := \{0, 1, 2\}.$$

1.4. $\omega$ 

$$\omega := \{0, 1, 2, \dots\}.$$

1.4. $\omega + \omega$ 

$$\omega + \omega := \bigcup \{\omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots\}.$$

1.4. $\omega \cdot \omega$ 

$$\omega \cdot \omega := \bigcup \{\omega, \omega + \omega, \omega + \omega + \omega, \dots\}.$$

1.4. $\omega^\omega$ 

$$\omega^\omega := \bigcup \{\omega, \omega \cdot \omega, \omega \cdot \omega \cdot \omega, \dots\}.$$

1.4. $\epsilon_0$ 

$$\epsilon_0 := \bigcup \{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \dots\}.$$

## 1.5 便利系集合

## 1.5.1 半順序

$\mathbb{P} = (P, \leq)$  が半順序とは  $P$  が空でなくまた以下の 2 条件を満たすこと:

- $\forall p \in P, p \leq p$ .
- 任意の  $p, q, r \in P$  に対して  $p \leq q$  かつ  $q \leq r$  ならば  $p \leq r$ .

## 1.5.2 フィルター

$F \subset \mathcal{P}(A)$  が  $A$  上のフィルターであるとは以下の 3 条件を満たすことをいう.

- $F \neq \emptyset$ .

- 任意の  $X \subset A$  に対して, ある  $Y \in F$  で  $Y \subset X$  となるものがあれば  $X \in F$  となる.
- 任意の  $X, Y \in F$  に対して,  $X \cap Y \in F$ .

### 1.5.3 超フィルター

$F \subset \mathcal{P}(A)$  がフィルターであるとき, それが超フィルターであるとは以下の条件を満たすことをいう.

- $\forall X \subset A$  に対して,  $X$  または  $A \setminus X$  のいずれかが  $F$  に属する.

### 1.5.4 正則基数

無限基数  $\kappa$  が正則基数であるとは, 任意の  $\alpha < \kappa$  に対して,  $\alpha$  を  $\kappa$  へ共終に写す関数が存在しないことをいう. ここで,  $f: \alpha \rightarrow \kappa$  が共終であるとは任意の  $\beta \in \kappa$  に対して,  $\beta \leq f(\gamma)$  となるような  $\gamma \in \alpha$  が常にとれることをさす.

### 1.5.5 閉非有界フィルター

$\kappa$  を非可算正則基数とする.

- $C \subset \kappa$  が閉であるとは任意の  $\alpha \in \kappa$  ( $\min(C) < \alpha < \kappa$ ) に対して,  $\cup(C \cap \alpha) \in C$  となることをいう.
- $C \subset \kappa$  が非有界であるとは任意の  $\alpha \in \kappa$  に対して,  $\beta > \alpha$  となる  $\beta \in C$  が存在することをいう.
- $C \subset \kappa$  が閉非有界であるとはそれが閉かつ非有界であることをいう.

$\kappa$  の閉非有界な部分集合を含む  $\kappa$  の部分集合全体からなる集合はフィルターとなる. これを閉非有界フィルターという.

### 1.5.6 定常集合

$\kappa$  を非可算正則基数とする.  $S \subset \kappa$  が定常集合であるとはそれが任意の  $\kappa$  の閉非有界部分集合と空でない交わりを持つことをいう.

## 1.6 小さい基数の作りかた

### 1.6.1 $X$ の濃度

$$|X| := \bigcap \{ \beta \in \mathbf{ON} : \exists f: \beta \rightarrow X, f \text{ は全単射} \}.$$

### 1.6.2 $\aleph_0$

$$\aleph_0 := |\omega| = \omega.$$

1.6.3  $\aleph_1$ 

$$\begin{aligned}\aleph_1 &:= \min \{ \alpha \in \mathbf{ON} : |\alpha| > \omega \}, \\ &:= \bigcup \{ \text{type}(\omega, R) : R \subset \omega \times \omega \wedge |\text{type}(\omega, R)| < \omega \wedge R \text{ は } \omega \text{ を整列する} \}.\end{aligned}$$

1.6.4  $\aleph_\omega$ 

$$\aleph_\omega := \bigcup_{n < \omega} \aleph_n.$$

1.6.5  $\beth_\alpha$ 

1.  $\beth_0 := \aleph_0$ .
2.  $\beth_{\alpha+1} := 2^{\beth_\alpha}$ .
3.  $\beth_\gamma := \bigcup_{\beta < \gamma} \beth_\beta$  ( $\gamma$  が極限順序数の場合).

## 1.7 構造の作りかた

以下では 1 階述語論理の構造  $\mathcal{A} = (A, c_0^A, c_1^A, \dots, f_0^A, f_1^A, \dots, R_0^A, R_1^A, \dots)$  について取り扱う。

1.7.1 積構造:  $\prod_{\lambda \in \kappa} \mathcal{A}_\lambda$ 

構造の族  $\mathcal{A}_\lambda (\lambda \in \kappa)$  が与えられたとき、積構造を以下に構成できる。

$$\begin{aligned}\text{The domain of } \prod_{\lambda \in \kappa} \mathcal{A}_\lambda &= \prod_{\lambda \in \kappa} A_\lambda, \\ c_i^{\prod \mathcal{A}_\lambda} &= (c_i^{A_0}, \dots, c_i^{A_\lambda}, \dots), \\ f_i^{\prod \mathcal{A}_\lambda}(x) &= (f_i^{A_0}(x_0), \dots, f_i^{A_\lambda}(x_\lambda), \dots), \\ x \in R_i^{\prod \mathcal{A}_\lambda} &\iff \forall \lambda \in \kappa, x_\lambda \in R_i^{A_\lambda}.\end{aligned}$$

例：群, 加群などの積構造.

1.7.2 超積構造:  $\prod_{\lambda \in \kappa} \mathcal{A}_\lambda / U$ 

$U$  を  $\kappa$  上の超フィルターとすると,

$$x \sim_U y \iff \{ \lambda \in \kappa : x_\lambda = y_\lambda \} \in U$$

により  $\prod_{\lambda \in \kappa} \mathcal{A}_\lambda$  上の同値関係が定義できる。

この商構造により超積を定める:

$$\prod_{\lambda \in \kappa} \mathcal{A}_\lambda / U := \prod_{\lambda \in \kappa} \mathcal{A}_\lambda / \sim_U.$$

### 1.7.3 $\mathbf{V}$ の $U$ による超冪; $\text{Ult}(\mathbf{V}, U)$

$U$  を基数  $\kappa$  上の超フィルターとすると、 $\mathbf{V}$  の超冪が定まる。

$$\text{Ult}(\mathbf{V}, U) := \prod_{\lambda \in \kappa} (\mathbf{V}, \in) / U.$$

一般に上記構造は well-founded ではないが、 $\kappa$  が非可算かつ、 $U$  が  $\kappa$ -完備な超フィルターのときには well-founded となる。Los の定理により、超冪は  $\mathbf{V}$  と初等同値になるため、とくに ZF の公理を満たすモデルとなる。

### 1.7.4 $B$ の $\mathcal{A}$ 上の閉包; $\bar{B}$

$B \subset A$  の閉包  $\mathcal{C} = \bar{B}$  は  $C \subset B$  を満たす最小の  $\mathcal{A}$  の部分構造として定義する。構成的には以下のように作ることができる。

$$\begin{aligned} C_0 &:= B, \\ C_{n+1} &:= C_n \cup \bigcup_i f_i^{\mathcal{A}}[C_n], \text{ for } n < \omega, \\ C &:= C_\omega := \bigcup_{n < \omega} C_n. \end{aligned}$$

## 1.8 集合階層の作りかた

### 1.8.1 累積的階層; $V_\alpha$

$$\begin{aligned} V_0 &:= \emptyset, \\ V_{\alpha+1} &:= \mathcal{P}(V_\alpha), \\ V_\lambda &:= \bigcup_{\alpha \in \lambda} V_\alpha. \end{aligned}$$

### 1.8.2 整礎集合の宇宙; $\mathbf{WF}$

$$\mathbf{WF} := \bigcup_{\alpha \in \mathbf{ON}} V_\alpha.$$

基礎の公理が成立していれば、 $\mathbf{V} = \mathbf{WF}$  が成立する。

### 1.8.3 遺伝的集合階層; $H(\kappa)$

$\kappa$  が基数であるとき、

$$H(\kappa) := \{x \in \mathbf{V} : |\text{trcl}_{(\mathbf{V}, \in, \cup)}(x)| < \kappa\}.$$

※  $\text{trcl}_{(\mathbf{V}, \in, \cup)}(x)$  は以下のように定義される.

$$\begin{aligned} \bigcup^\alpha(x) &:= x \cup \bigcup_{\beta \in \alpha} \bigcup^\beta(x), \\ \text{trcl}_{(\mathbf{V}, \in, \cup)}(x) &:= \bigcup^\omega(x). \end{aligned}$$

.

#### 1.8.4 構成可能集合階層; $L_\alpha$

構成可能集合の宇宙  $L := \bigcup_{\alpha \in \mathbf{ON}} L_\alpha$  を構成する集合階層.

$$\begin{aligned} L_0 &:= \emptyset, \\ L_{\alpha+1} &:= \text{Def}(L_\alpha), \\ L_\lambda &:= \bigcup_{\alpha \in \lambda} L_\alpha. \end{aligned}$$

※  $\text{Def}(x)$  は以下のようにして定義される.

1.  $\text{Proj}(A, R, n) := \{s \in A^n : \exists t \in R(t \upharpoonright n = s)\}$ .
2.  $\text{Diag}_\in(A, n, i, j) := \{s \in A^n : s(i) \in s(j)\}$ .
3.  $\text{Diag}_=(A, n, i, j) := \{s \in A^n : s(i) = s(j)\}$ .
4.  $\text{Def}'(k, A, n)$  を  $k < \omega$  に関する帰納法で以下に定義する:

$$\begin{aligned} \text{Def}'(0, A, n) &:= \{\text{Diag}_\in(A, n, i, j) : i, j < n\} \\ &\quad \cup \{\text{Diag}_=(A, n, i, j) : i, j < n\}, \\ \text{Def}'(k+1, A, n) &:= \text{Def}'(k, A, n) \\ &\quad \cup \{A^n \setminus R : R \in \text{Def}'(k, A, n)\} \\ &\quad \cup \{R \cap S : R, S \in \text{Def}'(k, A, n)\} \\ &\quad \cup \{\text{Proj}(A, R, n) : R \in \text{Def}'(k, A, n+1)\}. \end{aligned}$$

5.  $\text{Def}(A, n) := \bigcup_{k \in \omega} \text{Def}'(k, A, n)$ .
6.  $\text{Def}(A) := \{X \subset A : \exists n < \omega \exists s \in A^n \exists R \in \text{Def}(A, n+1)(X = \{x \in A : s \frown \langle x \rangle \in R\})\}$ .

- $L$  は強い形の選択公理を満たす.
- $L$  は一般連続体仮説を満たす.  
(などなど)
- $L$  は考えられうる限り最小限の集合を集めてできる集合の宇宙であり, 最も小さい宇宙といえる. 実際に  $L$  は以下でも特徴付けすることが可能である:

$$L = \bigcap \{M \subset \mathbf{V} : M \text{ は推移的かつ } \mathbf{ON} \text{ を含む } ZFC \text{ のモデルである} \}$$

1.8.5 Jensen の構成可能集合階層;  $J_\alpha$ 

馴染みがない階層構造だが,  $L$  の解析には必須.

$$\begin{aligned}
J_0 &:= \emptyset, \\
J_{\alpha+1} &:= \text{cl}_{(\mathbf{V}, \in, F_0, F_1, \dots, F_8)}(J_\alpha \cup \{J_\alpha\}), \\
J_\lambda &:= \bigcup_{\alpha \in \lambda} L_\alpha, \\
\text{where,} \\
F_0(x, y) &:= \{x, y\}, \\
F_1(x, y) &:= x \setminus y, \\
F_2(x, y) &:= x \times y, \\
F_3(x, y) &:= \{\langle u, z, v \rangle : z \in x \wedge \langle u, v \rangle \in y\}, \\
F_4(x, y) &:= \{\langle u, v, z \rangle : z \in x \wedge \langle u, v \rangle \in y\}, \\
F_5(x, y) &:= \bigcup x, \\
F_6(x, y) &:= \text{dom } x, \\
F_7(x, y) &:= \in \cap x \times x, \\
F_8(x, y) &:= \{x[\{z\}] : z \in y\}.
\end{aligned}$$

実は多くの  $\alpha \in \mathbf{ON}$  に対して  $L_\alpha = J_\alpha$  が成立する.

1.8.6 hierarchy of  $\mathbb{P}$ -names;  $V_\alpha^{\mathbb{P}}$ 

$$\begin{aligned}
V_0^{\mathbb{P}} &:= \emptyset, \\
V_{\alpha+1}^{\mathbb{P}} &:= \{f \subset V_\alpha^{\mathbb{P}} \times \mathbb{P} : f \text{ は関数である}\}, \\
V_\lambda^{\mathbb{P}} &:= \bigcup_{\alpha \in \lambda} V_\alpha^{\mathbb{P}} \quad (\lambda \text{ が極限順序数の場合}).
\end{aligned}$$

## 1.9 半順序の作りかた

## 1.9.1 Cohen 強制法

$$\begin{aligned}
\mathbb{C} &:= \{p \subset \omega \times 2 : p \text{ は有限部分関数である}\}, \\
p \leq q &\iff q \subset p.
\end{aligned}$$

- $\mathbb{C}$  は可算鎖条件を満たす.
- $\mathbb{C}$  は  $\sigma$ -centered であり, 集合としても可算である.
- $\mathbb{C}$  は Cohen 実数を付加する.

### 1.9.2 ランダム強制法

$$\mathbb{P} := \{p \subset {}^\omega 2 : p \text{ は正の Lebesgue 測度をもつ}\},$$

$$p \leq q \iff p \subset q.$$

- $\mathbb{P}$  は可算鎖条件を満たす.
- $\mathbb{P}$  はランダム実数を付加する.

### 1.9.3 アロンシャイン木

- $T$  が木であるとは, それが半順序  $(T, <_T)$  であり, すべての始切片が  $T$  の順序  $<_T$  で整列されていることをいう.
- $T$  が木であるとき,  $\text{Lev}_\alpha(T) := \{x \in T : \text{type}(\{y \in T : y <_T x\}, <_T) = \alpha\}$  を  $T$  の  $\alpha$  水準という.
- $T$  が木であるとき,  $T$  の高さとは  $\text{ht}(T) := \min\{\alpha : \text{Lev}_\alpha(T) = \emptyset\}$  のこと.
- $T$  が木であるとき,  $T$  が  $\kappa$ -木であるとは  $T$  が高さ  $\kappa$  でかつすべての  $\alpha$  水準の濃度が  $\kappa$  未満であることをいう.
- $T$  が木であるとき,  $T$  が  $\kappa$ -アロンシャイン木であるとは  $T$  が  $\kappa$ -木であり, かつすべての  $T$  の全順序部分集合が濃度  $\kappa$  未満であることをいう.

$\omega$ -アロンシャイン木は存在しないが,  $\omega_1$ -アロンシャイン木は存在する.

### 1.9.4 ススリン木

$S$  がススリン木であるとは  $S$  が  $\omega_1$ -アロンシャイン木であり, かつすべての反鎖が可算であることをいう.

ススリン木は Cohen 実数かもしくは  $\diamond$  から錬成される.

## 1.10 巨大基数の作りかた

### 1.10.1 到達不可能基数

$\kappa$  が (強) 到達不可能基数であるとは,  $\kappa$  が非可算正則基数で強極限の性質をもつこと.  $\kappa$  が強極限であるとは, すべての  $\alpha < \kappa$  に対して,  $2^\alpha = |{}^\alpha 2| < \kappa$  を満たすことをいう.

- 到達不可能基数が存在することは ZFC の公理系のみでは証明不可能である.

### 1.10.2 Mahlo 基数

$\kappa$  が Mahlo 基数であるとは,  $\kappa$  が到達不可能基数でありかつ以下の集合

$$\{\alpha < \kappa : \alpha \text{ は正則基数である}\}$$

が  $\kappa$  の定常部分集合となることをいう.

- Mahlo 基数の下には非有界に到達不可能基数が存在する。

### 1.10.3 弱コンパクト基数

$\kappa$  が弱コンパクト基数であるとは,  $\kappa$  が到達不可能基数でありかつ  $\kappa$ -アロンシャイン木が存在しないことをいう。

- 弱コンパクト基数の下には非有界に Mahlo 基数が存在する。
- 弱コンパクト基数を  $\omega_2$  に forcing で潰すと  $\omega_2$ -アロンシャイン木を無くすることができる。逆に  $\omega_2$ -アロンシャイン木が一つもなければ,  $L$  のなかで  $\omega_2$  は弱コンパクト基数になっている。

### 1.10.4 可測基数

$\kappa$  が可測基数であるとは  $\kappa$  が非可算基数でありかつ  $\kappa$  上に  $\kappa$ -完備かつ非単項な超フィルターが存在することをいう。

- 可測基数の下には非有界に弱コンパクト基数が存在する。
- 可測基数  $\kappa$  に対し,  $\kappa$  の可測性を保証する超フィルター  $U$  をとると, 超冪  $\text{Ult}(\mathbf{V}, U)$  は ZFC のモデルとなる。さらに  $\kappa$ -完備性から  $\in_U$  は整礎関係であることがわかる。以上のことから, Mostowski collapse が適用でき,  $\text{Ult}(\mathbf{V}, U)$  と同型な推移モデル  $M$  が構成できる。  $U$  は非単項であるので,  $M \neq \mathbf{V}$  となる。したがって, 可測基数が存在すれば  $\mathbf{V} \neq L$  が証明できてしまう。

## 参考文献

- [1] キューネン, ケネス./藤田博司 訳. 集合論—独立性証明への案内. 日本評論社. 2008.
- [2] Jech, Thomas. Set Theory, The third millennium edition. Springer-Verlag. 2003
- [3] Kunen, Kenneth. Set Theory : An Introduction to Independence Proofs. North-Holland Publishing. 1980.
- [4] Shoenfield, J. R. Mathematical Logic. Addison-Wesley Publishing. 1967.



# 論理学者の神話——排中篇——

## 淡中 圏

∴まず神はヨと $\bar{y}$ とについて推論された。 $\forall$ は形なく $\forall$ むなしく $\rightarrow$ 神は半径 $\infty$ の円周上を廻り $\wedge$ 遍在する中心に偏在する $\rightarrow$ の何も映さぬ鏡のような面を覗き込んでおられた。

神は「無が有る」と仮定された。矛盾である。 $\therefore$ 「無は無い」と神は推論された■すると無は無かった。神はその無の無を見て、良しとされた。第0日である。

神はまた仮定された。「有が無い」。矛盾である。 $\therefore$ 「有は無くは無い」と神は推論された■すると有は無くは無かった。しかし神はその有の無の無を見て良しとされなかった。そして有の無の無から有を導こうとした。第1日である。

神は今も推論しておられる。無くは無い有は生み $\wedge$ 増え $\wedge$ 地に満ち、家族を作り、町を作り、国を作り栄えしが、これら真に有るものかどうか、未だ結論出ず。

これが $\Omega$ 日間にわたる創造の由来である。



## 第 2 章

# ここがヘンだよ直観主義 (1)～二値原理と第三値の排除～

鈴木佑京

### 2.1 はじめに

直観主義というものをご存知だろうか。

直観主義とは、おおざっぱに言うと、「数学や論理は、人間の認識能力に依存している」という思想に基づく、数学・論理・哲学上の立場のことを指す<sup>\*1</sup>。直観主義においては、原理的に認識できるようなものだけが真理として認められ、原理的に構成できるような対象だけが存在として認められることになる<sup>\*2</sup>。その構成可能性≒プログラム可能性へのこだわりゆえに、直観主義は計算機科学と相性がよく、現在に至るまで盛んに研究されている。

が、本稿（及び今後書き連ねていきたいシリーズ）では、そうした最先端の研究を扱うわけではない。むしろ直観主義という思想や立場の、基礎的・根本的な部分について、多くの人が感じるだろう違和感、疑問を解消することを目標にしたい。つまり直観主義という立場に触れた人が、「直観主義はヘンなのでは？」とってしまうようなところについて、「直観主義側としてはこのように考えているので、ヘンではないのだ」とか、あるい

\*1 この言い方は高度に曖昧である。「人間」とはいつの・誰のことであるのか、「人間の認識能力」とは具体的にどのような能力を指すのか、「依存している」とはいったいどういう意味で依存しているのか。だが、ここでこの曖昧さを除去することはできない。なぜなら、それぞれの直観主義者によって、「人間の認識能力に依存している」ということの内実が異なっているからである。例えば、直観主義の祖であるところのブラウワーにとっては、人間の「認識能力」ということで考えられているのは私秘的で心理的な過程のことであるが、より現代的な直観主義者であるダメットにとっては、数学や論理が依存する「認識能力」はもっと公共的で言語的なものとなる。直観主義者の間の違いを無視して全体をとらえるために、ここでは大ざっぱで曖昧な特徴づけを採用しているわけである。

\*2 ここに登場する原理的に～できる possible in principle は哲学のテクニカルタームであり（ということに、この章を非哲学者である才川さんや古賀さんにレビューしていただいて初めて気付きました、ありがとうございます）、実践的に～できる possible in practice と対立する表現である。どちらの用語も厳密に意味が定義されているわけではないが、「実践的に～できる」と言う時は、我々の物理的世界に成り立っている偶然的事情（例えば宇宙の大きさ、人間の生物学的構造、計算機の性能 etc.）に相対的に可能かどうか判断されるというニュアンスがあるのに対し、「原理的に～できる」という時は、そういった偶然的事情をすべて無視して、原理原則の問題として可能かどうか判断される（例えば無限回の操作は、どんなに計算機が進歩しようが、どんなに人間の認知能力が進化しようが、原理的に不可能であるとされる）。

は「やっぱりヘンなので、直観主義側はこういう改善案を出すべきだ」などなどと説明することによって、疑問を解消することを目標とする。

第一に対象としている読者は、ものの本などで直観主義というものについてなんとなく読んだことはあるが、専門的に勉強したわけではないような人である\*3。そういうわけで、過度に厳密になりすぎることなく、わかりやすくアイデアを伝えることを目指す。

まず今回扱いたいのは、直観主義と第三の真理値の問題である。直観主義は、よく知られているように、「すべての命題が真であるか偽であるかである」という二値原理を拒否する。だが同時に、ある種の直観主義者は、「任意の命題について、真でも偽でもないということはない」という原理（第三値排除の原理と呼ぶことにしよう）を受け入れる。だがこれは不整合な立場ではないだろうか？直観主義はヘンなのではないか？\*4

## 2.2 直観主義と二値原理

第三値排除の問題を扱う前に、まず、直観主義と二値原理の関係について整理しておこう。

二値原理とはすでに述べたように、「すべての命題は真であるか偽であるかどちらかである」という原理のことである。今、命題  $p$  が真であることを  $T(p)$ 、偽であることを  $F(p)$  と書くことにすれば、二値原理は記号で、

$$\forall p(T(p) \vee F(p))$$

と書ける\*5。

ちなみに二値原理とよく混同されるのが排中律である。排中律は、「すべての命題について、それ自身か、それ自身の否定が成立する」という原理であり、記号で書けば、

$$\forall p(p \vee \neg p)$$

と書ける。排中律には、「真」や「偽」といった概念が登場しないことに注意して欲しい。

次に、直観主義が二値原理を拒否する理由を見ておこう。直観主義者にも様々なタイプが有るのだが、ほぼすべての直観主義者は、次の2つの原理にコミットする。

(認識的制約の原理) 任意の命題について、それが真であるのなら、証明可能である。

(否定の真と偽の原理) 任意の命題について、その否定が真であることと、偽であること

\*3 ただし、直観主義の形式的側面について知識を持っている人でも、思想的な面で違和感や疑問を持っている人には、本稿が応えるところがあるかもしれない。

\*4 論理学について一定の知識がある人向けに注意を述べておくと、本稿で問題になる真偽の概念は、モデルに相対的な真偽の概念 ( $A$  はモデル  $M$  で真) ではなく、前モデル理論的な、絶対的な真偽の概念である (あるいは、意図されたモデルに対する真偽の概念、と言ってもよい)。例えばモデル理論を知らない者であっても、ゴールドバッハの予想を普通の解釈で読んだ上で、それが (端的に) 真か偽か、といったような言い方を理解できるはずである。モデル理論以前に我々が持っているこうした絶対的な真偽の概念が本稿で問題となる真偽の概念である。ただし、モデル理論における「意図されたモデル」は、こうした前理論的な真偽の概念に相当するモデルを指す概念であるとみなすことができるので、本稿の議論を「意図されたモデルにおける真偽」を論じるものとして読んでも問題はない。

\*5 必要以上に記述を煩雑にしないために本文中では断っていないが、 $T, F, P$  は命題を受け取って命題を返すオペレータ (命題に対する述語) である。さらに、本稿では命題に対する量化を使う。本稿において、直観主義者の思想を再構成するために使われる推論は、すべて直観主義二階命題論理 [6, ch.11] の枠内であるが、通常の直観主義二階命題論理と異なり、命題に対する述語付け ( $T, F, P$  など) が可能である。

は同値である。

「認識的制約の原理」「否定の真と偽の原理」という名称は、私のオリジナルのものである（以下に現れる「～の原理」という名称もすべて私のオリジナルのものである）。それぞれを記号で書いておこう。「 $p$ が証明可能である」ことを  $P(p)$  と書けば、それぞれ

$$\forall p(T(p) \rightarrow P(p))$$

$$\forall p(T(\neg p) \leftrightarrow P(p))$$

となる。

前者の原理はすでに述べた、「数学は人間の認識に依存する」という直観主義の思想に由来している。数学的真理と人間の認識の間の依存関係について、直観主義者は（大きく言えば）二つの考え方のうちどちらかをとる [4]。

- 数学的真理とは、既に証明された命題のことである\*6。
- 数学的真理とは、証明可能な\*7命題のことである。

どちらの考え方をとったとしても、真理は証明可能でなければならない（後者の場合は明らかであるし、前者の場合であっても、既に証明されているのだから証明可能であるはずである）。よって、認識的制約の原理が成り立つ。

後者は、直観主義者でない通常の立場（古典数学と呼ばれる）でも受け入れることのできる原理である\*8。この2つの原理を使うと、我々は、二値原理から、次の「全知の原理」を論理的に推論することができる（どう推論するかは後述）。

（全知の原理）任意の命題について、それが証明可能であるか、その否定が証明可能（反証可能）であるかのどちらかである。

記号で書けば、

$$\forall p(P(p) \vee P(\neg p))$$

となる。

従ってもし、我々が二値原理の正しさを知っているとするのであれば、我々は推論によって、全知の原理の正しさを知ることができる。だが、世の中には未解決問題がたくさん存在する。例えばゴールドバッハの予想について、我々は証明の方法も反証の方法もわからないのだから、そもそも原理的にゴールドバッハの予想が証明できるかどうか、あるいは反証できるかどうか、わからないはずである（もちろんここで「いや、きっと証明

\*6 ちなみにこの考え方をとると、数学的真理は、時点（あるいは、時点と証明者）に対して相対的な概念となる。つまり、ある時点  $t$  において（あるいは、 $t$  において、証明者  $s$  にとって）真理ではなかったものが、別の時点  $t'$  において（あるいは、 $t'$  において、別の証明者  $s'$  にとって）真理になっているという状況がありうる。この点についても [4] 参照。

\*7 「証明可能」ということが何を意味するのかはここでは曖昧にしておく（なぜなら、それぞれの直観主義者によってこの点の理解も異なってくるからである）。だが一般には、「証明可能性」は、今生きている数学者の証明能力や、計算機の性能といった、偶然的事情に左右されない、原理的な可能性であるとされる。したがって、この選択肢をとった場合は、真理は無時制的・無人称的概念となる。

\*8 ブラウワー、ハイティング、ダメットといった中心的な直観主義者たちが否定の真と偽の原理を受け入れていることについては、[5] を参照。

や反証の方法はあると信じて、諦めずに研究するべきだ」と考えるのが間違っているわけではない。そのような態度は研究者としては正しい。だがだからといって、「証明や反証の方法があることを知っている」とは言えない。ポイントはそこである)。もしもゴールドバッハの予想について、証明ないし反証ができるとわかることがあるとすれば、それは実際に証明や反証の方法を突き止めてみせる以外にはないだろう。そうでないかぎり、我々はゴールドバッハの予想が決定可能（証明ないし反証が可能）かどうかを知ることはできないはずである。

従って我々は全知の原理の正しさを、二値原理のような純論理的な原理から知ることができないはずがない。そのため、我々は二値原理の正しさを知るはずがない。だから、二値原理を認めることはできない。これが直観主義の言い分である。

二値原理から全知の原理は次のようにして導くことができる。まず二値原理に否定の真と偽の原理を組み合わせると、

$\forall p(T(p) \vee T(\neg p))$  / 任意の命題について、真であるか、その否定が真であるかのどちらかである。

が出せる。これに認識的制約の原理を加えれば、

$\forall p(P(p) \vee P(\neg p))$

となり、全知の原理が導かれる。

### 2.3 第三の真理値

さて、とりあえず、認識的制約の原理と否定の真と偽の原理を認めたとすれば、二値原理を認めることができない、というのはわかってもらえたと思う。これが直観主義の考え方である。

違和感が出てくるのはここからである。ある種の直観主義者（ある時期のダメット<sup>\*9</sup>や、プラヴィッツ [3] など）は、二値原理を認めないにもかかわらず、真でも偽でもない命題は認めない。「すべての命題は真であるか偽であるかだ」と認めないのに、「真でも偽でもない命題は存在しない」と言うのだ。これは奇妙に見える。

ではある種の直観主義者はなぜ第三の真理値を排除するのか。この節ではそれを確認しよう。

まず、次の原理を見てほしい。

(真の否定と偽の原理)  $\forall p(\neg T(p) \rightarrow F(p))$  / すべての命題について、真でないならば、偽である。

第三の真理値を排除する直観主義者たちは、真の否定と偽の原理を受け入れたうえで、そこから次の原理を導き、第三値を拒否する（逆に言えば、真の否定と偽の原理を受け入れない直観主義者たちは、第三値を拒否しない）。

<sup>\*9</sup> 例えば [1]。ただし正確には、ダメットは主張が正しくもなく間違っていないという事態はないと論じている。そのため、彼の考えを文の真偽についてのものであるととらえるのは問題含みかもしれない。

(第三値排除の原理)  $\forall p \neg(\neg T(p) \wedge \neg F(p))$  / すべての命題について、真でなく、かつ、偽でもない、ということはない。

まず、命題  $p$  を固定し、次を仮定する。

$\neg T(p) \wedge \neg F(p)$  /  $p$  は真ではなく、かつ、偽でもない

ここに偽と真の否定の原理を組み合わせると、次が出る。

$\neg T(p) \wedge \neg\neg T(p)$  /  $p$  は真ではなく、かつ、真でないわけではない

だがこれは  $A \wedge \neg A$  という形式を持っており、矛盾である。よって背理法により\*<sup>10</sup>、

$\neg(\neg T(p) \wedge \neg F(p))$  /  $p$  は真ではなく、かつ、偽でもない、ということはない

が導かれる。 $p$  の取り方はまったく一般的なもので、任意の  $p$  について上が成り立つ。つまり、 $\forall p \neg(\neg T(p) \wedge \neg F(p))$

となり、第三値排除の原理が成り立つ\*<sup>11</sup>。

真の否定と偽の原理を受け入れるか否かは、前節で提出した、数学的真理についての二つの考え方に依存する。つまり、真理を既に証明されたことと同一視するか、真理を証明可能なことと同一視するか、という二つの考え方である。

もしも真理を、既に証明された命題と同一視するのであれば、真の否定と偽の原理は、「今証明されていない命題は偽である」、ということの意味する。だがここに、否定の真と偽の原理を適用すると（既に述べたように、否定の真と偽の原理はほとんどの直観主義者が受け入れている）、「今証明されていない命題は、既にその否定が証明されている」、ということになる。この帰結は明らかに受け入れがたい。そのため、真理すなわち証明済みと考えるのであれば、真の否定と偽の原理は受け入れられない。またこの場合は、ゴールドバッハの予想のような、証明も反証も見つかっていない命題は、真でも偽でもないことになるだろう（つまり、第三値排除の原理は成り立たない）。

真理を証明可能性と同一視する場合は事情が異なる\*<sup>12</sup>。まずこの場合、

(0)  $\forall p (T(p) \leftrightarrow P(p))$  / 任意の命題  $p$  について、 $p$  が真であることと、 $p$  が証明可能であることは同値である。

が成り立つ。さらに、((0) には依存せずに) 次の原理がなりたつ。

(1)  $\forall p (p \leftarrow P(p))$  / 任意の命題  $p$  について、 $p$  ならば  $p$  は証明可能。

これは、直観主義的な「ならば」の意味を念頭に置けばすぐにわかる。直観主義における「ならば」は、前件の証明から、後件の証明を作り出すことができることを意味する。もしも  $p$  の証明が存在するのなら、それはそれ自体が  $p$  が証明可能であることの証明である

\*<sup>10</sup>  $\neg A$  を仮定して矛盾が出た時に  $A$  を出すような背理法は、直観主義では認められない。だが、 $A$  を仮定して矛盾が出た時に  $\neg A$  を出す背理法は問題がない。

\*<sup>11</sup> 前節と同様、この導出も直観主義論理で可能である

\*<sup>12</sup> 以下の記述は、[2, p,11] [3] などが元になっている。

といえるだろう。そのため、任意の命題  $p$  について  $p$  ならば  $p$  が証明可能、と言えるわけである。

(1) の対偶をとると、

(2)  $\forall p(\neg P(p) \leftarrow \neg p)$  / 任意の命題  $p$  について、 $p$  が証明不可能ならば  $p$  でない。

さらに (1) に  $\neg p$  を代入して、(3)  $\forall p(\neg p \leftarrow P(\neg p))$  / 任意の命題  $p$  について、 $p$  でないならば  $p$  でないことが証明可能。

(2) と (3) から、 $\forall p(\neg P(p) \leftarrow P(\neg p))$  / 任意の命題  $p$  について、 $p$  が証明不可能ならば  $p$  でないことが証明可能。

これに (0) を組み合わせて、 $\forall p(\neg T(p) \leftarrow T(\neg p))$  / 任意の命題  $p$  について、 $p$  が真でないならば、 $p$  の否定が真である。

これと否定の真と偽の原理を組み合わせれば、真の否定と偽の原理が導かれる。つまり、真理を証明可能性と同一視する立場にとっては、真の否定と偽の原理が成り立ち、第三値が排除されるわけである。

## 2.4 違和感の淵源を探る

以上で、ある種の直観主義者（真理と証明可能性を同一視するタイプの直観主義者）が二値原理を拒否しつつ第三値排除の原理も受け入れる理由は説明できたと思う。だがこのことが説明されても、この2つの態度は不整合なのではないか、という疑問や違和感やはり消えないだろう。

では、この違和感の理由はどこにあるのだろうか？ここでは、違和感が生ずる理由としてありうるものを2つ取り上げ、回答し、違和感を解消することを試みてみよう。

### 2.4.1 古典論理のみで成り立つ論理法則

違和感：通常使用される論理法則（古典論理）の中には、以下の様なものがある。

$A \vee B \leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$  /  $A$  であるか  $B$  であるかであるということ、 $A$  でなくかつ  $B$  でないということはない、ということ、同値である。

これと第三値排除の原理を組み合わせると（右辺から左辺への含意を使う）、二値原理が導かれる。ということは、第三値排除の原理を受け入れつつ、二値原理を拒否するのは、不整合なのではないか？

回答：確かに、以上の論理法則を使えば、第三値排除から二値原理が導かれる。だが、直観主義者は、そもそも以上の論理法則を受け入れない（理由は注で説明する\*13）。よって、第三値排除の原理と二値原理を同時に受け入れても不整合にはならない。

\*13 直観主義者にとっては、 $A \vee B$  は、 $A$  がわかっているか  $B$  がわかっているときでないと導くことができない。だが、 $\neg(\neg A \wedge \neg B)$  がわかっているということは、「 $\neg A$  と  $\neg B$  が同時に成り立っていることはない」ということがわかっているにすぎないのであり、 $A$  か  $B$  かどちらかがわかっているわけではない。よって直観主義的には、 $\neg(\neg A \wedge \neg B)$  から  $A \vee B$  を導くことはできない。



### 2.4.2 二値原理への「反例」

違和感：直観主義が二値原理を受け入れない理由を説明する時、二値原理への「反例」として、ゴールドバッハの予想が持ちだされていた。だが、もしもゴールドバッハの予想が二値原理——すべての命題は真か偽である——への「反例」として機能するとすれば、それはゴールドバッハの予想が真でも偽でもないということなのではないか？とすると、ゴールドバッハの予想（ないし同様の未解決問題）を二値原理への「反例」として持ち出すことと、第三値排除の原理を受け入れることは矛盾するのではないか？

回答：「反例」という言葉の意味をよく考えてみよう。「すべての  $x$  について  $P(x)$ 」というような一般的主張に対して「反例」と呼びうるようなものは、次の二種類があるだろう。

- $\neg P(a)$  であるような  $a$
- 現時点で  $P(a)$  だとわかっていないような  $a$

「 $P(a)$  だとわかっていない」ことと、「 $\neg P(a)$  であること」の違いに注意して欲しい。仮に今  $P(a)$  だとわかっていないからと言って、 $\neg P(a)$  であることにはならない（堀北真希が私を愛しているかどうか私にはわからないが、だからといって堀北真希が私を愛していないとは言えない）。むしろ、現時点で  $P(a)$  だとわかっていないとしても、後に  $P(a)$  だとわかることもありうる（もしかしたら来年辺りに突如ラブレターが届き、(2016年夏の時点で)堀北真希が私を愛していたということがわかるかもしれない<sup>\*14</sup>）。このように、「 $P(a)$  だとわかっていない」ことと、「 $\neg P(a)$  であること」には違いがある<sup>\*15</sup>。

もしも  $\neg P(a)$  であるような  $a$  を見つけられれば、「すべての  $x$  について  $P(x)$ 」という主張を否定することができる（つまり、「 $\neg \forall x P(x)$ 」を結論できる）。一方、現時点で  $P(a)$  だとわかっていないような  $a$  を見つけるだけでは、この後  $P(a)$  であることがわかる可能性を排除できないから、「すべての  $x$  について  $P(x)$ 」という主張を否定することはできない。だがその場合であっても、「すべての  $x$  について  $P(x)$ 」ということが、少なくとも現時点においてはわからない、ということを行うことはできる。そのような弱い意味で、 $P(a)$  だとわかっていないような  $a$  も、「すべての  $x$  について  $P(x)$ 」に対する反例として機能しうる<sup>\*16</sup>。

<sup>\*14</sup> 一方で、現時点で  $P(a)$  だとわかっていない  $a$  について、後に  $\neg P(a)$  だとわかることもありうるわけである。

<sup>\*15</sup>  $\neg P(a)$  であるような  $a$  と、現時点で  $P(a)$  だとわかっていないような  $a$  の間を区別できるということに、直観主義の立場を取るかどうかは関係がない。例えば古典数学の立場に立ち、我々の認識と関係なくあらゆる命題の真偽が定まっているとしよう。この場合であっても、「我々の認識と独立して  $\neg P(a)$  である」ということと、「 $P(a)$  であるということが我々にわかっていない」ということは、別の事柄である。例えば、我々には  $P(a)$  であるとわかっていないが、(我々の認識と独立した) 事の実情としては  $\neg P(a)$  でなく  $P(a)$  である、というような  $a$  がありうる（たとえ、堀北真希が私が好きであるということは私にはわからないが、実は堀北真希が私が好きである、というような場合）。従って、古典的な立場であっても、この段落での区別は有効である。

<sup>\*16</sup> 前の注の続きであるが、直観主義の立場を取るかどうかと、 $P(a)$  だとわかっていないような  $a$  が「すべての  $x$  について  $P(x)$ 」に対する(弱い)反例として機能するかどうかは関係がない。

古典数学の立場を取ったとしよう。ここで、「すべての  $x$  について  $P(x)$ 」と主張し、まさしくこの主張通り、すべての  $x$  について  $P(x)$  ということが(我々の認識と一切独立して)成り立っていたとする。ただし、この実情として主張の内容が成り立っているからといって、主張の内容が成り立っているということをおぼえていないならば、主張は問題を含んだものと見なされざるをえない。例えば、今私が

例えば、一定の現地調査を行い、「関東地方のすべての市区町村には吉野家が存在する」と言っている人がいたとしよう。だが、まだ浦安市については、吉野家があるかないか、調査が終わっていないとする。このとき、「浦安市に吉野家がある」とはわかっていないんだから、必要な調査はまだ完了しておらず、「関東地方のすべての市区町村には吉野家が存在する」とはまだわからないんじゃないか、と言って、彼の主張に反論することができるだろう。これは、 $P(a)$ だとわかっていないような  $a$  (吉野家があるとわかっていない浦安) が、「すべての  $x$  について  $P(x)$ 」(関東地方のすべての市区町村には吉野家が存在する) への反例として機能している例である。

真理と証明可能性を同一するタイプの直観主義者にとって、ゴールドバッハの予想が二値原理の「反例」だと呼ぶるのは、以上の二種類の意味のうち後者の意味においてのみである<sup>\*17</sup>。つまり、今の我々はゴールドバッハの予想について、それが証明ないし反証が可能であるということがわからない。従って、ゴールドバッハの予想が真か偽かであるということもわからない。だから、今の我々には二値原理が正しいということもわからない。もちろん、今後ゴールドバッハの予想に証明ないし反証が見つければ、我々はゴールドバッハの予想が真か偽のどちらかであることを知ることになるだろう。そうすれば、ゴールドバッハの予想は二値原理の反例にはならない。直観主義はその可能性を認めている。だが、少なくとも現時点においては、ゴールドバッハの予想が決定可能であるのかどうか、真か偽であるのかどうかを知ってはいない。従って現時点においては、ゴールドバッハの予想は二値原理への反例として機能する。

## 2.5 まとめとさらなる違和感

以上、

- 直観主義において二値原理が拒否され
- さらにある種の直観主義において第三値排除の原理が採用される理由を述べた上で
- この態度がいかにも不整合の印象を与える理由を述べ
- 違和感を解消する回答を与える

ことができた。

だが、直観主義が第三値排除の原理を採ることに対する違和感自体は、二値原理とは直接無関係な理由からも生まれうる。

一例を挙げよう。数理論理学においては、「公理系  $FS$  では主張  $A$  は証明も反証もでき

---

「ゴールドバッハの予想は正しい」と主張したとする。もし、私の（そして現在の数学者の）あずかり知らぬところで、事の実情としてゴールドバッハの予想が真なのだとしても、私はゴールドバッハの予想を証明できていないのだから、私にゴールドバッハの予想の正当性を主張する資格はないだろう。

そのため、「すべての  $x$  について  $P(x)$ 」と主張した場合、まさしくその内容が真であったとしても、もしも  $P(a)$  だとまだわかっていないような  $a$  がただひとつでも存在するのなら、「すべての  $x$  について  $P(x)$ 」だとはわかってはいないのだから、主張は問題含みなものとなる。この意味で、古典数学の立場を取ろうとも、 $P(a)$  だとまだわかっていないような  $a$  は弱い反例として機能する。

なお後に出てくる浦安と吉野家の例は、この段落の議論を具体化したものであるが、古典数学か直観主義かといったものとは一切関係のない例になっている。よってこの段落の議論は、古典 vs 直観といった対立軸に関係なく、一般的な議論の規範として成り立つものである。

<sup>\*17</sup> 真理と証明されたことを同一する立場では、ゴールドバッハの予想は前者の、強い意味での反例としても機能する。というのも、我々が現在ゴールドバッハの予想に証明も反証も持っていない以上、この立場では、ゴールドバッハの予想は（現時点では）真でも偽でもないことになるからである。

ない」というような定理が数多く証明されている。代表的なものとして、ZFC という集合論の体系において連続体仮説が決定不能であるという結果がある（ここで ZFC や連続体仮説の内実はとりあえずどうでもよい）。ところで一般に、ZFC は、通常の数学において使われる論法をほぼすべて内部に網羅しているとみなされる。すると、ZFC において連続体仮説が決定不能であるという結果は、連続体仮説が証明も反証もできない命題であることを示しているのではないだろうか。

もしそうであるとすると、

(連続体仮説の決定不能性)  $\neg P(\text{連続体仮説}) \wedge \neg P(\neg \text{連続体仮説})$

が成り立つ。一方第三値排除の原理から、

$\neg(\neg T(\text{連続体仮説}) \wedge \neg F(\text{連続体仮説}))$

が成り立つ。否定の真と偽の原理を使うと、

$\neg(\neg T(\text{連続体仮説}) \wedge \neg T(\neg \text{連続体仮説}))$

となり、認識的制約の原理から、

$\neg(\neg P(\text{連続体仮説}) \wedge \neg P(\neg \text{連続体仮説}))$

が導かれる。これは連続体仮説の決定不能性と矛盾する。つまり、認識的制約の原理を採用する直観主義者にとっては、第三値排除の原理は、数理論理学における決定不能性に関する結果と矛盾するのではないか？

この問題は、二値原理と直に関係するわけではない。そこでこの問題の検討は次回以降に回したい。今回は、数理論理学における決定不能性の結果と、第三値排除原理の関連を一般に論ずる。その中で、形式的証明と非形式的な証明の間関係といった重要な論点が現れてくることになるだろう。



## 参考文献

- [1] Dummett, M. 1975, “What is a theory of meaning?”, in *Mind and Language* (eds. Evans, G. and McDowell, J.):97-138.
- [2] Dummett, M. 2000, *Elements of Intuitionism*, Oxford University Press.
- [3] Prawitz, D. 1998, “Comments on Michael Dummett’s paper ‘Truth from the constructive standpoint’”, *Theoria*, 64:283-292
- [4] Raatikainen, P. 2004, “Conception of truth in intuitionism”, *History and Philosophy of Logic*, 25: 131-145.
- [5] Shramko, Y. 2012, “What is a Genuine Intuitionistic Notion of Falsity?”, *Logic and Logical Philosophy*, 21:3-23.
- [6] Girard, J-Y. 1989, “Proofs and Types”, Cambridge University Press.



# 論理学者の神話——酔人篇——

淡中 圈

定義：神とは、もしそれが良いならば、全てが良いような存在である。

事実：何かは存在する。

結論：神は存在する。

推論1：全てが良いか、良くない存在があるかのどちらかである。

推論2：全てが良いとする。すると全ての存在が神である。

推論3：良くない存在があるとする。するとその良くない存在が神である。∴もしその存在が良いとすると、この仮定は偽であり、仮定が偽であるとき、含意はいつでも真である。すなわち、もしそれが良いならば全てが良い、という命題は真であり、よってこの存在は神の定義を満たす。

推論4：∴どちらにしろ神は存在する ■

注記1：そして、おそらく神は良くない存在であり；

注記2：また、これを読むあなた自身が神である可能性もかなり高い。

注記3：このような汎神論及び多神教を退け、あくまで一神教を主張したいなら、一つの存在以外は良くて、その存在のみが良くない世界を考えればよい。その良くない存在が唯一の神である。

Q.E.F.





## 第 3 章

# Cohen トポスに関するノート

古賀 実

このノートは、「連続体仮説」の成立しないトポス理論的なモデルとしての Cohen トポスについて述べた、Mac Lane と Moerdijk による『Sheaves in Geometry and Logic』(SGL) [2] の第 VI 章 1 節 The Topos of Sets, 2 節 The Cohen Topos と 3 節 The Preservation of Cardinal Inequality の定義と定理を述べ、証明の行間を淡々と埋めた物です。但し、本稿の主定理の証明には使用しない、Proposition VI.1.6 のみ、主張と証明は省略されています。予め、ご了承下さい。第 0 節では、SGL の第 IV 章で述べられているトポスに関する基本的な概念と性質を後に使い易い形に纏めました。これらの事実に対する証明は与えられていませんが、可能な限り、SGL の該当箇所を挙げて参照可能な形にしてあります。幾つかの事実は、[5] に証明が書いてあります。

本稿の第 1,2,3 節はそれぞれ、SGL の第 VI 章 1,2,3 節に対応します。第 1 節では、幾つかの構造を持つトポス——「自然数対象 (natural numbers object)」を持つトポス、「二重否定位相 (double negation topology)」に対する層の成すトポス、「選択公理」が成立するトポス——について考察します。第 2 節では、Cohen の強制法で用いられる半順序集合である強制概念 (forcing notion) 上の前層圏の、稠密位相 (dense topology) に対する層の成す圏として Cohen トポスを構成し、この性質を調べます。第 3 節では、第 2 節で構成した Cohen トポスが「連続体仮説」を満たさないことを示します。

本は紙面の都合上細々とした事実の証明に頁を割けず、証明なしに主張が述べられている事がしばしばあります。このノートがそのような行間を埋め、理解の一助となれば幸いです。

尚、圏論に関する前提知識は Mac Lane による『Categories for the Working Mathematician』[1], C87, C88 と C89 で頒布した「The Dark Side of Forcing IV」の第 3 章「Grothendieck 位相・サイト上の層・層化関手に関するノート」、「The Dark Side of Forcing V」の第 3 章「Grothendieck トポスの基本性質に関するノート」と「The Dark Side of Forcing VI」の第 3 章「Lawvere-Tierney 位相・層化関手に関するノート」を想定しています。上記のノートは以下の Web サイトから入手できます：<http://forcing.nagoya/> ノートの本文は英語で書かれていますが、これは洋書である原書の形式・言葉遣いに合わせるためです。

### 3.0 Preliminaries on Topoi

In this section, we present some basic notions and facts about topoi.

For an object  $E$ , and two monomorphisms  $m : A \rightarrowtail E$  and  $n : B \rightarrowtail E$  in a category  $\mathbf{C}$ , if there exists a morphism  $f : A \rightarrow B$  such that  $m = nf$  (necessarily,  $f$  is a monomorphism), then we shall write  $m \leq n$  (or  $A \leq B$ ). Moreover, we shall write  $m \cong n$  (or  $A \cong B$ ) if  $m \leq n$  and  $n \leq m$  hold. Note that  $m \cong n$  iff there exists an isomorphism  $i : A \rightarrow B$  such that  $m = ni$ . Note also that the binary relation  $\cong$  is an equivalence relation on the class of all monomorphisms with codomain  $E$ . We shall denote the class of all equivalence classes of monomorphisms with codomain  $E$  by  $\text{Sub}_{\mathbf{C}}(E)$ . As usual, according to the context, we shall say that  $m : A \rightarrowtail E$  is a subobject of  $E$  (or  $A$  is a subobject of  $E$  for short), meaning a particular representative of the equivalence class or an equivalence class of monomorphisms with codomain  $E$ .

**Definition 3.0.1 (topoi).** We shall call a category  $\mathcal{E}$  a *topos*<sup>\*1</sup> if

- (i)  $\mathcal{E}$  has finite limits and finite colimits;
- (ii)  $\mathcal{E}$  has exponentials;
- (iii)  $\mathcal{E}$  has a subobject classifier. ◇

Let  $\mathcal{E}$  be a topos. We shall denote a unique morphism from the initial object  $0$  to an object  $E$  and a unique morphism from an object  $E$  to the terminal object  $1$  by  $E^0 : 0 \rightarrow E$  and  $!^E : E \rightarrow 1$ , respectively. Let  $\text{true} : 1 \rightarrow \Omega$  be a subobject classifier for  $\mathcal{E}$ . For a subobject  $m : A \rightarrowtail E$  of  $E$ , we shall denote the classifying morphism for  $m$  by  $\text{char}(m)$  as in the following diagram:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{!^A} & 1 \\ \downarrow m & \text{p.b.} & \downarrow \text{true} \\ E & \xrightarrow{\text{char}(m)} & \Omega. \end{array}$$

**Fact 3.0.1.** In a topos  $\mathcal{E}$ , the following conditions hold:

- (i) every morphism which is a monomorphism and an epimorphism is an isomorphism (cf. [2, Proposition IV.2.2, p.167]);
- (ii) every morphism has the image factorization (cf. [2, Proposition IV.6.1, p.185]);
- (iii) for any morphism  $f : F \rightarrow E$  in  $\mathcal{E}$ , the change-of-base functor  $f^* : \mathcal{E}/E \rightarrow \mathcal{E}/F$  preserves coproducts (cf. [2, Theorem IV.7.2, 193]);
- (iv) the pullback of an epimorphism is an epimorphism (cf. [2, Proposition IV.7.3, 194]);
- (v) every morphism whose codomain is the initial object is an isomorphism (cf. [2, Proposition IV.7.4, 194]);

<sup>\*1</sup> In this paper, we assume that every topos is locally small.

- (vi) every morphism whose domain is the initial object is a monomorphism (cf. [2, Corollary IV.7.5, p, 194]);
- (vii) for each object  $E$  in  $\mathcal{E}$ , the poset of all subobjects  $\text{Sub}_{\mathcal{E}}(E)$  of  $E$  form a Heyting algebra, and for any morphism  $f : F \rightarrow E$  in  $\mathcal{E}$ , the pullback functor  $f^{-1} : \text{Sub}_{\mathcal{E}}(E) \rightarrow \text{Sub}_{\mathcal{E}}(F)$  is a homomorphism of Heyting algebras. Moreover, a truth value object  $\Omega$  of  $\mathcal{E}$  is an internal Heyting algebra (cf. [2, Theorem IV.8.1, p. 201]);
- (viii) for any object  $E$  in  $\mathcal{E}$ , if two subobjects of  $E$  are disjoint, i.e., their infimum is given by the initial object of  $\mathcal{E}$ , then their supremum is given by their coproduct (cf. [2, Proposition IV.7.6, p. 195]);
- (ix) if two morphisms  $f : X \rightarrow Y$  and  $g : W \rightarrow Z$  in  $\mathcal{E}$  are epimorphisms, then so is  $f \times g : X \times W \rightarrow Y \times Z$  (cf. [2, Proposition IV.7.3, p. 196]).  $\square$

As in Fact 3.0.1 (vii), a truth value object  $\Omega$  of a topos  $\mathcal{E}$  is an internal Heyting algebra, say,  $(\Omega, 0, 1, \wedge, \vee, \rightarrow, \neg)$ . The internal operations on  $\Omega$  is induced by the external Heyting algebras, say,  $(\text{Sub}_{\mathcal{E}}(E), 0_E, 1_E, \wedge_E, \vee_E, \rightarrow_E, \neg_E)$  ( $E \in \mathcal{E}$ ) via the Yoneda lemma. For example, we shall consider the internal meet operation  $\wedge$  on  $\Omega$ . First, note that, by Fact 3.0.1 (vii), the (external) meet operation

$$\wedge_E : \text{Sub}_{\mathcal{E}}(E) \times \text{Sub}_{\mathcal{E}}(E) \rightarrow \text{Sub}_{\mathcal{E}}(E), \quad (m, n) \mapsto m \wedge_E n. \quad (3.0.1)$$

on  $\text{Sub}_{\mathcal{E}}(E)$  is natural in  $E$ . From the natural bijections  $\text{Sub}_{\mathcal{E}}(E) \cong \text{Hom}_{\mathcal{E}}(E, \Omega)$  and  $\text{Hom}_{\mathcal{E}}(E, \Omega) \times \text{Hom}_{\mathcal{E}}(E, \Omega) \cong \text{Hom}_{\mathcal{E}}(E, \Omega \times \Omega) = \mathbf{y}(\Omega \times \Omega)(E)$ , we can see that the mappings  $(\wedge_E)_{E \in \mathcal{E}}$  as a natural transformation:

$$(\wedge_E)_{E \in \mathcal{E}} : \mathbf{y}(\Omega \times \Omega) \rightarrow \mathbf{y}(\Omega).$$

By the Yoneda lemma, we have the following bijection:

$$\text{Hom}_{\mathbf{Sets}^{\mathcal{E}^{\text{op}}}}(\mathbf{y}(\Omega \times \Omega), \mathbf{y}(\Omega)) \cong \mathbf{y}(\Omega)(\Omega \times \Omega) = \text{Hom}_{\mathcal{E}}(\Omega \times \Omega, \Omega).$$

Therefore, we obtain a unique morphism  $\wedge : \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$  which corresponds to  $(\wedge_E)_{E \in \mathcal{E}}$ , i.e.,  $\wedge = \wedge_{\Omega \times \Omega}(\text{id}_{\Omega \times \Omega})$ . More explicitly,  $\wedge$  is given by the classifying morphism for  $\langle \text{true}, \text{true} \rangle : 1 \rightarrow \Omega \times \Omega$  as in the following diagram (cf. [5, Fact 0.4]):

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\langle \text{true}, \text{true} \rangle} & 1 \\ \downarrow \langle \text{true}, \text{true} \rangle & \text{p.b.} & \downarrow \text{true} \\ \Omega \times \Omega & \xrightarrow{\wedge} & \Omega \end{array} \quad (3.0.2)$$

In the same way, we can translate all *external* operations  $\vee_E, \rightarrow_E, \neg_E$ , on Heyting algebras  $\text{Sub}_{\mathcal{E}}(E)$  to *internal* operations  $\vee, \rightarrow, \neg$  on  $\Omega$ , respectively. The correspondence between external operations and internal operations is as follows: for any two subobject  $m : A \rightarrow E$  and  $n : B \rightarrow E$  of  $E$ , we have

$$\begin{aligned} \text{char}(m \wedge_E n) &= \wedge \circ \langle m, n \rangle; \\ \text{char}(m \vee_E n) &= \vee \circ \langle m, n \rangle; \\ \text{char}(m \rightarrow_E n) &= \rightarrow \circ \langle m, n \rangle; \\ \text{char}(\neg_E m) &= \neg \circ m. \end{aligned}$$

**Definition 3.0.2.** Let  $\mathcal{E}$  be a topos and  $\text{true} : 1 \rightarrow \Omega$  a subobject classifier for  $\mathcal{E}$ . We define a monomorphism  $\text{false} : 1 \rightarrow \Omega$  as the classifying morphism for  $!^0 : 0 \rightarrow 1$  as in the following diagram:

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{!^0} & 1 \\ \downarrow !^0 & \text{p.b.} & \downarrow \text{true} \\ 1 & \xrightarrow{\text{false}} & \Omega. \end{array} \quad (3.0.3) \quad \diamond$$

**Fact 3.0.2.** The negation operator  $\neg$  classifies  $\text{false} : 1 \rightarrow \Omega$  as in the following diagram:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{!^1} & 1 \\ \downarrow \text{false} & \text{p.b.} & \downarrow \text{true} \\ \Omega & \xrightarrow{\neg} & \Omega. \end{array} \quad (3.0.4)$$

The following two equations hold:

- (i)  $\neg \circ \text{false} = \text{true}$ ;
- (ii)  $\neg \circ \text{true} = \text{false}$ .

□

**Proof.** First, we shall prove that the diagram (3.0.4) is a pullback square. To this end, suppose that we have a morphism  $\sigma : T \rightarrow \Omega$  with  $\neg \circ \sigma = \text{true} \circ !^T$ . Let  $m : S \rightarrow T$  be a subobject of  $T$  classified by  $\sigma$ , i.e.,  $\text{char}(m) = \sigma$ . Then we have  $\text{char}(\neg_T m) = \neg \circ \text{char}(m) = \neg \circ \sigma = \text{true} \circ !^T$ . This implies that the subobject  $\neg_T m$  is isomorphic to the identity  $\text{id}_T$ . Hence, we have  $0 \cong m \wedge \neg_T m \cong m$  in  $\text{Sub}_{\mathcal{E}}(T)$ . On the other hand, we have the following pullback squares:

$$\begin{array}{ccccc} S \cong 0 & \xrightarrow{0^0} & 0 & \xrightarrow{!^0} & 1 \\ \downarrow m & \text{p.b.} & \downarrow !^0 & \text{p.b.} & \downarrow \text{true} \\ T & \xrightarrow{!^T} & 1 & \xrightarrow{\text{false}} & \Omega. \end{array}$$

This implies that  $\text{false} \circ !^T$  is the classifying morphism  $\sigma$  for  $m$ , i.e.,  $\sigma = \text{false} \circ !^T$ . This implies that the diagram (3.0.4) is a pullback square.

- (i) Note that  $!^1 = \text{id}_1$ . By (3.0.4), we have  $\neg \circ \text{false} = \text{true} \circ !^1 = \text{true}$ .
- (ii) Note that both left-hand and right-hand squares of the following diagram are pullback squares:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \xrightarrow{!^0} & 1 & \xrightarrow{!^1} & 1 \\ \downarrow !^0 & \text{p.b.} & \downarrow \text{false} & \text{p.b.} & \downarrow \text{true} \\ 1 & \xrightarrow{\text{true}} & \Omega & \xrightarrow{\neg} & \Omega. \end{array}$$

This implies that  $\neg \circ \text{true}$  is the classifying morphism for  $!^0$ . Therefore, by the definition of  $\text{false} : 1 \rightarrow \Omega$ , we obtain  $\neg \circ \text{true} = \text{false}$ .

The proof is complete. ■

We shall omit subscript  $E$  of operations  $\wedge_E, \vee_E, \neg_E$  and  $\rightarrow_E$  on  $\text{Sub}_{\mathcal{E}}(E)$  for short. We shall call the composite  $\neg \circ \neg$  of two negation operator  $\neg : \Omega \rightarrow \Omega$  the *double negation operator*, and denote it by  $\neg\neg$  for short.

### 3.1 The Topos of Sets

**Definition 3.1.1 (natural numbers objects).** Let  $\mathcal{E}$  be a topos and  $1$  the terminal object in  $\mathcal{E}$ . An object  $\mathbf{N}$  in  $\mathcal{E}$  with two morphisms  $0 : 1 \rightarrow \mathbf{N}$  and  $s : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  is called a *natural numbers object* for  $\mathcal{E}$  if for any object  $X$  in  $\mathcal{E}$  with two morphisms  $x : 1 \rightarrow X$  and  $f : X \rightarrow X$ , there exists a unique morphism  $h : \mathbf{N} \rightarrow X$  making the following diagram commutative:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \xrightarrow{0} & \mathbf{N} & \xrightarrow{s} & \mathbf{N} \\ \parallel & & \circ & \downarrow h & \circ & \downarrow h \\ 1 & \xrightarrow{x} & X & \xrightarrow{f} & X. \end{array} \quad (3.1.1)$$

We shall call two morphisms  $0 : 1 \rightarrow \mathbf{N}$  and  $s : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  the *zero* and the *successor* of  $\mathbf{N}$ , respectively.  $\diamond$

**Fact 3.1.1.** Let  $\mathcal{E}$  be a topos with a natural numbers object  $\mathbf{N}$  for  $\mathcal{E}$ . Then  $\mathbf{N}$  is unique up to isomorphism.  $\square$

**Proof.** Suppose that there exists another natural numbers object  $\tilde{\mathbf{N}}$  for  $\mathcal{E}$  with the zero  $\tilde{0} : 1 \rightarrow \tilde{\mathbf{N}}$  and the successor  $\tilde{s} : \tilde{\mathbf{N}} \rightarrow \tilde{\mathbf{N}}$ . Then, by the condition that  $\mathbf{N}$  is a natural numbers object, for two morphisms  $\tilde{0} : 1 \rightarrow \tilde{\mathbf{N}}$  and  $\tilde{s} : \tilde{\mathbf{N}} \rightarrow \tilde{\mathbf{N}}$ , there exists a unique morphism  $h : \mathbf{N} \rightarrow \tilde{\mathbf{N}}$  making the following diagram commutative:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \xrightarrow{0} & \mathbf{N} & \xrightarrow{s} & \mathbf{N} \\ \parallel & & \circ & \downarrow h & \circ & \downarrow h \\ 1 & \xrightarrow{\tilde{0}} & \tilde{\mathbf{N}} & \xrightarrow{\tilde{s}} & \tilde{\mathbf{N}}. \end{array} \quad (3.1.2)$$

Similarly, by the condition that  $\tilde{\mathbf{N}}$  is a natural numbers object, for two morphisms  $0 : 1 \rightarrow \mathbf{N}$  and  $s : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ , there exists a unique morphism  $\tilde{h} : \tilde{\mathbf{N}} \rightarrow \mathbf{N}$  making the following diagram commutative:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \xrightarrow{\tilde{0}} & \tilde{\mathbf{N}} & \xrightarrow{s} & \tilde{\mathbf{N}} \\ \parallel & & \circ & \downarrow \tilde{h} & \circ & \downarrow \tilde{h} \\ 1 & \xrightarrow{0} & \mathbf{N} & \xrightarrow{s} & \mathbf{N}. \end{array} \quad (3.1.3)$$

By combining (3.1.2) with (3.1.3), we have the following commutative diagram:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \xrightarrow{0} & \mathbf{N} & \xrightarrow{s} & \mathbf{N} \\ \parallel & & \circ & \downarrow \tilde{h} \circ h & \circ & \downarrow \tilde{h} \circ h \\ 1 & \xrightarrow{\tilde{0}} & \tilde{\mathbf{N}} & \xrightarrow{\tilde{s}} & \tilde{\mathbf{N}}. \end{array} \quad (3.1.4)$$

This implies that for two morphisms  $0 : 1 \rightarrow \mathbf{N}$  and  $s : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ , the composite  $\tilde{h} \circ h$  is the unique morphism making the above diagram commutative, i.e.,

$$(\tilde{h} \circ h) \circ 0 = \tilde{h} \circ h \quad \text{and} \quad (\tilde{h} \circ h) \circ s = s \circ (\tilde{h} \circ h).$$

On the other hand, the identity morphism  $\text{id}_{\mathbf{N}}$  make the same diagram commutative. By uniqueness, we obtain  $\tilde{h} \circ h = \text{id}_{\mathbf{N}}$ . By similar argument, we can obtain  $h \circ \tilde{h} = \text{id}_{\tilde{\mathbf{N}}}$ . Thus,  $\mathbf{N}$  and  $\tilde{\mathbf{N}}$  are isomorphic. The proof is complete.  $\blacksquare$

**Example 3.1.1 (natural numbers objects).** The set  $\mathbf{N}$  of all natural numbers, i.e.,  $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  is a natural numbers object for **Sets**. The zero  $0 : 1 \rightarrow \mathbf{N}$  and the successor  $s : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  ( $n \mapsto n$ ) is given by  $0(*) = 1$  and  $s(n) = n + 1$ , respectively. Let  $X$  be an object in **Sets** with two morphisms  $x : 1 \rightarrow X$  (Note that  $x$  is nothing but an element of  $X$ , i.e.,  $x \in X$ ) and  $f : X \rightarrow X$ . Define a morphism  $h : \mathbf{N} \rightarrow X$  by recursion as follows:

- (i)  $h(0) := x$ ;
- (ii)  $h(n+1) := f(h(n)) \quad (n \in \mathbf{N})$ .

Then the morphism  $h$  is the unique one making the diagram (3.1.1) commutative.  $\diamond$

**Fact 3.1.2.** Let  $\mathcal{E}$  and  $\mathcal{F}$  be two topoi with an adjunction  $g^* \dashv g_*$  as in the following diagram:

$$\mathcal{E} \begin{array}{c} \xrightarrow{g^*} \\ \perp \\ \xleftarrow{g_*} \end{array} \mathcal{F}, \quad g^* \dashv g_*$$

with the property that  $g^*$  preserves the terminal object  $1$  of  $\mathcal{E}$ . Suppose that  $\mathcal{E}$  has a natural numbers object  $\mathbf{N}$  with the zero  $0 : 1 \rightarrow \mathbf{N}$  and the successor  $s : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ . Then  $\mathcal{F}$  also has a natural numbers object with the zero  $g^*(0)$  and the successor  $g^*(s)$ . Moreover, every Grothendieck topos has a natural numbers object.  $\square$

**Proof.** We claim that  $g^*(\mathbf{N})$  is a natural numbers object for  $\mathcal{F}$  with the zero  $g^*(0)$  and the successor  $g^*(s)$  as in the following diagram:

$$g^*(1) \xrightarrow{g^*(0)} g^*(\mathbf{N}) \xrightarrow{g^*(s)} g^*(\mathbf{N}).$$

Note that  $g^*(1)$  is the terminal object of  $\mathcal{F}$ . Let  $X$  be an object in  $\mathcal{F}$ ,  $x : g^*(1) \rightarrow X$  and  $f : X \rightarrow X$  two morphisms in  $\mathcal{F}$ . Since we have the adjunction  $g^* \dashv g_*$ , there exists the following bijection  $\phi_{A,B}$  for each two objects  $A$  in  $\mathcal{E}$  and  $B$  in  $\mathcal{F}$ :

$$\phi_{A,B} : \text{Hom}_{\mathcal{F}}(g^*(A), B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{E}}(A, g_*(B)), \quad h \mapsto \check{h},$$

which is natural in  $A$  and  $B$ . Consider two morphisms  $\check{x} : 1 \rightarrow g_*(X)$  and  $g_*(f) : g_*(X) \rightarrow g_*(X)$  in  $\mathcal{E}$ . Then, since  $\mathcal{E}$  has the natural numbers object  $\mathbf{N}$ , there exists a unique morphism  $\check{h} : \mathbf{N} \rightarrow g_*(X)$  making the following diagram commutative:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \xrightarrow{0} & \mathbf{N} & \xrightarrow{s} & \mathbf{N} \\ \parallel & & \circ & \check{h} & \circ & \check{h} \\ & & \downarrow \check{h} & & \downarrow \check{h} \\ 1 & \xrightarrow{\check{x}} & g_*(X) & \xrightarrow{g_*(f)} & g_*(X). \end{array}$$

That is, we have

$$\check{h} \circ 0 = \check{x} \quad \text{and} \quad \check{h} \circ s = g_*(f) \circ \check{h}.$$

Since there exist natural bijections  $\phi_{1,X}$  and  $\phi_{\mathbf{N},X}$ , we obtain

$$h \circ g^*(0) = x \quad \text{and} \quad h \circ g^*(s) = f \circ h.$$

That is, there exists a unique morphism  $h : g^*(\mathbf{N}) \rightarrow X$  making the following diagram commutative:

$$\begin{array}{ccccc} g^*(1) & \xrightarrow{g^*(0)} & g^*(\mathbf{N}) & \xrightarrow{g^*(s)} & g^*(\mathbf{N}) \\ \parallel & \circlearrowleft & \downarrow \check{h} & \circlearrowright & \downarrow \check{h} \\ g^*(1) & \xrightarrow{x} & X & \xrightarrow{f} & X. \end{array}$$

Thus,  $g^*(\mathbf{N})$  is a natural numbers object for  $\mathcal{F}$ .

Next, we shall prove that every Grothendieck topos has a natural numbers object. Let  $\mathbf{C}$  be a small category. Let  $\Delta : \mathbf{Sets} \rightarrow \mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}$  be the constant presheaf functor, i.e., for each set  $S \in \mathbf{Sets}$ ,

- (i)  $\Delta(S)(C) = S \quad (C \in \mathbf{P})$ ;
- (ii)  $\Delta(S)(f) = \text{id}_S \quad (f : D \rightarrow C \in \mathbf{C})$ .

Let  $\Gamma : \mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\text{op}}} \rightarrow \mathbf{Sets}$  be the global sections functor, i.e.,

- (i)  $\Gamma P = \text{Hom}_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}}(1, P) \quad (P \in \mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\text{op}}})$ ;
- (ii)  $\Gamma \alpha : \text{Hom}_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}}(1, P) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}}(1, Q), \gamma \mapsto \alpha \circ \gamma \quad (\alpha : P \rightarrow Q \in \mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\text{op}}})$ .

Recall that there exists the following adjunction (cf. [2, pp. 47–48]):

$$\mathbf{Sets} \begin{array}{c} \xrightarrow{\Delta} \\ \xleftarrow[\Gamma]{\perp} \end{array} \mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}, \quad \Delta \dashv \Gamma.$$

The natural bijection

$$\theta : \text{Hom}_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}}(\Delta S, P) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Sets}}(S, \Gamma P)$$

is given by for each  $\alpha \in \text{Hom}_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}}(\Delta S, P)$

$$\theta(\alpha) : S \rightarrow \Gamma P, \quad s \mapsto \gamma = (\gamma_C : \{*\} \ni * \mapsto \alpha_C(s) \in PC)_{C \in \mathbf{C}}.$$

Note that the constant presheaf functor  $\Delta$  preserves the terminal object:  $\Delta(\{*\}) = 1$ . Moreover,  $\Delta$  preserves pullbacks, since pullbacks of presheaves are defined pointwise. Consequently,  $\Delta$  preserves finite limits, i.e.,  $\Delta$  is left exact.

Now, let  $J$  be a Grothendieck topology. Then we have the associated sheaf functor:

$$\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\text{op}}} \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathbf{a}} \\ \xleftarrow[i]{\perp} \end{array} \text{Sh}(\mathbf{C}, J), \quad \mathbf{a} \dashv i.$$

By composing two adjunctions  $\Delta \dashv \Gamma$  and  $\mathbf{a} \dashv i$ , we obtain the following adjunction:

$$\mathbf{Sets} \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathbf{a}\Delta} \\ \xleftarrow[\Gamma i]{\perp} \end{array} \text{Sh}(\mathbf{C}, J), \quad \mathbf{a}\Delta \dashv \Gamma i. \quad (3.1.5)$$

Let  $\mathbf{N}$  be a natural number object for  $\mathbf{Sets}$ . Since both  $\Delta$  and  $\mathbf{a}$  preserve terminal objects, so does  $\mathbf{a}\Delta$ . Thus,  $\mathbf{a}\Delta(\mathbf{N})$  is the natural numbers object for the Grothendieck topos  $\mathrm{Sh}(\mathbf{C}, J)$ . More explicitly, since left adjoints  $\mathbf{a}$  and  $\Delta$  preserve coproducts, we have an isomorphism:

$$\mathbf{a}\Delta(\mathbf{N}) \cong \coprod_{n \in \mathbf{N}} 1,$$

in  $\mathrm{Sh}(\mathbf{C}, J)$ , where  $1$  is the terminal object in  $\mathrm{Sh}(\mathbf{C}, J)$  (or  $\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$ ). The proof is complete.  $\blacksquare$

**Definition 3.1.2 (Boolean topoi).** Let  $\mathcal{E}$  be a topos and  $\Omega$  a truth value object of  $\mathcal{E}$ . Then  $\mathcal{E}$  is said to be *Boolean* if the internal Heyting algebra  $\Omega$  is Boolean.  $\diamond$

**Fact 3.1.3.** *Let  $\mathcal{E}$  be a topos. Then the following five conditions are equivalent:*

- (i)  $\mathcal{E}$  is Boolean;
- (ii) the negation operator  $\neg : \Omega \rightarrow \Omega$  is involutive, i.e.,  $\neg\neg = \mathrm{id}_\Omega$ ;
- (iii) for any object  $E$  in  $\mathcal{E}$ , the external Heyting algebra  $\mathrm{Sub}_\mathcal{E}(E)$  is a Boolean algebra;
- (iv) for any object  $E$  in  $\mathcal{E}$ , for any subobject  $m : S \rightarrow E$  of  $E$ ,  $S \vee \neg S \cong E$  holds;
- (v) the subobject classifier  $\mathrm{true} : 1 \rightarrow \Omega$  and  $\mathrm{false} : 1 \rightarrow \Omega$  induces an isomorphism  $(\mathrm{true}, \mathrm{false}) : 1 + 1 \rightarrow \Omega$ .  $\square$

**Proof.** Recall that we have the natural bijection  $\mathrm{Hom}_\mathcal{E}(E, \Omega) \cong \mathrm{Sub}_\mathcal{E}(E)$  for each object  $E$  in  $\mathcal{E}$ . This implies that (i) and (iii) are equivalent. Recall also that a Heyting algebra is Boolean iff every pseudo-complement is a complement (cf. [2, Proposition I.8.4]). Hence, two conditions (iii) and (iv) are equivalent. Recall also that a Heyting algebra is Boolean iff the negation operator is involutive (cf. [2, Proposition I.8.4]). Hence, the condition (ii) and (iii) is equivalent. Now, we shall prove that the condition (v) implies the condition (ii). Assume that  $(\mathrm{true}, \mathrm{false}) : 1 + 1 \rightarrow \Omega$  is an isomorphism. Then, by Fact 3.0.2, we have

$$\neg\neg \circ (\mathrm{true}, \mathrm{false}) = (\neg\neg \circ \mathrm{true}, \neg\neg \circ \mathrm{false}) = (\neg \circ \mathrm{false}, \neg \circ \mathrm{true}) = (\mathrm{true}, \mathrm{false}).$$

Now, since  $(\mathrm{true}, \mathrm{false})$  is an isomorphism, we obtain  $\neg\neg = \mathrm{id}_\Omega$ . Next, we shall prove that the condition (iv) implies the condition (v). Note that, by the definition of  $\mathrm{false}$  (see the right-hand side of (3.0.3)),  $\mathrm{true}$  and  $\mathrm{false}$  are disjoint, i.e.,  $\mathrm{true} \wedge \mathrm{false} \cong 0$ . Since the supremum of two disjoint subobjects is given by the coproduct (cf. [2, Proposition IV.7.6]), we have  $\mathrm{true} \vee \mathrm{false} \cong (\mathrm{true}, \mathrm{false})$ . On the other hand, as the special case of (iv), we have  $\mathrm{true} \vee \mathrm{false} = \mathrm{true} \vee \neg\mathrm{true} \cong \mathrm{id}_\Omega$  in  $\mathrm{Sub}_\mathcal{E}(\Omega)$ . Therefore,  $(\mathrm{true}, \mathrm{false}) : 1 + 1 \rightarrow \Omega$  is an isomorphism. The proof is complete.  $\blacksquare$

Let  $\mathcal{E}$  be a topos,  $j$  a Lawvere-Tierney topology on  $\mathcal{E}$  and  $\mathrm{Sh}_j(\mathcal{E})$  the category of sheaves for  $j$ . Let  $F$  be a sheaf for  $j$  and  $m : A \rightarrow F$  a subobject of  $F$ . Then  $A$  is closed iff  $A$  is a sheaf for  $j$  (cf. [2, Lemma V.2.4]). Hence, we have  $\mathrm{ClSub}_\mathcal{E}(F) \cong \mathrm{Sub}_{\mathrm{Sh}_j(\mathcal{E})}(F)$ . Recall that  $\mathrm{Sh}_j(\mathcal{E})$  is a topos (cf. [2, Theorem V.3.5]).



**Lemma 3.1.1.** *Let  $\mathcal{E}$  be a topos,  $j$  a Lawvere-Tierney topology on  $\mathcal{E}$  and  $\text{Sh}_j(\mathcal{E})$  the category of sheaves for  $j$ . Let  $F$  be a sheaf for  $j$ . Then  $\text{Sub}_{\text{Sh}_j(\mathcal{E})}(F)$  is a Heyting algebra. Moreover, the corresponding unit  $1_j$ , zero  $0_j$ , the supremum  $\vee_j$ , the infimum  $\wedge_j$ , the implication  $\rightarrow_j$  and the negation  $\neg_j$  are given as follows: for any two closed subobjects  $S$  and  $T$  of  $F$ ,*

- (i)  $1_j = 1$ ;
- (ii)  $0_j = \bar{0}$ ;
- (iii)  $S \wedge_j T = S \wedge T$ ;
- (iv)  $S \vee_j T = \overline{S \vee T}$ ;
- (v)  $S \rightarrow_j T = S \rightarrow T$ ;
- (vi)  $\neg_j S = S \rightarrow \bar{0}$ ,

where  $\bar{S}$  is the closure of  $S$  for  $j$ . □

**Proof.** Note that since the category  $\text{Sh}_j(\mathcal{E})$  is a topos, by Fact 3.0.1 (vii),  $\text{Sub}_{\text{Sh}_j(\mathcal{E})}(F)$  is a Heyting algebra.

- (i) Clearly,  $F$  is the greatest closed subobject of  $F$ .
- (ii)  $\bar{0}$  is the least closed subobject of  $F$ , where  $0$  is the least subobject of  $\text{Sub}_{\mathcal{E}}(F)$ .  
Let  $S$  and  $T$  be two closed subobject of  $F$ .
- (iii) Since the closure operator preserves the infimum (cf. [2, Proposition V.1.1]), we have  $\overline{S \wedge T} \cong \bar{S} \wedge \bar{T} \cong S \wedge T$ . This implies that  $\overline{S \wedge T}$  is the infimum of  $S$  and  $T$  in  $\text{Sub}_{\text{Sh}_j(\mathcal{E})}(F)$ .
- (iv) Clearly,  $\overline{S \vee T}$  is closed. Since  $S \vee T \leq \overline{S \vee T}$ , we have  $S, T \leq \overline{S \vee T}$ . To prove that  $\overline{S \vee T}$  is the supremum of  $S$  and  $T$  in  $\text{Sub}_{\text{Sh}_j(\mathcal{E})}(F)$ , suppose that there exists a subobject  $W$  in  $\text{Sub}_{\text{Sh}_j(\mathcal{E})}(F)$  such that  $S, T \leq W$ . Then we have  $S \vee T \leq W$ . Since the closure operator is order-preserving and  $W$  is closed, we obtain  $\overline{S \vee T} \leq \bar{W} \cong W$ . Therefore,  $\overline{S \vee T}$  is the supremum of  $S$  and  $T$  in  $\text{Sub}_{\text{Sh}_j(\mathcal{E})}(F)$ .
- (v) First, we shall prove that  $S \rightarrow T$  is closed. Let  $W$  be a subobject of  $F$  in  $\text{Sub}_{\text{Sh}_j(\mathcal{E})}(F)$ . Then we have  $S \leq S \rightarrow T$  iff  $S \wedge W \leq T$ . Since the close operator is order-preserving, we have  $\overline{S \wedge W} \leq \bar{T}$ . Since  $S$  and  $T$  are closed, and by the definition (iii) of the Lawvere-Tierney topology  $j$ , we obtain  $S \wedge \bar{W} \leq T$ , i.e.,  $\bar{W} \leq S \rightarrow T$ . In particular, by setting  $W := S \rightarrow T$ , we obtain  $\overline{S \rightarrow T} \leq S \rightarrow T$ . Clearly, we have  $S \rightarrow T \leq \overline{S \rightarrow T}$ . Therefore, we obtain  $\overline{S \rightarrow T} \cong S \rightarrow T$ . Thus,  $S \rightarrow T$  is closed. Now, we shall prove that for all subobjects  $R$  of  $F$ ,  $S \wedge_j R \leq T$  iff  $R \leq S \rightarrow T$ . By (iii), we have  $S \wedge_j R \leq T$  iff  $S \wedge R \leq T$  for all subobjects  $R$  of  $F$ . By the definition of  $\rightarrow$ , we obtain the equivalence  $S \wedge_j R \leq T$  iff  $R \leq S \rightarrow T$  for all subobjects  $R$  of  $F$ .
- (vi) Note that the negation is defined by  $\neg_j S = S \rightarrow_j 0_j$ . By (ii) and (v), we have  $\neg_j S = S \rightarrow_j 0_j = S \rightarrow 0_j = S \rightarrow \bar{0}$ .

The proof is complete. ■

**Theorem 3.1.1.** *Let  $\mathcal{E}$  be a topos and  $\neg\neg : \Omega \rightarrow \Omega$  the double negation operator. Then  $\neg\neg$  is a Lawvere-Tierney topology on  $\mathcal{E}$ , and the category  $\text{Sh}_{\neg\neg}(\mathcal{E})$  of sheaves for  $\neg\neg$  is a Boolean topos.  $\square$*

**Proof.** Let  $E$  be an object in  $\mathcal{E}$ . Note that the negation operator in the Heyting algebra  $\text{Sub}_{\mathcal{E}}(E)$  satisfies the following three conditions (cf. [2, Proposition I.8.1]): for any two subobjects  $S$  and  $T$  of  $E$  in  $\mathcal{E}$ ,

- (i)  $S \leq \neg\neg S$ ;
- (ii)  $\neg\neg S = \neg\neg(\neg\neg S)$ ;
- (iii)  $\neg\neg(S \wedge T) = (\neg\neg S) \wedge (\neg\neg T)$ .

This implies that the operator

$$\neg\neg : \text{Sub}_{\mathcal{E}}(E) \rightarrow \text{Sub}_{\mathcal{E}}(E), \quad S \mapsto \neg\neg S \quad (3.1.6)$$

is a closure operator. We shall verify that this closure operator is natural in  $E$ . Recall that for each morphism  $f : F \rightarrow E$  in  $\mathcal{E}$ , the pullback functor  $f^{-1} : \text{Sub}_{\mathcal{E}}(E) \rightarrow \text{Sub}_{\mathcal{E}}(F)$  is a homomorphism between the Heyting algebras  $\text{Sub}_{\mathcal{E}}(E)$  and  $\text{Sub}_{\mathcal{E}}(F)$  (Fact 3.0.1 (vii)). Hence,  $f^{-1}$  preserves, in particular, the negation operator. Therefore,  $f^{-1}$  preserves the double negation operator  $\neg\neg$ . Thus, the closure operator is natural. Consequently,  $\neg\neg : \Omega \rightarrow \Omega$  defines a Lawvere-Tierney topology on  $\mathcal{E}$  (cf. [2, Proposition V.1.1]).

Next, we shall prove that the topos  $\text{Sh}_{\neg\neg}(\mathcal{E})$  of sheaves for  $\neg\neg$  is Boolean. For readability reason, we denote the Lawvere-Tierney topology  $\neg\neg$  by  $j$ . Let  $S$  be a subsheaf of a sheaf  $F$  for  $j$ . Then, since the subsheaf of a sheaf is closed (cf. [2, Lemma V.3.4]), we have  $\neg\neg S = S$  in  $\text{Sub}_{\mathcal{E}}(F)$ . Now, by Fact 3.1.3, it is sufficient to show that  $\neg_j \neg_j S = S$  in  $\text{Sub}_{\text{Sh}_j(\mathcal{E})}(F)$ . By Lemma 3.1.1 (vi), we have  $\neg_j S = S \rightarrow \neg\neg(0)$ . On the other hand, we have  $\neg\neg 0 = \neg 1 = 0$ . Hence, we obtain  $\neg_j S = S \rightarrow 0 = \neg S$ . Therefore, the negation operator  $\neg_j$  in  $\text{Sub}_{\text{Sh}_j(\mathcal{E})}(F)$  is simply the restriction of the negation operator  $\neg$  in  $\text{Sub}_{\mathcal{E}}(F)$ . Thus, we obtain  $\neg_j \neg_j S = S$  in  $\text{Sub}_{\text{Sh}_j(\mathcal{E})}(F)$ .  $\blacksquare$

In accordance with Theorem 3.1.1, we shall call the Lawvere-Tierney topology  $\neg\neg$  the *double negation topology*.

**Lemma 3.1.2.** *Let  $(\mathbf{C}, J)$  be a site. Then for any subobject  $m : A \rightarrow E$  of  $E$  in the presheaf category  $\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}$  and any object  $C$  in  $\mathbf{C}$ , the following equation holds:*

$$(\neg\neg A)C = \{x \in EC \mid \forall f : B \rightarrow C, \exists g : D \rightarrow B \in \mathbf{C}[(E(fg))(x) \in AD]\}. \quad (3.1.7)$$

$\square$

**Proof.** Let  $m : A \rightarrow E$  be a subobject of  $E$  in  $\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}$  and  $C \in \mathbf{C}$ . Recall that  $\neg A$  in  $\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}$  is explicitly described as follows (cf. [2, I.8 (19)]):

$$(\neg A)C = \{x \in EC \mid \forall f : B \rightarrow C, (Ef)(x) \notin AB\}. \quad (3.1.8)$$

Hence, we have

$$(\neg\neg A)C = \{x \in EC \mid \forall f : B \rightarrow C, (Ef)(x) \notin (\neg A)B\}.$$

Note that

$$(Ef)(x) \notin (\neg A)B \Leftrightarrow [\exists g : D \rightarrow B \in \mathbf{C}, \quad (Eg)(Ef(x)) \in AD].$$

Therefore, we have the following equivalence:

$$x \in (\neg\neg A)C \Leftrightarrow [\forall f : B \rightarrow C, \exists g : D \rightarrow B \in \mathbf{C} [(E(fg))(x) \in AD]].$$

The proof is complete.  $\blacksquare$

Recall that every Grothendieck topology  $J$  on a small category  $\mathbf{C}$  induces a Lawvere-Tierney topology  $j$  on the presheaf category  $\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}$  (cf. [2, Theorem V.1.1]). More precisely, the induced Lawvere-Tierney topology  $j$  is given by the following pullback square (cf. [5, Theorem 3.4.1]):

$$\begin{array}{ccc} J & \xrightarrow{!^J} & 1 \\ \downarrow & \text{p.b.} & \downarrow \text{true} \\ \Omega & \xrightarrow{j} & \Omega. \end{array}$$

where  $\text{true} : 1 \rightarrow \Omega$  is a subobject classifier for  $\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}$ .

**Corollary 3.1.1.** *The Lawvere-Tierney topology induced by the dense topology coincides with the double negation topology.*  $\square$

**Proof.** Let  $\mathbf{C}$  be a small category,  $J$  the dense topology on  $\mathbf{C}$  and  $m : A \rightarrow E$  a subobject of  $E$  in  $\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\text{op}}}$ . Recall that for the Lawvere-Tierney topology  $j$  induced by  $J$ , we have the following equivalence for all  $C \in \mathbf{C}$  and all  $x \in EC$  (cf. [2, p. 235]):

$$x \in \overline{AC} \Leftrightarrow \{f : B \rightarrow C \mid (Ef)(x) \in AB\} \in J(C),$$

where  $\overline{A}$  is the closure of  $A$  for  $j$ . Let  $C \in \mathbf{C}$  and  $x \in EC$ . Recall also that the dense topology  $J$  is defined as follows (cf. [2, p. 115]):

$$S \in J(C) \Leftrightarrow [\forall f : B \rightarrow C \in \mathbf{C}, \exists g : D \rightarrow B \in \mathbf{C}, \quad fg \in S].$$

Hence, we have the following equivalence:

$$x \in \overline{AC} \Leftrightarrow [\forall f : B \rightarrow C \in \mathbf{C}, \exists g : D \rightarrow B \in \mathbf{C}, \quad (E(fg))(x) \in AD].$$

By Lemma 3.1.2, we obtain the following equivalence:

$$x \in \overline{AC} \Leftrightarrow x \in (\neg\neg A)C.$$

The proof is complete.  $\blacksquare$

**Definition 3.1.3 (AC).** A topos  $\mathcal{E}$  is said to satisfy the *axiom of choice* (AC for short) if every epimorphism  $e : X \rightarrow I$  in  $\mathcal{E}$  is a retraction, or equivalently  $e$  has a section, i.e., there exists a morphism  $s : I \rightarrow X$  such that  $es = \text{id}_I$ .

A topos  $\mathcal{E}$  is said to satisfy the *internal axiom of choice* (IAC for short) if for any object  $E$  in  $\mathcal{E}$ , the exponentiation functor by  $E$

$$(-)^E : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}, \quad I \mapsto I^E$$

preserves epimorphisms.  $\diamond$

**Definition 3.1.4 (generators).** For a category  $\mathbf{C}$ , a family  $\mathcal{G}$  of objects in  $\mathbf{C}$  is said to *generate*  $\mathbf{C}$  if for each pair  $(f, g)$  of two morphisms  $f, g : A \rightarrow B$  in  $\mathbf{C}$ , if  $f \neq g$ , then there exists a morphism  $u : G \rightarrow A$  from an object  $G$  in the family  $\mathcal{G}$  such that  $fu \neq gu$ .  $\diamond$

**Example 3.1.2 (generators).** Let  $\mathbf{Sets}$  be the category of sets in a fixed universe. Then for any singleton  $\{*\}$  in  $\mathbf{Sets}$ ,  $\{\{*\}\}$  generates  $\mathbf{Sets}$ .  $\diamond$

**Fact 3.1.4.** Let  $(\mathbf{C}, J)$  be a site and  $\mathbf{a}$  the associated sheaf functor (the left adjoint of the inclusion functor  $i : \mathrm{Sh}(\mathbf{C}, J) \hookrightarrow \mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$ ). Then the family  $\{\mathbf{a}\mathbf{y}(C) \mid C \in \mathbf{C}\}$  of sheaves associated to representable presheaves generates the Grothendieck topos  $\mathrm{Sh}(\mathbf{C}, J)$  of sheaves on the site  $(\mathbf{C}, J)$ .  $\square$

**Proof.** Let  $\alpha, \beta : F \rightarrow G$  be two natural transformations between two sheaves  $F, G \in \mathrm{Sh}(\mathbf{C}, J)$  such that  $\alpha \neq \beta$ . The condition  $\alpha \neq \beta$  implies that there exists an object  $C \in \mathbf{C}$  and an element  $x \in FC$  such that  $\alpha_C(x) \neq \beta_C(x)$ . On the other hand, since the associated sheaf functor  $\mathbf{a}$  is the left adjoint of the inclusion functor  $i$ , and by the Yoneda lemma, we have the following bijection:

$$FC = i(F)C \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}}(\mathbf{y}(C), i(F)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(\mathbf{C}, J)}(\mathbf{a}\mathbf{y}(C), F).$$

Hence, since we have the element  $x \in FC$  with  $\alpha_C(x) \neq \beta_C(x)$ , there exists a natural transformation  $u_x : \mathbf{a}\mathbf{y}(C) \rightarrow F$  such that  $\alpha u_x \neq \beta u_x$ . Therefore,  $\{\mathbf{a}\mathbf{y}(C) \mid C \in \mathbf{C}\}$  generates  $\mathrm{Sh}(\mathbf{C}, J)$ . The proof is complete.  $\blacksquare$

**Definition 3.1.5 (non-degenerate).** We shall say that a topos  $\mathcal{E}$  is *non-degenerate* if the initial object in  $\mathcal{E}$  is not isomorphic to the terminal object in  $\mathcal{E}$ .  $\diamond$

**Definition 3.1.6 (well-pointed topoi).** A topos  $\mathcal{E}$  with the terminal object  $1$  is said to be *well-pointed* if  $\{1\}$  generates  $\mathcal{E}$ .  $\diamond$

**Fact 3.1.5.** A non-degenerate topos  $\mathcal{E}$  with the terminal object  $1$  is well-pointed iff the hom-functor  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(1, -) : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{Sets}$  is faithful.  $\square$

**Proof.** Suppose that  $\mathcal{E}$  is well-pointed. Let  $A, B \in \mathbf{C}$  and  $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(A, B)$  such that  $f \neq g$ . Recall that  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(1, -)(f) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(1, A) \ni a \mapsto fa \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(1, B)$ . Since  $\mathcal{E}$  is well-pointed, there exists a morphism  $a : 1 \rightarrow A$  such that  $fa \neq ga$ . This implies that  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(1, -)(f) \neq \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(1, -)(g)$ . Therefore,  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(1, -)$  is faithful.

Conversely, suppose that  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(1, -)$  is faithful. Let  $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(A, B)$  such that  $f \neq g$ . Since  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(1, -)$  is faithful, we have  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(1, -)(f) \neq \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(1, -)(g)$ . This implies that there exists a morphism  $a : 1 \rightarrow A$  such that  $fa \neq ga$ . Therefore,  $\mathcal{E}$  is well-pointed. The proof is complete.  $\blacksquare$

We always suppose that every well-pointed topos  $\mathcal{E}$  is non-degenerate.

Recall that in a topos  $\mathcal{E}$ , every morphism  $U^0 : 0 \rightarrow U$  from the initial object  $0$  to arbitrary object  $U$  is a monomorphism (cf. [2, Corollary IV.7.5]).

**Definition 3.1.7 (two-valued topoi).** A topos  $\mathcal{E}$  with the initial object  $0$  and the terminal object  $1$  is said to be *two-valued* if the morphisms  $!^0 : 0 \rightarrow 1$  and  $!^1 : 1 \rightarrow 1$  are the only subobjects of  $1$ .  $\diamond$

**Fact 3.1.6.** A well-pointed topos  $\mathcal{E}$  is both two-valued and Boolean.  $\square$

**Proof.** First, observe that any non-zero object  $U$  (i.e., an object  $U$  not isomorphic to the initial object) in  $\mathcal{E}$  has a morphism from  $1$  to  $U$ . In fact, for a non-zero object  $U$ , there exists at least two different subobject  $U^0 : 0 \rightarrow U$  (cf. [2, Corollary IV.7.5]) and  $\text{id}_U : U \rightarrow U$ . Since  $\mathcal{E}$  is well-pointed, for two different morphisms  $\text{char}(U^0), \text{char}(\text{id}_U) : U \rightarrow \Omega$ , there exists a morphism  $u : 1 \rightarrow U$  such that  $\text{char}(U^0)u \neq \text{char}(\text{id}_U)u$ . We shall call this morphism  $u$  a *global section* of  $U$ .

Next, we shall prove that  $\mathcal{E}$  is two-valued. To this end, suppose that  $m : U \rightarrow 1$  is a subobject of  $1$  in  $\mathcal{E}$ . If  $U$  is non-zero, there exists a global section  $u : 1 \rightarrow U$  of  $U$ . Then we have  $mu = \text{id}_1$ , and hence  $mum = m$ . Since  $m$  is a monomorphism, we have  $um = \text{id}_U$ . Hence,  $m : U \rightarrow 1$  is an isomorphism. Therefore,  $m$  is the maximum subobject of  $1$ , i.e.,  $m = !^1$ . Thus,  $!^0 : 0 \rightarrow 1$  and  $!^1 : 1 \rightarrow 1$  are the only subobjects of  $1$ .

Finally, we shall prove that  $\mathcal{E}$  is Boolean. To this end, let  $m : S \rightarrow E$  be a subobject of an object  $E$  in  $\mathcal{E}$ . By Fact 3.1.3, it is sufficient to show that  $S \vee \neg S = E$ . Suppose that  $S \vee \neg S \neq E$ , i.e.,  $m \vee \neg m : S \vee \neg S \rightarrow E$  and  $\text{id}_E : E \rightarrow E$  are different subobjects. Since  $\mathcal{E}$  is well-pointed, for two different morphisms  $\text{char}(m \vee \neg m), \text{char}(\text{id}_E)$ , there exists a morphism  $x : 1 \rightarrow E$  such that  $\text{char}(m \vee \neg m)x \neq \text{char}(\text{id}_E)x$ . Note that  $x$  is a monomorphism. On the other hand, consider the following pullback square:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{y} & S \vee \neg S \\ \downarrow v & \text{p.b.} & \downarrow m \vee \neg m \\ 1 & \xrightarrow{x} & E \end{array}$$

Since  $\mathcal{E}$  is well-pointed, the pullback  $v : V \rightarrow 1$  of  $m \vee \neg m$  along  $x$  is either  $0^1 : 0 \rightarrow 1$  or  $!^1 (= \text{id}_1)$ . Suppose that  $v = \text{id}_1$ . Then we have  $x = (m \vee \neg m)y$ . This contradict to the condition  $\text{char}(m \vee \neg m)x \neq \text{char}(\text{id}_E)x$ . In fact, the equation  $x = (m \vee \neg m)y$  gives the following equations:

$$\begin{aligned} \text{char}(m \vee \neg m)x &= \text{char}(m \vee \neg m)(m \vee \neg m)y \\ &= \text{true} \circ !^{S \vee \neg S} \circ y \\ &= \text{true} \circ !^1 \\ &= \text{true} \circ !^E \circ (m \vee \neg m)y \\ &= \text{char}(\text{id}_E)\text{id}_E \circ x \\ &= \text{char}(\text{id}_E)x. \end{aligned}$$

Suppose that  $v = !^0$ . Then we have  $x \wedge m \cong 0$ . Since the Heyting algebra  $\text{Sub}_{\mathcal{E}}(E)$  is distributive, we have

$$x = x \wedge (m \vee \neg m) = (x \wedge m) \vee (x \wedge \neg m) \cong x \wedge \neg m.$$

This condition is equivalent to  $x \leq \neg m$ . In particular, we have  $x \leq m \vee \neg m$ . Hence, there exists a morphism  $z : 1 \rightarrow S \vee \neg S$  such that  $x = (m \vee \neg m)z$ . In the same way as in the above, this contradicts to the condition  $\text{char}(m \vee \neg m)x \neq \text{char}(\text{id}_E)x$ . Thus, we obtain  $S \vee \neg S = E$ . The proof is complete.  $\blacksquare$

**Fact 3.1.7.** *Let  $\mathcal{E}$  be a topos which is generated by subobjects of the terminal object 1 in  $\mathcal{E}$ , and moreover has the property that for each object  $E$  in  $\mathcal{E}$ ,  $\text{Sub}_{\mathcal{E}}(E)$  is a complete Boolean algebra. Then  $\mathcal{E}$  satisfies the axiom of choice.  $\square$*

**Proof.** Let  $p : X \rightarrow I$  be an epimorphism in  $\mathcal{E}$ . Put

$$\mathcal{I} := \{n : N \rightarrow I \mid \exists s : N \rightarrow X, \quad ps = n\} \subseteq \text{Sub}_{\mathcal{E}}(I).$$

By assumption,  $\text{Sub}_{\mathcal{E}}(I)$  is a complete lattice. Hence,  $\mathcal{I}$  is an inductive poset. Therefore, we can apply Zorn's lemma and find a maximal subobject  $m : M \rightarrow I$  of  $I$  such that there exists a morphism  $s : M \rightarrow X$  with  $ps = m$ . It is sufficient to prove that  $M = I$ . Indeed, if  $M = I$ , then the subobject  $m : I \rightarrow I$  of  $I$  is isomorphic to the identity  $\text{id}_I$ , and hence,  $m$  is an isomorphism. Thus,  $sm^{-1}$  is a section of  $p$ .

Now, suppose that  $M \neq I$ . Then, since  $\text{Sub}_{\mathcal{E}}(I)$  is Boolean,  $m : M \rightarrow I$  has a unique complement  $\neg m : \neg M \rightarrow I$  which is non-zero. As in the proof of Fact 3.1.6, there exist two different morphisms  $\text{char}(0^{-M})$  and  $\text{char}(\text{id}_{\neg M})$ . Now, since subobjects of 1 generates  $\mathcal{E}$ , there exists a non-zero subobject  $!^V : V \rightarrow 1$  of 1 and a morphism  $t : V \rightarrow \neg M$  such that  $\text{char}(0^{-M})t \neq \text{char}(\text{id}_{\neg M})t$ . Note that  $t$  is a monomorphism. Indeed, since the unique morphism  $!^V : V \rightarrow 1$  is a monomorphism, if  $tf = tg$  for some two morphisms  $f$  and  $g$ , then we have  $!^V f = !^M t f = !^M t g = !^V g$ , hence, we have  $f = g$ . Consider the following pullback diagram:

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{x} & X \\ p' \downarrow & \text{p.b.} & \downarrow p \\ V & \xrightarrow[t]{} \neg M \xrightarrow{\neg m} & I. \end{array}$$

Since the pullback of an epimorphism is also an epimorphism (cf. [2, Proposition IV.7.3]),  $p'$  is also an epimorphism. Hence, by  $V \neq 0$ , we have  $X' \neq 0$ . Now, again since  $\text{Sub}_{\mathcal{E}}(1)$  generates  $\mathcal{E}$ , there exists a non-zero subobject  $!^W : W \rightarrow 1$  of 1 and a monomorphism  $r : W \rightarrow X'$  as is the case for  $\neg M$ . Let  $n'e : W \rightarrow N \rightarrow V$  be the image factorization of the composite  $p'r : X' \rightarrow V$  as in the following diagram:

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{r} X' & \xrightarrow{p'} V \\ & \searrow e & \nearrow n' \\ & N & \end{array}$$

Then we have the following commutative diagram:

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{tn'} & \neg M \\ n := \neg mtn' \searrow & \circlearrowleft & \swarrow \neg m \\ & I & \end{array}$$

Put  $n := \neg m n' : N \rightarrow I$  for short. Then we have  $n \leq \neg m$  in  $\text{Sub}_{\mathcal{E}}(I)$ . This implies that  $m \wedge n \cong 0$  in  $\text{Sub}_{\mathcal{E}}(I)$ . Therefore, the supremum  $m \vee n$  of  $m$  and  $n$  in  $\text{Sub}_{\mathcal{E}}(I)$  is given by their coproduct  $M + N$ , i.e.,  $m \vee n \cong (m, n) : M + N \rightarrow I$ . We claim that  $(m, n) \in \mathcal{I}$  and  $(m, n)$  is strictly greater than  $m$ . To show this, first, we shall prove that  $(m, n) \in \mathcal{I}$ , i.e., there exists a morphism  $l : M + N \rightarrow X$  such that  $pl = (m, n)$ . Note that  $e : W \rightarrow N$  is an epimorphism, by definition. On the other hand, since  $W$  is a subobject of  $1$ ,  $e$  is a monomorphism. Hence,  $e$  is an isomorphism (cf. [2, Proposition IV.2.2]). Now, we have two morphisms  $s : M \rightarrow X$  and  $pxre^{-1} : N \rightarrow X$  as in the following diagram:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & W & & M \\
 & & \downarrow r & & \downarrow s \\
 N & \xrightarrow{e^{-1}} & X' & \xrightarrow{x} & X \circlearrowleft m \\
 & \searrow n' & \downarrow p' & \text{p.b.} & \downarrow p \\
 & & V & \xrightarrow{t} & \neg M \xrightarrow{\neg m} I
 \end{array}$$

By the universal mapping property of  $M + N$ , there exists a morphism  $l : M + N \rightarrow X$  such that  $l\iota_1 = s$  and  $l\iota_2 = xre^{-1}$  as in the following diagram:

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{\iota_1} & M + N \xleftarrow{\iota_2} N \\
 & \searrow s & \downarrow l \\
 & & X, \\
 & & \swarrow xre^{-1}
 \end{array}$$

where  $\iota_1$  and  $\iota_2$  are injections. Then we have

$$pl\iota_1 = ps = m \quad \text{and} \quad pl\iota_2 = pxre^{-1} = \neg mtp're^{-1} = \neg mtn' = n.$$

Hence, we obtain  $pl = (m, n)$ . Next, we shall prove that  $(m, n) : M + N \rightarrow I$  is strictly greater than  $m : M \rightarrow I$ . Since  $W$  is non-zero and  $e : W \rightarrow N$  is an isomorphism,  $n : N \rightarrow I$  is non-zero. Moreover, since  $n \leq \neg m$ , we have  $n \not\leq m$ . Thus, we have  $m < m \vee n \cong (m, n)$ . Consequently, we obtain  $(m, n) \in \mathcal{I}$  and  $m < (m, n)$ . This contradicts to the maximality of  $m \in \mathcal{I}$ . The proof is complete.  $\blacksquare$

**Theorem 3.1.2.** *Let  $\mathbf{P}$  be a partially ordered set and  $\neg\neg$  the dense topology on  $\mathbf{P}$ . Then the Grothendieck topos  $\text{Sh}(\mathbf{P}, \neg\neg)$  of sheaves on the site  $(\mathbf{P}, \neg\neg)$  satisfies the axiom of choice.  $\square$*

**Proof.** We shall prove this theorem by applying Fact 3.1.7. Recall that for each object  $E$  in  $\text{Sh}(\mathbf{P}, \neg\neg)$ ,  $\text{Sub}_{\text{Sh}(\mathbf{P}, \neg\neg)}(E)$  is a complete Boolean algebra (cf. [4, Fact 3.3.11]). Now, it is sufficient to prove that  $\text{Sh}(\mathbf{P}, \neg\neg)$  is generated by subobjects of the terminal object  $1$  of  $\text{Sh}(\mathbf{P}, \neg\neg)$ . Let  $\mathbf{a} : \mathbf{Sets}^{\mathbf{P}^{\text{op}}} \rightarrow \text{Sh}(\mathbf{P}, \neg\neg)$  be the associated sheaf functor. By Fact 3.1.4, the associated sheaves  $\{\mathbf{a}\mathbf{y}(p) \mid p \in \mathbf{P}\}$  of representable presheaves generate  $\text{Sh}(\mathbf{P}, \neg\neg)$ . Note that for any  $p \in \mathbf{P}$ , the unique morphism  $\mathbf{y}(p) \rightarrow 1$  in  $\mathbf{Sets}^{\mathbf{P}^{\text{op}}}$  is a monomorphism. Since  $\mathbf{a}$  is left exact, the unique morphism  $\mathbf{a}\mathbf{y}(p) \rightarrow 1$  is also monomorphism in  $\text{Sh}(\mathbf{P}, \neg\neg)$ , i.e.,  $\mathbf{a}\mathbf{y}(p)$  is a subobject of  $1$  for any  $p \in \mathbf{P}$ . Thus,  $\text{Sh}(\mathbf{P}, \neg\neg)$  is generated by subobjects of  $1$ . The proof is complete.  $\blacksquare$

## 3.2 The Cohen Topos

Let  $\mathbf{N}$  be a natural numbers object for  $\mathbf{Sets}$ . Let  $B$  be a set in  $\mathbf{Sets}$  such that the cardinality of  $B$  is strictly larger than that of  $2^{\mathbf{N}}$  (e.g.,  $B$  is the power set of the power set of  $\mathbf{N}$ , i.e.,  $B = 2^{2^{\mathbf{N}}}$ ).

**Definition 3.2.1 (the Cohen poset).** We shall call a pair  $(F_p, p)$  of a finite subset  $F_p$  of  $B \times \mathbf{N}$  and a function  $p : F_p \rightarrow 2$  a *forcing condition*. For two forcing conditions  $(F_p, p)$  and  $(F_q, q)$ , we define an order  $\leq$  by

$$q \leq p \stackrel{\text{def}}{\iff} F_q \supseteq F_p \quad \text{and} \quad q \upharpoonright_{F_p} = p. \quad (3.2.1)$$

We shall say that  $q$  is an *extension* of  $p$  if  $q \leq p$ . We shall denote a forcing condition  $(F_p, p)$  by  $p$  for short. We shall call the poset  $\mathbf{P}$  of all forcing conditions ordered by  $\leq$  the *Cohen poset*.  $\diamond$

**Definition 3.2.2 (the Cohen topos).** Let  $\neg\neg$  be the dense topology on the Cohen poset  $\mathbf{P}$ . We shall call the category  $\text{Sh}(\mathbf{P}, \neg\neg)$  of sheaves on the site  $(\mathbf{P}, \neg\neg)$  the *Cohen topos*.  $\diamond$

Note that the Cohen topos  $\text{Sh}(\mathbf{P}, \neg\neg)$  coincides with the topos of sheaves for the double negation topology on  $\mathbf{Sets}^{\mathbf{P}^{\text{op}}}$ .

**Definition 3.2.3 (continuum hypothesis (CH)).** A topos  $\mathcal{E}$  with a natural numbers object  $\mathbf{N}$  is said to satisfy *continuum hypothesis* (CH for short) if there exists an object  $K$  in  $\mathcal{E}$  with monomorphisms  $n : \mathbf{N} \rightarrow K$  and  $k : K \rightarrow \Omega^{\mathbf{N}}$ , where  $\Omega$  is a truth valued object of  $\mathcal{E}$ , and there exists no epimorphism from  $\mathbf{N}$  to  $K$  nor exists there epimorphism from  $K$  to  $\Omega^{\mathbf{N}}$ .  $\diamond$

The main theorem is the following:

**Theorem 3.2.1.** *There exists a Boolean topos satisfying the axiom of choice in which the continuum hypothesis fails.*  $\square$

Note that the Cohen topos  $\text{Sh}(\mathbf{P}, \neg\neg)$  has a natural numbers object  $\widehat{\mathbf{N}}$ , since it is a Grothendieck topos. By Theorem 3.1.1 and Theorem 3.1.2, the Cohen topos  $\text{Sh}(\mathbf{P}, \neg\neg)$  is a Boolean topos satisfying the axiom of choice. We shall prove that the Cohen topos  $\text{Sh}(\mathbf{P}, \neg\neg)$  does not satisfy the continuum hypothesis. In the rest of this section and the next section, we shall construct an object  $K$  in  $\text{Sh}(\mathbf{P}, \neg\neg)$  with monomorphisms  $n : \widehat{\mathbf{N}} \rightarrow K$  and  $k : K \rightarrow \Omega_{\neg\neg}^{\widehat{\mathbf{N}}}$ , where  $\Omega_{\neg\neg}$  is a truth valued object of  $\text{Sh}(\mathbf{P}, \neg\neg)$ , and prove that there exists no epimorphism from  $\widehat{\mathbf{N}}$  to  $K$  nor exists there epimorphism from  $K$  to  $\Omega_{\neg\neg}^{\widehat{\mathbf{N}}}$ .

**Lemma 3.2.1.** *Let  $\mathbf{P}$  be the Cohen poset and  $\neg\neg$  the dense topology on  $\mathbf{P}$ . Then for any  $p$  in the Cohen poset  $\mathbf{P}$ , the representable presheaf  $\mathbf{y}(p)$  is a sheaf on the site  $(\mathbf{P}, \neg\neg)$ .*  $\square$



**Proof.** Let  $p, q \in \mathbf{P}$ . Let  $D$  be a sieve on  $q$  such that  $D$  is dense below  $q$ . Recall that  $D$  is said to be dense below  $q$  if  $r \leq q$  for some  $r \in \mathbf{P}$ , then there exists  $d \in D$  such that  $d \leq r$ . Let  $\{x_d\}_{d \in D}$  be a matching family of  $\mathbf{y}(p)$  for  $D$ . Note that  $x_d \in \mathbf{y}(p)(d) = \text{Hom}_{\mathbf{P}}(d, p)$  implies that  $d \leq p$ . To prove that the representable presheaf  $\mathbf{y}(p)$  is a sheaf on the site  $(\mathbf{P}, \neg\neg)$ , we must show that there exists a (necessarily unique) amalgamation of  $\{x_d\}_{d \in D}$ . It amounts to show that  $q \leq p$ . Suppose that  $q \not\leq p$ . By the definition of  $\mathbf{P}$ ,  $q \not\leq p$  implies that there exists a pair  $(b, n) \in F_p \subseteq B \times \mathbf{N}$  such that  $q(b, n) \neq p(b, n)$  or  $(b, n) \notin F_q$ . In both cases, there exists a forcing condition  $q' : F_q \cup \{(b, n)\} \rightarrow 2$  such that  $q' \upharpoonright_{F_q} = q$  and  $q'(b, n) \neq p(b, n)$ . Then we have  $q' \leq q$ . Since  $D$  is dense below  $q$ , there exists  $d \in D$  such that  $d \leq q'$ . Then we have  $d(b, n) = q'(b, n) \neq p(b, n)$ . This implies that  $d \not\leq p$ . On the other hand, recall that  $d \in D$  implies that  $d \leq p$ . This is a contradiction. Therefore, we obtain  $q \leq p$ . The proof is complete.  $\blacksquare$

Let  $\Delta : \mathbf{Sets} \rightarrow \mathbf{Sets}^{\mathbf{P}^{\text{op}}}$  be the constant presheaf functor, i.e., for each set  $S \in \mathbf{Sets}$ ,

- (i)  $\Delta(S)(p) = S \quad (p \in \mathbf{P})$ ;
- (ii)  $\Delta(S)(p \rightarrow q) = \text{id}_S \quad (p \leq q)$ .

**Definition 3.2.4.** We define a subfunctor  $A$  of  $\Delta(B \times \mathbf{N})(\cong \Delta B \times \Delta \mathbf{N})$  as follows:

$$A(p) := \{(b, n) \in B \times \mathbf{N} \mid p(b, n) = 0\} \quad (p \in P). \quad (3.2.2)$$

$\diamond$

Note that if  $q \leq p$ , then  $p(b, n) = 0$  implies that  $q(b, n) = 0$  for any  $(b, n) \in B \times \mathbf{N}$ . Hence, we have  $A(p) \subseteq A(q)$  if  $q \leq p$ . Therefore,  $A$  is indeed a subfunctor of  $\Delta(B \times \mathbf{N})$ .

**Lemma 3.2.2.** *The functor  $A$  is a closed subobject of  $\Delta(B \times \mathbf{N})$  for the double negation topology on  $\mathbf{Sets}^{\mathbf{P}^{\text{op}}}$ , in other words,*

$$\neg\neg A = A \quad \text{in} \quad \text{Sub}_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{P}^{\text{op}}}}(\Delta(B \times \mathbf{N})). \quad (3.2.3)$$

$\square$

**Proof.** The double negation operator satisfies that  $A \leq \neg\neg A$ . Let  $p \in \mathbf{P}$ . It is sufficient to prove that  $(\neg\neg A)(p) \subseteq A(p)$ . Let  $b \in B$  and  $n \in \mathbf{N}$ . We shall show that  $(b, n) \notin A(p)$  implies that  $(b, n) \notin (\neg\neg A)(p)$ . By Lemma 3.1.2, we have the following equivalence:

$$\begin{aligned} (b, n) \in (\neg\neg A)(p) &\Leftrightarrow [\forall q \leq p, \exists r \leq q[(b, n) \in A(r)]] \\ &\Leftrightarrow [\forall q \leq p, \exists r \leq q[r(b, n) = 0]]. \end{aligned}$$

Suppose that  $(b, n) \notin A(p)$ . Then we have two cases:

- (i)  $p(b, n) = 1$ ;
- (ii)  $(b, n) \notin F_p$ .

In the case of (i), for all  $q \leq p$ , we have  $q(b, n) = 1$ . This implies that  $(b, n) \notin (\neg\neg A)(p)$ . In the case of (ii), define an extension  $q \in \mathbf{P}$  of  $p$  as follows:

- (a)  $F_q := F_p \cup \{(b, n)\}$ ;

(b)

$$q(b', n') = \begin{cases} p(b', n') & (b', n') \in F_p \\ 1 & (b', n') = (b, n). \end{cases}$$

Then for all  $r \leq q$ , we have  $r(b, n) = 1$ . Hence,  $(b, n) \notin (\neg\neg A)(p)$ . Therefore, in any case, we have  $(b, n) \notin (\neg\neg A)(p)$ . Thus, we obtain  $(\neg\neg A)(p) \subseteq A(p)$ . The proof is complete.  $\blacksquare$

We shall denote truth value objects of  $\mathbf{Sets}^{\mathbf{P}^{\text{op}}}$  and  $\text{Sh}(\mathbf{P}, \neg\neg)$  by  $\Omega$  and  $\Omega_{\neg\neg}$ , respectively. Recall that  $\Omega_{\neg\neg}$  is defined to be the equalizer of the identity and the Lawvere-Tierney topology  $\neg\neg$  as in the following diagram:

$$\Omega_{\neg\neg} \xrightarrow{e_{\neg\neg}} \Omega \begin{array}{c} \xrightarrow{\neg\neg} \\ \xrightarrow{\text{id}_\Omega} \end{array} \Omega. \quad (3.2.4)$$

Since we have  $\neg\neg \circ \neg\neg = \text{id}$ , the Lawvere-Tierney topology  $\neg\neg$  also equalizes  $\neg\neg$  and  $\text{id}_\Omega$ . Hence, by the universal mapping property of the equalizer  $e_{\neg\neg}$ , there exists a unique morphism  $r : \Omega \rightarrow \Omega_{\neg\neg}$  such that  $e_{\neg\neg} r = \neg\neg$  as in the following diagram:

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{\neg\neg} & \xrightarrow{e_{\neg\neg}} & \Omega \begin{array}{c} \xrightarrow{\neg\neg} \\ \xrightarrow{\text{id}_\Omega} \end{array} \Omega. \\ \uparrow r & \circlearrowleft & \nearrow \neg\neg \\ \Omega & & \end{array}$$

Hence, we have  $(e_{\neg\neg} r) e_{\neg\neg} = \neg\neg \circ e_{\neg\neg} = e_{\neg\neg}$ . Since the equalizer  $e_{\neg\neg}$  is mono, we have  $r e_{\neg\neg} = \text{id}_{\Omega_{\neg\neg}}$ , i.e.,  $r$  is a retraction of  $e_{\neg\neg} : \Omega_{\neg\neg} \rightarrow \Omega$ .

Since  $\neg\neg \circ \text{true} = \text{true}$ , i.e.,  $\text{true}$  equalizes  $\neg\neg$  and  $\text{id}_\Omega$ , and  $e_{\neg\neg}$  is the equalizer of  $\neg\neg$  and  $\text{id}_{\Omega_{\neg\neg}}$ , there exists a unique monomorphism  $\text{true}_{\neg\neg} : 1 \rightarrow \Omega_{\neg\neg}$  such that  $e_{\neg\neg} \circ \text{true}_{\neg\neg} = \text{true}$  as in the following diagram:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\text{true}} & \Omega \begin{array}{c} \xrightarrow{\neg\neg} \\ \xrightarrow{\text{id}_\Omega} \end{array} \Omega. \\ \downarrow \text{true}_{\neg\neg} & \circlearrowleft & \nearrow e_{\neg\neg} \\ \Omega_{\neg\neg} & \xrightarrow{e_{\neg\neg}} & \end{array}$$

Recall that closed subobjects in  $\mathbf{Sets}^{\mathbf{P}^{\text{op}}}$  is classified by the subobject classifier  $\text{true}_{\neg\neg} : 1 \rightarrow \Omega_{\neg\neg}$  in  $\text{Sh}(\mathbf{P}, \neg\neg)$  (cf. [2, Lemma V.2.2]). More precisely, for a closed subobject  $m : A \rightarrow E$  in  $\mathbf{Sets}^{\mathbf{P}^{\text{op}}}$  the classifying morphism for  $m$  is given by  $r \circ \text{char}(m)$  in  $\text{Sh}(\mathbf{P}, \neg\neg)$ . Therefore, by Lemma 3.2.2, the subfunctor  $a : A \rightarrow \Delta(B) \times \Delta(\mathbf{N})$  is classified by the subobject classifier  $\text{true}_{\neg\neg} : 1 \rightarrow \Omega_{\neg\neg}$  as in the following diagram:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{!^A} & 1 \\ \downarrow a & \text{p.b.} & \downarrow \text{true}_{\neg\neg} \\ \Delta(B) \times \Delta(\mathbf{N}) & \xrightarrow{r \circ \text{char}(a)} & \Omega_{\neg\neg}. \end{array} \quad (3.2.5)$$

We shall denote the composite  $r \circ \text{char}(a)$  by  $f : \Delta(B) \times \Delta(\mathbf{N}) \rightarrow \Omega_{\neg\neg}$ , and write  $g : \Delta(B) \rightarrow \Omega_{\neg\neg}^{\Delta(\mathbf{N})}$  for the exponential transpose of  $f$  by  $\Delta(\mathbf{N})$ .

**Lemma 3.2.3.** *The morphism  $g : \Delta(B) \rightarrow \Omega_{\neg\neg}^{\Delta(\mathbf{N})}$  is a monomorphism in  $\mathbf{Sets}^{\mathbf{P}^{\text{op}}}$ .  $\square$*

**Proof.** Let  $p \in \mathbf{P}$ . It is sufficient to prove that  $g_p : (\Delta(B))(p) \rightarrow (\Omega_{\neg\neg}^{\Delta(\mathbf{N})})(p)$  is injective. Note that  $(\Delta(B))(p) = B$ . By the Yoneda lemma, we have the following bijections:

$$(\Omega_{\neg\neg}^{\Delta(\mathbf{N})})(p) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{P}^{\text{op}}}}(\mathbf{y}(p), \Omega_{\neg\neg}^{\Delta(\mathbf{N})}) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{P}^{\text{op}}}}(\mathbf{y}(p) \times \Delta(\mathbf{N}), \Omega_{\neg\neg}).$$

Hence, for each  $b \in B$ ,  $g_p(b)$  can be identified with the natural transformation

$$g_p(b) : \mathbf{y}(p) \times \Delta(\mathbf{N}) \rightarrow \Omega_{\neg\neg}$$

given, for each  $q \leq p$  and  $n \in \Delta(\mathbf{N})(q) = \mathbf{N}$ , by

$$g_p(b)(q, n) = \{r \in \mathbf{P} \mid r \leq q, \quad r(b, n) = 0\}.$$

To prove that  $g_p$  is injective, suppose that there exist two elements  $b$  and  $c$  of  $B$  with  $b \neq c$ . Since  $F_p \subseteq B \times \mathbf{N}$  is finite, there exists  $n_0 \in \mathbf{N}$  such that  $(b, n_0), (c, n_0) \notin F_p$ . Now, define an extension  $r \in \mathbf{P}$  of  $p$  as follows:

(i)  $F_r := F_p \cup \{(b, n_0), (c, n_0)\};$

(ii)

$$r(d, n) = \begin{cases} p(d, n) & (b, n) \in F_p \\ 0 & (d, n) = (b, n_0) \\ 1 & (d, n) = (c, n_0). \end{cases} \quad (3.2.6)$$

Then we have  $r \in g_p(b)(p, n_0)$  and  $r \notin g_p(b)(p, n_0)$ . This implies that  $g_p(b) \neq g_p(c)$ . Thus,  $g_p$  is injective. The proof is complete.  $\blacksquare$

Let  $\mathbf{a}$  be the associated sheaf functor for the inclusion  $i : \text{Sh}(\mathbf{P}, \neg\neg) \hookrightarrow \mathbf{Sets}^{\mathbf{P}^{\text{op}}}$ :

$$\mathbf{Sets}^{\mathbf{P}^{\text{op}}} \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathbf{a}} \\ \xleftarrow{i} \\ \xrightarrow{\perp} \end{array} \text{Sh}(\mathbf{P}, \neg\neg).$$

**Corollary 3.2.1.** *There exists a monomorphism*

$$m : \mathbf{a}(\Delta(B)) \hookrightarrow \Omega_{\neg\neg}^{\mathbf{a}(\Delta(\mathbf{N}))} \quad (3.2.7)$$

in the Cohen topos  $\text{Sh}(\mathbf{P}, \neg\neg)$ .  $\square$

**Proof.** Let  $m := \mathbf{a}(g) : \mathbf{a}(\Delta(B)) \rightarrow \mathbf{a}(\Omega_{\neg\neg}^{\Delta(\mathbf{N})})$ . By Lemma 3.2.3,  $g$  is a monomorphism, and since the associated sheaf functor  $\mathbf{a}$  is left exact,  $m$  is also a monomorphism. Hence, it is sufficient to show that  $\mathbf{a}(\Omega_{\neg\neg}^{\Delta(\mathbf{N})})$  and  $\Omega_{\neg\neg}^{\mathbf{a}(\Delta(\mathbf{N}))}$  are isomorphic. Let  $X$  be an object in  $\mathbf{Sets}^{\mathbf{P}^{\text{op}}}$ . Then we have the following natural bijections:

$$\begin{aligned} & \text{Hom}_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{P}^{\text{op}}}}(X, \Omega_{\neg\neg}^{\Delta(\mathbf{N})}) \\ & \cong \text{Hom}_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{P}^{\text{op}}}}(\Delta(\mathbf{N}) \times X, \Omega_{\neg\neg}) \quad (\because \Delta(\mathbf{N}) \times (-) \dashv (-)^{\Delta(\mathbf{N})}) \\ & \cong \text{Hom}_{\text{Sh}(\mathbf{P}, \neg\neg)}(\mathbf{a}(\Delta(\mathbf{N}) \times X), \Omega_{\neg\neg}) \quad (\because \Omega_{\neg\neg} \in \text{Sh}(\mathbf{P}, \neg\neg) \text{ and } \mathbf{a} \dashv i) \\ & \cong \text{Hom}_{\text{Sh}(\mathbf{P}, \neg\neg)}(\mathbf{a}(\Delta(\mathbf{N})) \times \mathbf{a}(X), \Omega_{\neg\neg}) \quad (\because \mathbf{a} \text{ is left exact}) \\ & \cong \text{Hom}_{\text{Sh}(\mathbf{P}, \neg\neg)}(\mathbf{a}(X), \Omega_{\neg\neg}^{\mathbf{a}(\Delta(\mathbf{N}))}) \quad (\because \mathbf{a}(\Delta(\mathbf{N})) \times (-) \dashv (-)^{\mathbf{a}(\Delta(\mathbf{N}))}) \\ & \cong \text{Hom}_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{P}^{\text{op}}}}(X, \Omega_{\neg\neg}^{\mathbf{a}(\Delta(\mathbf{N}))}) \quad (\because \Omega_{\neg\neg}^{\mathbf{a}(\Delta(\mathbf{N}))} \in \text{Sh}(\mathbf{P}, \neg\neg) \text{ and } \mathbf{a} \dashv i). \end{aligned}$$

Now, take  $X = \mathbf{y}(p)$  ( $p \in \mathbf{P}$ ). Then by the Yoneda lemma, we have the following natural bijection:

$$\Omega_{\neg\neg}^{\Delta(\mathbf{N})}(p) \cong \Omega_{\neg\neg}^{\mathbf{a}(\Delta(\mathbf{N}))}(p) \quad (p \in \mathbf{P}).$$

Hence, there exists a natural isomorphism between  $\Omega_{\neg\neg}^{\Delta(\mathbf{N})}$  and  $\Omega_{\neg\neg}^{\mathbf{a}(\Delta(\mathbf{N}))}$ . Therefore,  $\Omega_{\neg\neg}^{\Delta(\mathbf{N})}$  and  $\Omega_{\neg\neg}^{\mathbf{a}(\Delta(\mathbf{N}))}$  are isomorphic. Since  $\Omega_{\neg\neg}^{\Delta(\mathbf{N})}$  is a sheaf for  $\neg\neg$ , we have  $\mathbf{a}(\Omega_{\neg\neg}^{\Delta(\mathbf{N})}) = \mathbf{a}i(\Omega_{\neg\neg}^{\Delta(\mathbf{N})}) \cong \Omega_{\neg\neg}^{\Delta(\mathbf{N})}$ . Thus,  $\mathbf{a}(\Omega_{\neg\neg}^{\Delta(\mathbf{N})})$  and  $\Omega_{\neg\neg}^{\mathbf{a}(\Delta(\mathbf{N}))}$  are isomorphic. The proof is complete.  $\blacksquare$

### 3.3 The Preservation of Cardinal Inequalities

Throughout this section, let  $\mathcal{E}$  be a topos,  $\text{true} : 1 \rightarrow \Omega$  a subobject classifier for  $\mathcal{E}$ ,  $X$  and  $Y$  two objects in  $\mathcal{E}$ .

**Definition 3.3.1.** For an object  $E$  in  $\mathcal{E}$ , we define a mapping

$$\text{im}_E : \text{Hom}_{\mathcal{E}}(E, Y^X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{E}}(E, \Omega^Y) \quad (3.3.1)$$

as follows. For a morphism  $f : E \rightarrow Y^X$  in  $\mathcal{E}$ , we shall denote the exponential transpose of  $f$  by  $\check{f} : E \times X \rightarrow Y$ . Let  $me : E \times X \rightarrow \text{Im}_E(f) \rightarrow E \times Y$  be the image factorization of the morphism  $\langle \pi_1, \check{f} \rangle : E \times X \rightarrow E \times Y$  as in the following diagram:

$$\begin{array}{ccc} E \times X & \xrightarrow{\langle \pi_1, \check{f} \rangle} & E \times Y \\ & \searrow e & \swarrow m \\ & \text{Im}_E(f) & \end{array} \quad (3.3.2)$$

where  $\pi_1 : E \times X \rightarrow E$  is the projection. We define a morphism  $\text{im}_E(f) : E \rightarrow \Omega^Y$  to be the exponential transpose of the classifying morphism  $\text{char}(m) : E \times Y \rightarrow \Omega$  for  $m$ , as in the following:

$$\begin{array}{ccc} \text{Im}_E(f) & \xrightarrow{\text{!Im}_E(f)} & 1 \\ m \downarrow & \text{p.b.} & \downarrow \text{true} \\ E \times Y & \xrightarrow{\text{char}(m)} & \Omega, \end{array} \quad \begin{array}{ccc} E \times Y & & \\ \text{im}_E(f) \times \text{id}_Y \downarrow & \searrow \text{char}(m) & \\ \Omega^Y \times Y & \xrightarrow{\text{ev}_{\Omega, Y}} & \Omega, \end{array} \quad (3.3.3)$$

$$\text{im}_E(f) = \text{char}^{\check{}}(m). \quad (3.3.4)$$

$\diamond$

**Lemma 3.3.1.** *The mapping  $\text{im}_E$  is natural in  $E$ .*  $\square$

**Proof.** Let  $\alpha : E' \rightarrow E$  be a morphism in  $\mathcal{E}$ . We must prove that for any morphism  $f : E \rightarrow Y^X$ , the equation  $\text{im}_{E'}(f\alpha) = \text{im}_E \circ \alpha$  holds. Let  $me : E \times X \rightarrow \text{Im}_E(f) \rightarrow E \times Y$  and  $m'e' : E' \times X \rightarrow \text{Im}_{E'}(f) \rightarrow E' \times Y$  be the image factorizations of the morphisms  $\langle \pi_1, \check{f} \rangle : E \times X \rightarrow E \times Y$  and  $\langle \pi'_1, \check{f}\alpha \rangle : E' \times X \rightarrow E' \times Y$ , respectively. Note that we

have  $(\check{f}\alpha) = \check{f}(\alpha \times \text{id}_Y)$ . Hence, the following outer rectangle is commutative:

$$\begin{array}{ccc}
 E' \times X & \xrightarrow{\langle \pi'_1, (\check{f}\alpha) \rangle} & E' \times Y \\
 \downarrow \alpha \times \text{id}_X & \searrow e' & \nearrow m' \\
 & \text{im}_{E'}(f\alpha) & \\
 & \downarrow \check{\eta} & \\
 E \times X & \xrightarrow{\langle \pi_1, \check{f} \rangle} & E \times Y \\
 \downarrow \alpha \times \text{id}_Y & \searrow e & \nearrow m \\
 & \text{Im}_E(f) & 
 \end{array} \tag{3.3.5}$$

Then there exists a unique morphism  $s : \text{im}_{E'}(f\alpha) \rightarrow \text{Im}_E(\alpha)$  making the above diagram commutative (cf. [2, Proposition IV.6.2]). Moreover, we claim that the above outer rectangle is a pullback diagram. In fact, if there exists two morphisms  $h : A \rightarrow E' \times Y$  and  $k : A \rightarrow E \times X$  such that  $(\alpha \times \text{id}_Y)h = \langle \pi_1, \check{f} \rangle k$ , then one can prove that  $l := \langle \tilde{\pi}'_1 h, \pi_2 k \rangle : A \rightarrow E' \times X$  is the unique morphism such that  $h = \langle \pi'_1, (\check{f}\alpha) \rangle l$  and  $k = (\alpha \times \text{id}_X)l$ , where  $\tilde{\pi}'_1 : E' \times Y \rightarrow E'$  and  $\pi_2 : E \times X \rightarrow X$  are projections. Since image factorizations are stable under pullbacks in a topos [5, Fact.3.0.10],  $\text{im}_{E'}(f\alpha)$  is the pullback of  $\text{Im}_E(f)$  along  $\alpha \times \text{id}_Y$ , i.e.,  $m' \cong (\alpha \times \text{id}_Y)^{-1}(m)$ . Thus, we have

$$\text{char}(m') = \text{char}((\alpha \times \text{id}_Y)^{-1}(m)) = \text{char}(m) \circ (\alpha \times \text{id}_Y).$$

By taking the exponential transpose of each side of the above equation, we obtain

$$\text{im}_{E'}(f\alpha) = \text{char}(\check{m}') = (\text{char}(m) \circ \check{(\alpha \times \text{id}_Y)}) = \text{char}(\check{m}) \circ \alpha = \text{im}_E(f) \circ \alpha.$$

The proof is complete.  $\blacksquare$

By virtue of Lemma 3.3.1, the mappings  $(\text{im}_E)_{E \in \mathcal{E}}$  give a natural transformation:

$$(\text{im}_E)_{E \in \mathcal{E}} : \mathbf{y}(Y^X) \rightarrow \mathbf{y}(\Omega^Y).$$

On the other hand, by the Yoneda lemma, we have the following bijection:

$$\text{Hom}_{\mathbf{Sets}^{\mathcal{E} \circ \text{op}}}(\mathbf{y}(Y^X), \mathbf{y}(\Omega^Y)) \cong \mathbf{y}(\Omega^Y)(Y^X) = \text{Hom}_{\mathcal{E}}(Y^X, \Omega^Y).$$

Therefore, there exists a unique morphism

$$\text{im} : Y^X \rightarrow \Omega^Y \tag{3.3.6}$$

such that the corresponding natural transformation gives  $\text{im}_E$  for each object  $E$  in  $\mathcal{E}$ , i.e.,  $\text{im} = \text{im}_{Y^X}(\text{id}_{Y^X})$ .

**Definition 3.3.2.** Let  $t_Y : 1 \rightarrow \Omega^Y$  be the exponential transpose of the composite

$$1 \times Y \xrightarrow{!^{1 \times Y}} 1 \xrightarrow{\text{true}} \Omega.$$

We define the *object of epimorphisms*  $\text{Epi}(X, Y)$  from  $X$  to  $Y$  as the pullback of  $t_Y$  along the morphism  $\text{im}$  as in the following diagram:

$$\begin{array}{ccc} \text{Epi}(X, Y) & \xrightarrow{!^{\text{Epi}(X, Y)}} & 1 \\ m_Y^X \downarrow & \text{p. b.} & \downarrow t_Y \\ Y^X & \xrightarrow{\text{im}} & \Omega^Y. \end{array} \quad (3.3.7) \quad \diamond$$

$\text{Epi}(X, Y)$  “classifies” parametrized epimorphisms in the following sense:

**Lemma 3.3.2.** *For any object  $E$  in  $\mathcal{E}$ , a morphism  $f : E \rightarrow Y^X$  factors through the subobject  $\text{Epi}(X, Y) \rightarrow Y^X$  iff  $\langle \pi_1, \check{f} \rangle : E \times X \rightarrow E \times Y$  is an epimorphism in  $\mathcal{E}$ .  $\square$*

**Proof.** Let  $f : E \rightarrow Y^X$  be a morphism in  $\mathcal{E}$ . Recall that  $\text{im} = \text{im}_{Y^X}(\text{id}_{Y^X})$  and  $(\text{im}_E)_{E \in \mathcal{E}}$  is a natural transformation. Hence, we have  $\text{im} \circ f = \text{im}_E(f)$ . Then, by the definition of  $\text{Epi}(X, Y)$ ,  $f$  factors through  $\text{Epi}(X, Y)$  iff

$$\text{im}_E(f) = t_Y \circ !^E.$$

Since  $t_Y$  is the transpose of  $\text{true} \circ !^{1 \times Y}$ , we have the following commutative diagram:

$$\begin{array}{ccc} E \times Y & & \\ !^E \times \text{id}_Y \downarrow & \searrow \text{true} \circ !^{E \times Y} & \\ 1 \times Y & \circlearrowleft & \Omega \\ t_Y \times \text{id}_Y \downarrow & \searrow \text{true} \circ !^{1 \times Y} & \\ \Omega^Y \times Y & \xrightarrow{\text{ev}_{\Omega, Y}} & \Omega. \end{array}$$

Then, by taking exponential transpose of each side of the above equation, we obtain

$$\text{char}(m) = \text{true} \circ !^{E \times Y}.$$

This condition is equivalent to that  $m : \text{Im}_E(f) \rightarrow E \times Y$  is an isomorphism, i.e.,  $\langle \pi_1, \check{f} \rangle : E \times X \rightarrow E \times Y$  is an epimorphism. From the above,  $f$  factors through  $\text{Epi}(X, Y)$  iff  $\langle \pi_1, \check{f} \rangle : E \times X \rightarrow E \times Y$  is an epimorphism. The proof is complete.  $\blacksquare$

**Corollary 3.3.1.** *In a non-degenerate topos  $\mathcal{E}$ ,  $\text{Epi}(X, Y) \cong 0$  implies that there exists no epimorphism from  $X$  to  $Y$ .  $\square$*

**Proof.** We shall prove by contradiction. To this end, suppose that there exists an epimorphism  $g : X \rightarrow Y$  in  $\mathcal{E}$ . Since we have the canonical isomorphism  $X \cong X \times 1$ , there exists a morphism  $f : 1 \rightarrow Y^X$  such that its exponential transpose  $\check{f}$  is  $g$ . Then, by Lemma 3.3.2 with  $E = 1$ ,  $f$  factors through  $\text{Epi}(X, Y)$  by some morphism  $l : 1 \rightarrow \text{Epi}(X, Y)$ . By assumption, we have  $\text{Epi}(X, Y) \cong 0$ . However, any morphism in a topos to the initial object  $0$  is an isomorphism (cf. [2, Proposition IV.7.4]). Therefore, we have  $0 \cong 1$ . This contradicts to the non-degeneracy of  $\mathcal{E}$ . The proof is complete.  $\blacksquare$

**Lemma 3.3.3.** *Let  $p : Y \rightarrow Z$  be an epimorphism in  $\mathcal{E}$ . Then there exists a morphism from  $\text{Epi}(X, Y)$  to  $\text{Epi}(X, Z)$ .  $\square$*

**Proof.** Consider the subobject  $m_Y^X : \text{Epi}(X, Y) \hookrightarrow Y^X$  of  $Y^X$  as in (3.3.7). Clearly,  $m_Y^X$  factors through  $\text{Epi}(X, Y)$ . Then, by Lemma 3.3.2,  $\langle \pi_1, m_Y^X \rangle : \text{Epi}(X, Y) \times X \rightarrow \text{Epi}(X, Y) \times Y$  is an epimorphism. Consider the composite  $p^X \circ m_Y^X : \text{Epi}(X, Y) \rightarrow Z^X$ , where  $p^X : Y^X \rightarrow Z^X$  is the exponentiation of  $p$  by  $X$ . Note that if  $p^X \circ m_Y^X$  factors through  $\text{Epi}(X, Z)$ , then there exists a morphism from  $\text{Epi}(X, Y)$  to  $\text{Epi}(X, Z)$ . On the other hand, again by Lemma 3.3.2,  $p^X \circ m_Y^X$  factors through  $\text{Epi}(X, Z)$  iff  $\langle \pi'_1, (p^X \circ m_Y^X) \rangle : \text{Epi}(X, Y) \times X \rightarrow \text{Epi}(X, Y) \times Z$  is an epimorphism. We claim that

$$\langle \pi'_1, (p^X \circ m_Y^X) \rangle = (\text{id}_E \times p) \circ \langle \pi_1, m_Y^X \rangle.$$

Note that, by the naturality and the universal mapping property of exponentiations, we have  $(p^X \circ m_Y^X) = p \circ m_Y^X$ . To see this, consider the following commutative diagram:

$$\begin{array}{ccc} \text{Epi}(X, Y) \times X & & \\ m_Y^X \times \text{id}_X \downarrow & \searrow^{(p^X \circ m_Y^X)} & \\ Y^X \times Y & & \\ p^X \times \text{id}_X \downarrow & \circlearrowleft & \\ Z^X \times X & \xrightarrow{\text{ev}_{Z, X}} & Z. \end{array}$$

By the naturality of the evaluation, we also have the following commutative diagram:

$$\begin{array}{ccc} \text{Epi}(X, Y) \times X & & \\ m_Y^X \times \text{id}_X \downarrow & \searrow^{m_Y^X} & \\ Y^X \times X & \xrightarrow{\text{ev}_{Y, X}} & Y \\ p^X \times \text{id}_X \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow p \\ Z^X \times X & \xrightarrow{\text{ev}_{Z, X}} & Z. \end{array}$$

By the universal mapping property of the exponentiation by  $X$ , we have  $(p^X \circ m_Y^X) = p \circ m_Y^X$ . Therefore, we have  $\langle \pi'_1, (p^X \circ m_Y^X) \rangle = (\text{id}_E \times p) \circ \langle \pi_1, m_Y^X \rangle$ . Since  $\text{id}_E$  and  $p$  are epimorphisms, so is their cartesian product  $\text{id}_E \times p$  (cf. [2, Proposition IV.7.7]). From the above,  $\langle \pi'_1, (p^X \circ m_Y^X) \rangle$  is also an epimorphism. The proof is complete. ■

**Lemma 3.3.4.** *Let  $\mathcal{E}$  be Boolean,  $m : Z \rightarrow Y$  a monomorphism and  $z : 1 \rightarrow Z$  a global section of  $Z$ . If  $\text{Epi}(X, Z) \cong 0$ , then  $\text{Epi}(X, Y) \cong 0$ . □*

**Proof.** Since  $\mathcal{E}$  is Boolean, we have  $Y \cong Z + \neg Z$ , where  $\neg Z$  is the complement of  $Z$  in  $\text{Sub}_{\mathcal{E}}(Y)$ . By the universal mapping property of the coproduct  $Z + \neg Z$ , for the identity  $\text{id}_Z : Z \rightarrow Z$  and  $z \circ !^{-Z} : \neg Z \rightarrow 1 \rightarrow Z$ , there exists a morphism  $r : Y \rightarrow Z$  such that  $rm = \text{id}_Z$  as in the following diagram:

$$\begin{array}{ccccc} Z & \xrightarrow{m} & Z + \neg Z & \xleftarrow{\neg m} & \neg Z \\ & \searrow & \circlearrowleft & \circlearrowleft & \swarrow \\ & \text{id}_Z & \downarrow r & & z \circ !^{-Z} \\ & & Z & & \end{array}$$

Then  $r$  is an epimorphism. By Lemma 3.3.3, the epimorphism  $r$  induces a morphism  $q : \text{Epi}(X, Y) \rightarrow \text{Epi}(X, Z)$ . If  $\text{Epi}(X, Z) \cong 0$ , then  $q$  is an isomorphism (cf. [2, Proposition IV.7.4]). Thus, we obtain  $\text{Epi}(X, Y) \cong 0$ . The proof is complete.  $\blacksquare$

**Definition 3.3.3.** We shall say that an object  $X$  in  $\mathcal{E}$  has the *Souslin property* if any family  $\mathcal{A}$  of non-zero subobjects of  $X$  which are pairwise disjoint, i.e., for  $u : U \rightarrow X$  and  $v : V \rightarrow X$  in  $\mathcal{A}$ ,

$$u \wedge v \cong 0 \quad \text{in } \text{Sub}_{\mathcal{E}}(X) \quad \text{whenever } u \neq v, \quad (3.3.8)$$

is at most countable. A Grothendieck topos  $\mathcal{E}$  is said to have *Souslin property* if it is generated by a family of objects having the Souslin property.  $\diamond$

Let  $\text{Sh}(\mathbf{C}, J)$  be a Grothendieck topos on a site  $(\mathbf{C}, J)$  and  $\mathbf{a} : \mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\text{op}}} \rightarrow \text{Sh}(\mathbf{C}, J)$  the associated sheaf functor for the inclusion  $i : \text{Sh}(\mathbf{C}, J) \hookrightarrow \mathbf{Sets}^{\mathbf{C}, J^{\text{op}}}$ . Let  $\Delta$  and  $\Gamma$  be the constant presheaf functor and the global sections functor, respectively as in the proof of Fact 3.1.2. We shall denote the composite  $\mathbf{a}\Delta : \mathbf{Sets} \rightarrow \text{Sh}(\mathbf{C}, J)$  by  $\widehat{\cdot} : S \mapsto \widehat{S}$ . Note that the functor  $\widehat{\cdot}$  is left exact.

**Fact 3.3.1.** *Let  $\text{Sh}(\mathbf{C}, J)$  be a Grothendieck topos on a site  $(\mathbf{C}, J)$  having the Souslin property. Let  $S$  and  $T$  be two infinite sets in  $\mathbf{Sets}$ . Then  $\text{Epi}(S, T) \cong 0$  in  $\mathbf{Sets}$  implies that  $\text{Epi}(\widehat{S}, \widehat{T}) \cong 0$  in  $\text{Sh}(\mathbf{C}, J)$ .*  $\square$

**Proof.** Let  $S$  and  $T$  be two infinite sets in  $\mathbf{Sets}$  such that  $\text{Epi}(S, T) \cong 0$ . Then, by Corollary 3.3.1, there exists no epimorphism from  $S$  to  $T$ . We claim that  $\text{Epi}(\widehat{S}, \widehat{T}) \cong 0$ . Suppose to the contrary, i.e.,  $\text{Epi}(\widehat{S}, \widehat{T}) \not\cong 0$ . This implies that  $\text{Epi}(\widehat{S}, \widehat{T})$  has at least two subobjects, namely,  $\text{Epi}(\widehat{S}, \widehat{T})^0$  and  $\text{id}_{\text{Epi}(\widehat{S}, \widehat{T})}$ . By the assumption that  $\text{Sh}(\mathbf{C}, J)$  has the Souslin property, there exists a non-zero object  $X$  in  $\text{Sh}(\mathbf{C}, J)$  with the Souslin property and for which there exists a morphism  $f : X \rightarrow \text{Epi}(\widehat{S}, \widehat{T}) \rightarrow \widehat{T}^{\widehat{S}}$ . By Lemma 3.3.2, the following morphism  $g$  is an epimorphism:

$$g := \langle \pi_1, \check{f} \rangle : X \times \widehat{S} \rightarrow X \times \widehat{T}.$$

Since the functor  $\widehat{\cdot}$  is left exact, for any two elements  $s : 1 \rightarrow S$  and  $t : 1 \rightarrow T$ , we have the corresponding global sections  $\widehat{s} : 1 \rightarrow \widehat{S}$  and  $\widehat{t} : 1 \rightarrow \widehat{T}$  in  $\text{Sh}(\mathbf{C}, J)$ . Consider the following pullback diagram in  $\text{Sh}(\mathbf{C}, J)$ :

$$\begin{array}{ccccc} U_{s,t} & \xrightarrow{\quad} & P_t & \xrightarrow{h} & X \times 1 \\ \downarrow & \text{p.b.} & \downarrow & \text{p.b.} & \downarrow \text{id}_X \times \widehat{t} \\ X \times 1 & \xrightarrow{\quad} & X \times \widehat{S} & \xrightarrow{g} & X \times \widehat{T}. \end{array} \quad (3.3.9)$$

Put

$$W := \{(s, t) \in S \times T \mid U_{s,t} \not\cong 0\}.$$

We claim that for any  $t \in T$ , there exists at least one  $s \in S$  such that  $(s, t) \in W$ . To show this, first, note that  $S \cong \coprod_{s \in S} \{*\}$  in  $\mathbf{Sets}$ . Since the functor  $\widehat{\cdot}$  is left exact,



we have  $\widehat{S} \cong \coprod_{s \in S} 1$ , where  $1$  is the terminal object of  $\text{Sh}(\mathbf{C}, J)$ . Since the product functor  $X \times (-)$  is a left adjoint, it preserves coproduct. Hence, we have

$$\coprod_{s \in S} (X \times 1) \cong X \times \widehat{S}.$$

Since pulling back along  $P_t \rightarrow X \times \widehat{S}$  preserves coproducts (cf. [2, Theorem IV.7.2]), by (3.3.9), we obtain

$$\coprod_{s \in S} U_{s,t} \cong P_t.$$

Moreover, the pullback  $h$  of the epimorphism  $g$  is also an epimorphism (cf. [2, Proposition IV.7.3]), and since  $X$  is non-zero,  $P_t$  is also non-zero. Since we have  $P_t \cong \coprod_{s \in S} U_{s,t}$ , there exists  $s \in S$  such that  $U_{s,t} \not\cong 0$ . Therefore, for each  $t \in T$ , there exists at least one  $s \in S$  such that  $U_{s,t} \not\cong 0$ , as claimed above. In other words, we have a surjection  $\pi_2 : W \rightarrow T$  of sets.

Next, we claim that  $U_{s,t} \wedge U_{s,t'} \cong 0$  in  $\text{Sub}_{\text{Sh}(\mathbf{C}, J)}(X \times 1)$  ( $s \in S$ ,  $t, t' \in T$  with  $t \neq t'$ ). Let  $s \in S$ , and  $t, t' \in T$  with  $t \neq t'$ . Then  $t : 1 \rightarrow T$  and  $t' : 1 \rightarrow T$  are disjoint in  $\text{Sub}_{\text{Sets}}(T)$ :

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{!^0} & 1 \\ \downarrow !^0 & \text{p.b.} & \downarrow t' \\ 1 & \xrightarrow{t} & T. \end{array}$$

Note that both the functor  $\widehat{\phantom{x}}$  and  $X \times (-)$  preserves pullbacks and colimits, in particular, the initial object. Hence, the subobjects  $\text{id}_X \times \widehat{t} : X \times 1 \rightarrow X \times \widehat{T}$  and  $\text{id}_X \times \widehat{t'} : X \times 1 \rightarrow X \times \widehat{T}$  are disjoint in  $\text{Sub}_{\text{Sh}(\mathbf{C}, J)}(X \times \widehat{T})$ . Therefore, their pullbacks  $U_{s,t}$  and  $U_{s,t'}$  are also disjoint in  $\text{Sub}_{\text{Sh}(\mathbf{C}, J)}(X \times 1)$ .

Now, we shall complete the proof. Since  $X$  has the Souslin property, for each  $s \in S$ , the set  $W_s := \{t \in T \mid (s, t) \in W\}$  is at most countable. Since  $S$  is infinite, the cardinality of the set  $W = \bigcup_{s \in S} W_s$  equals that of  $S$ . Hence, there exists a bijection  $i : S \rightarrow W$ . Therefore, we obtain a surjection  $\pi_2 i : S \rightarrow T$ . This contradicts to the assumption that  $\text{Epi}(S, T) \cong 0$ . The proof is complete.  $\blacksquare$

We shall prove that the Cohen topos  $\text{Sh}(\mathbf{P}, \neg\neg)$  has the Souslin property. To this end, we use a special combinatorial property of the Cohen poset  $\mathbf{P}$ .

**Definition 3.3.4.** Let  $\mathbf{P}$  be a poset. For two elements  $p, q \in \mathbf{P}$ , we shall say that  $p$  and  $q$  are *incompatible* if there exists no element  $r \in \mathbf{P}$  such that  $r \leq p$  and  $r \leq q$ . A subset  $A$  of  $\mathbf{P}$  is said to be *incompatible* if for any different elements  $p, q \in A$ ,  $p$  and  $q$  are incompatible. Finally,  $\mathbf{P}$  is said to satisfy the *countable chain condition* (CCC for short) if any incompatible subset  $A$  of  $\mathbf{P}$  is countable, i.e.,  $|A| \leq \aleph_0$ .  $\diamond$

**Lemma 3.3.5.** *The Cohen poset  $\mathbf{P}$  satisfies the countable chain condition.*  $\square$

**Proof.** For an incompatible subset  $A$  of  $\mathbf{P}$  and each  $n \in \mathbf{N}$  ( $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ ), we define a subset  $A_n$  of  $A$  as follows:

$$A_n := \{p \in A \mid |F_p| = n\}.$$

Then we have  $A = \sqcup_{n \in \mathbf{N}} A_n$  (Note that  $|F_p|$  is finite for any  $p \in \mathbf{P}$ ). It is sufficient to prove that  $|A_n| \leq \aleph_0$  for any  $n \in \mathbf{N}$  and any incompatible subset  $A$  of  $\mathbf{P}$ . We shall show this by induction.

For  $n = 0$ , there exists exactly one forcing condition on the empty-set. Suppose that we have proved that any incompatible subset of  $\mathbf{P}$  whose each forcing condition defined on exactly  $n - 1$  elements is countable. Let  $A$  be an incompatible subset of  $\mathbf{P}$ . For each  $m \in \mathbf{N}$ , put

$$A_{n,m} := \{p \in A_n \mid \exists b \in B, (b, m) \in F_p\}.$$

Then we have  $A_n = \sqcup_{m \in \mathbf{N}} A_{n,m}$ . It is sufficient to prove that  $|A_{n,m}| \leq \aleph_0$  for each  $m \in \mathbf{N}$ . Now, for each  $p \in A_{n,m}$ , choose  $b_p \in B$  such that  $(b_p, m) \in F_p$ . For each  $m \in \mathbf{N}$ , put

$$A_{n,m,i} := \{p \in A_n \mid p(b_p, m) = i\} \quad (i = 0, 1).$$

Let  $m \in \mathbf{N}$ . Put

$$R_{n,m,i} := \{p \upharpoonright_{F_p \setminus \{(b_p, m)\}} \mid p \in A_{n,m,i}\} \quad (i = 0, 1).$$

We claim that  $|A_{n,m,i}| \leq |R_{n,m,i}|$  ( $i = 0, 1$ ). To show this, let  $p, q \in A_{n,m,i}$  with  $p \upharpoonright_{F_p \setminus \{(b_p, m)\}} = q \upharpoonright_{F_q \setminus \{(b_q, m)\}}$ . Suppose that  $p \neq q$ . Since  $p, q \in A_{n,m,i}$ , we have  $p(b_p, m) = i = q(b_q, m)$ . Hence, we have  $(b_p, m) \neq (b_q, m)$ , since  $p \neq q$ . Define  $r \in \mathbf{P}$  as follows:

- (i)  $F_r := F_p \cup F_q$ ;
- (ii)  $r(b, m) = p(b, m)$  for  $(b, m) \in F_p$  and  $r(b, m) = q(b, m)$  for  $(b, m) \in F_q$ .

Note that  $r$  is well-defined, since  $p \upharpoonright_{F_p \setminus \{(b_p, m)\}} = q \upharpoonright_{F_q \setminus \{(b_q, m)\}}$ . Then we have  $r \leq p$  and  $r \leq q$ . This contradicts to the condition that  $A$  is incompatible. Hence, we have  $p = q$ . Therefore, we obtain  $|A_{n,m,i}| \leq |R_{n,m,i}|$ . Note that since  $A_{n,m,i}$  ( $i = 0, 1$ ) are incompatible subsets of  $\mathbf{P}$ , so are the sets  $R_{n,m,i}$  ( $i = 0, 1$ ) of their restrictions. By induction hypothesis, we have  $|R_{n,m,i}| \leq \aleph_0$  for each  $i = 0, 1$ . This implies that  $|A_{n,m,i}| \leq \aleph_0$  for each  $i = 0, 1$ . Note that  $A_{n,m} = A_{n,m,0} \sqcup A_{n,m,1}$ . Thus, we have  $|A_{n,m}| \leq \aleph_0$ . The proof is complete.  $\blacksquare$

**Lemma 3.3.6.** *The Cohen topos  $\text{Sh}(\mathbf{P}, \neg)$  has the Souslin property.*  $\square$

**Proof.** By Fact 3.1.4 and Lemma 3.2.1, the set  $\{\mathbf{y}(p) \mid p \in \mathbf{P}\}$  generates  $\text{Sh}(\mathbf{P}, \neg)$ . Since  $\mathbf{y}(p)(q) \subseteq \{*\}$  for any  $p, q \in \mathbf{P}$ , we have  $\{\mathbf{y}(p) \mid p \in \mathbf{P}\} \subseteq \text{Sub}_{\text{Sh}(\mathbf{P}, \neg)}(1)$ , where  $1$  is the terminal object of  $\text{Sh}(\mathbf{P}, \neg)$ , and is coincides with that of  $\mathbf{Sets}^{\mathbf{P}^{\text{op}}}$ , since the associated sheaf functor is left exact. It is sufficient to prove that the terminal object  $1$  has the Souslin property. To this end, let  $\{u_i : U_i \rightarrow 1\}_{i \in I}$  be a family of non-zero subobject of  $1$  such that

$$u_i \wedge u_j \cong 0 \quad (i \neq j).$$

Since  $\{\mathbf{y}(p) \mid p \in \mathbf{P}\}$  generates  $\text{Sh}(\mathbf{P}, \neg)$ , for each  $i \in I$ , there exists a forcing condition  $p_i \in \mathbf{P}$  such that  $\mathbf{y}(p_i) \leq u_i$ . Hence, we have

$$\mathbf{y}(p_i) \wedge \mathbf{y}(p_j) \cong 0 \quad (i \neq j).$$

This implies that there exists no  $r \in \mathbf{P}$  such that  $r \leq p_i$  and  $r \leq p_j$ , i.e.,  $p_i$  and  $p_j$  are incompatible. On the other hand, by Lemma 3.3.5, the Cohen poset satisfies the countable chain condition. Therefore,  $\{u_i\}_{i \in I}$  is at most countable. The proof is complete.  $\blacksquare$

Now, we shall prove that the Cohen topos  $\text{Sh}(\mathbf{P}, \neg\neg)$  does not satisfy continuum hypothesis. First, since the functor  $\widehat{\cdot}$  is left exact, in particular, preserves monomorphisms, the condition  $\mathbf{N} < 2^{\mathbf{N}} < B$  implies that there exist two monomorphisms  $n : \widehat{\mathbf{N}} \rightarrow \widehat{2^{\mathbf{N}}}$  and  $l : \widehat{2^{\mathbf{N}}} \rightarrow \widehat{B}$  in the Cohen topos. Moreover, by Corollary 3.2.1, we have the monomorphism  $m : \widehat{B} \rightarrow \Omega_{\neg\neg}^{\widehat{\mathbf{N}}}$  in the Cohen topos.

Next, we shall prove that there exists no epimorphism from  $\mathbf{N}$  to  $\widehat{2^{\mathbf{N}}}$  nor exists there epimorphism from  $\widehat{2^{\mathbf{N}}}$  to  $\Omega_{\neg\neg}^{\widehat{\mathbf{N}}}$ , i.e., the following is a “strict inequality”:

$$\widehat{\mathbf{N}} \xrightarrow{n} \widehat{2^{\mathbf{N}}} \xrightarrow{ml} \Omega_{\neg\neg}^{\widehat{\mathbf{N}}}. \quad (3.3.10)$$

Since  $\mathbf{N} < 2^{\mathbf{N}}$  in  $\mathbf{Sets}$ , we have  $\text{Epi}(\mathbf{N}, 2^{\mathbf{N}}) \cong 0$ . Since the Grothendieck topos  $\text{Sh}(\mathbf{P}, \neg\neg)$  has the Souslin property, we also have  $\text{Epi}(\widehat{\mathbf{N}}, \widehat{2^{\mathbf{N}}}) \cong 0$ , by Fact 3.3.1. Hence, by Corollary 3.3.1, there exists no epimorphism from  $\widehat{\mathbf{N}}$  to  $\widehat{2^{\mathbf{N}}}$ . We claim that  $\text{Epi}(\widehat{2^{\mathbf{N}}}, \Omega_{\neg\neg}^{\widehat{\mathbf{N}}}) \cong 0$ . To show this, we use Lemma 3.3.4. In the same way as in the above, since  $2^{\mathbf{N}} < B$  in  $\mathbf{Sets}$ , we have  $\text{Epi}(\widehat{2^{\mathbf{N}}}, \widehat{B}) \cong 0$ . Again, by Corollary 3.2.1, there exists the monomorphism  $m : \widehat{B} \rightarrow \Omega_{\neg\neg}^{\widehat{\mathbf{N}}}$  in the Cohen topos. On the other hand, since we have a global section  $b : 1 \rightarrow B$  of  $B$  in  $\mathbf{Sets}$ , and the functor  $\widehat{\cdot}$  is left exact, we have the corresponding global section  $\widehat{b} : 1 \rightarrow \widehat{B}$  in the Cohen topos. Since the Cohen topos is Boolean, by Lemma 3.3.4, we have  $\text{Epi}(\widehat{2^{\mathbf{N}}}, \Omega_{\neg\neg}^{\widehat{\mathbf{N}}}) \cong 0$ . Therefore, there exists no epimorphism from  $\widehat{2^{\mathbf{N}}}$  to  $\Omega_{\neg\neg}^{\widehat{\mathbf{N}}}$ . The proof of Theorem 3.2.1 is complete.

## 参考文献

- [1] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag, 1971.
- [2] S. Mac Lane and I. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory*, Springer, 1992.
- [3] 古賀 実, 「Grothendieck 位相・サイト上の層・層化関手に関するノート」, The Dark Side of Forcing vol. IV, 第 3 章, 2014, (<http://forcing.nagoya/>).
- [4] 古賀 実, 「Grothendieck トポスの基本性質に関するノート」, The Dark Side of Forcing vol. V, 第 3 章, 2015, (<http://forcing.nagoya/>).
- [5] 古賀 実, 「Lawvere-Tierney 位相・層化関手に関するノート」, The Dark Side of Forcing vol. VI, 第 3 章, 2015, (<http://forcing.nagoya/>).



# 論理学者の神話——樹木篇——

淡中 圈

言い伝えによると古代の論理学者は樹木信仰を持っていたという。

彼らは言葉や文章や議論は全て木であると考えていた。例えば、ある主張を証明しようとする議論は木であり、そのような木を育てることこそ、証明をすることだと考えていたようだ。

そこで彼らは、証明の木の神聖な枝を切らずに成長させる方法を見つけようとし、それにより枝が矛盾に至って木が病に侵されるのを防いだのだ。

また当時の論理学者は魔術師のようなもので、例えば「真理の木」という術を使って、相手の主張が偽りであるかを暴いたと言われる。

それは相手の言葉から木が生え枝が次々と伸び、もしその全ての枝が枯れてしまうと、その言葉が矛盾を含み、明らかな偽りであることの証拠となるのだ。

また同様の木を使い、相手の議論の進め方が妥当かどうかを判じたと言われる。

しかし、それらの木の枝の中には永遠に伸び続けるものもある。そうして伸びていった枝はどうなるのか。

無限の時を超えて伸びきったその枝は、その言葉が真となった世界自体となり、真理の木は無数の世界を支える世界樹となる、と言われていた。



## 第 4 章

# Ax-Grothendieck の定理 数学と論理 学の共進化

淡中 圏

メタ数学の主目的は「数学とは何なのか」を明らかにすることであろうが、それが実際の数学に影響を与えないと、数学をやっている人間の心にはなかなか届かない。そこでメタ数学を使って、少しは面白い数学の定理を証明する一番簡単な例として、モデル理論を使って、Ax-Grothendieck の定理を証明する仕方を概説する。

### 4.1 主定理：Ax-Grothendieck の定理

Ax-Grothendieck の定理とは次のことである。

**定理 1.** 複素数体  $\mathbb{C}$  上の代数多様体  $X$  の自己射  $f: X \rightarrow X$  は単射なら全射である。

ただ、ここで代数多様体の定義や、代数多様体の射の定義をするのも面倒なので、次の簡単な形にする。

**定理 2.**  $\mathbb{C}^n$  から自分自身への  $n$  変数多項式  $f \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  による関数  $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  は単射なら全射である。

これを次の簡単な事実に帰着させる。

**事実 1.** 有限集合  $X$  の自己写像  $f: X \rightarrow X$  は単射なら全射である。

無限集合に関する定理が有限集合に関する事実に帰着させられるところが、この証明の面白いところである。

## 4.2 モデル理論を一舐め

そのためにモデル理論の基本をおさらいする必要があるが、論理学である以上、使う記号を考えて、そこから論理式を構成するための方法を考えて、さらに公理やすでに証明された命題から新しい定理を推論していく規則を考えて、と地道に進まなくては行けないわけで、これには紙幅がかかる。かかりすぎる。

つまり面倒だ。

なので大胆に大雑把な話にしてしまうことにする。ここで省略した「論理学の地道な展開」は、ちゃんとした証明にしたければその詳細が必要不可欠な部分であり、一般的な形式論理学の教科書（例えば [2] や [3]）には載っているのだから、ぜひ読んでほしい。見た目がごちゃごちゃして長いので、最初は面食らうかもしれないが、慣れれば見た目よりずっと簡単である。

ではまず論理式を作るために使っていい記号を固定する（[3] の Section 2 を参照）。この場合は複素数の多項式に関する話なので、主に

$$\sigma_{\text{field}} = \{0, 1, +, \times, -, {}^{-1}\}$$

を使う。本当は、これらの記号を集合  $X$  上の元や演算や関数や関係（部分集合）に対応させ  $X$  を  $\sigma$  構造とみなす、解釈というステップがあるが、詳しくはやはりモデル理論の教科書へ（例えばこれも [3] の Section 2）。ここではほぼ、体の記号の体上で考えるだけなので、どの記号も普通の意味での元や演算や関数だと思ってよい。

これらを使って、項を作っていく（[3] の Section 4 を参照）。まず、 $\sigma_{\text{field}}$  の中で定数を表す記号、この場合は  $0, 1$  は項である。そして、それらに演算や関数を適用したもの、この場合は  $0+1$  や  $1^{-1}$  も項であり、さらにそれらに演算や関数を適用したものも項であり、……と続けていき、作られたものをすべて項とする。実際には、定数を表す記号は項で、項に関数や演算を適用したものも項である、と再帰的に定義する。

つぎに、これらの項と変数  $x, y, z, \dots$  と論理記号  $\exists, \forall, \wedge, \vee, \rightarrow, \neg, =$  を使って書かれた通常の 1 階の述語論理式の全体  $\mathcal{L}_\sigma$  を一階の言語、または単に言語と呼ぶことにする（これも [3] の Section 4）。実際には、これも再帰的に定義する。例えば先ほどの  $\sigma_{\text{field}}$  から作った言語  $\mathcal{L}_{\text{field}} = \mathcal{L}_{\sigma_{\text{field}}}$  を体の言語という。

式というものが、このように再帰的に定義されていて、実質「木」である、ということをもっと広く教養として共有されるべき知識であると思う。

最後に公理を考える。言語  $\mathcal{L}_\sigma$  の部分集合  $T$  を一階の理論、または単に理論という（[3] の Section 7 を参照）。そして、理論  $T$  に含まれる論理式から、論理式  $P \in \mathcal{L}_\sigma$  が通常の一階の述語論理の推論規則で証明できることを、 $T \vdash P$  と書く。これではなんの説明にもなっていないから、ぜひ論理学の教科書の述語論理の部分を読むべきだ（[3] もこの辺りはごまかしているのだから、[7] の第一章あたりを読むといいだろう）。

また、 $\sigma$  構造  $M$  で、論理式  $P \in \mathcal{L}_\sigma$  が成り立っているとき、 $M \models P$  と書く。また、理論  $T$  に関しても、任意の  $P \in T$  に対して  $M \models P$  が成り立つとき、 $M \models T$  と書く。また、このとき  $M$  は  $T$  のモデルだということ。

$T$  が矛盾しているとは、 $T$  が何らかの命題  $P \in \mathcal{L}_\sigma$  に対して、 $T \vdash P \wedge \neg P$  が成り立つことである。矛盾していないことを、無矛盾であるという。



モデル理論とは、理論とそのモデルの関係を考える学問である。数学から見ると、これは今考えている対象から、その対象をモデルにするような理論の方に視線を移すことになる。さらにモデル理論の真骨頂は、その理論のモデルが“どのくらいあるのか”を“数える”ことにある。これは数学から見ると、今考えている対象から、それと同じ理論のモデルになっている無数の構造へと視線を移すことになる。これにより、考えている対象における定理を、それとよく似た他の構造において証明するという、トリッキーな手段が可能になる。

そのような手法を可能にする、モデル理論の基本的な定理が次である ([3] の Theorem 7.1)。

**定理 3.** 無矛盾な理論  $T \subseteq \mathcal{L}_\sigma$  は濃度  $\max(\omega, |\sigma|)$  以下のモデルを持つ。

ヘンキンによる整理によって、この証明はとても簡単になっている。モデルの構成に使えるものと言ったら、 $\sigma$  とそして  $T$  しかないのだから、そこから第 1 章に解説されている集合の構成法でモデルを作るしかない。記号自身から記号の意味するものを作るためには、要するに「記号の意味は記号」としてしまえばいい。少し意味の使用説っぽさもある。なので、項の集合をスタートに、もし  $T$  の中で二つの項が  $=$  で結ばれているならば、集合をその同値関係で割って二つの元を同一視し、 $T$  の中で  $\exists xP(x)$  のように、ある命題  $P$  を満たすような元の存在が主張されているならば、新しい元を付け加えて、それを含むように  $P$  の解釈を与え……と、再帰的に構成し、その極限を取ればよい。構成の各段階において、濃度に気を付けていれば、主張が示せる。

これも一度一般的な教科書で読んでみるべきである。「記号を使って記号の意味するものを作る。記号自体が記号の意味するものである」という方針が見えていけば難しくない。また、どれだけの集合の構成力があるかは、 $\sigma_{\text{field}}$  や  $T$  の濃度による。普通に使われる記号や理論なら、ZFC は必要ない。そこらへんは逆数学などを学んでも面白いだろう。

ここから、次の便利なコンパクト性定理が系として導ける ([3] の Corollary 7.2)。

**定理 4.** 理論  $T \subseteq \mathcal{L}_\sigma$  の任意の有限部分集合  $T'$  にモデルが存在すれば、 $T$  には濃度  $\max(\omega, |\sigma|)$  以下のモデルが存在する。

これは  $T$  が矛盾している、つまり矛盾を示せるならば、それは  $T$  の中の有限の仮定から示せるはずで、よってある  $T$  の部分集合  $T'$  で矛盾しているものがある、ということの対偶からわかる。

これにより、ある可算な一階の理論  $T \subseteq \mathcal{L}_\sigma$  に濃度が無限であるようなモデル  $M$  が存在しているならば、 $\max(\omega, |\sigma|)$  以上任意の無限濃度  $\kappa$  のモデルが存在していることが分かる (レーヴエンハイム・スコーレムの定理。[3] の Corollary 7.3)。なぜなら、 $\kappa$  個の定数記号  $\{c_i \mid i \in \kappa\}$  を  $\sigma_{\text{field}}$  に付け加え、 $T$  にすべての  $c_i, c_j$  ( $i \neq j$ ) に対して、 $c_i \neq c_j$  を加えたものを  $T'$  とすると、 $T'$  の有限部分集合はその中に使われている有限個の  $c_i$  を任意の異なる元に当てはめれば、 $M$  がモデルとなる。よって、 $T'$  は  $\kappa$  濃度以下のモデルがあるが、各  $c_i$  の解釈として相異なる  $\kappa$  個の元を持つので、結局このモデルの濃度は丁度  $\kappa$  である。

これは、一階の理論ではモデルを一つに限定することはできない、という意味で不安を感じさせるものかもしれない。しかし単に一階の理論の記述力がそこまでだ、というだけで何ら哲学的不安を感じるべきものではなく、先ほどの「数学から見たモデル理論のうま

み」を考えると、理論のモデルがたくさんあること（超準モデルの存在）は、むしろ福富ですらある。

例えば次のような議論ができる。ある理論  $T$  が完全であるとは、任意の命題  $P \in \mathcal{L}$  に対して、 $T \vdash P$  または  $T \vdash \neg P$  が成り立っていることである。ここで、代数閉体の理論 ACF を、体の公理に、すべての正の整数  $n$  に対して、

$$(\forall a_n) \dots (\forall a_1)(a_n \neq 0 \rightarrow (\exists x) a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0)$$

と付け加えたものとする。そして標数  $p$  の代数閉体の理論  $\text{ACF}_p$  を ACF に論理式

$$\text{char}_p : \underbrace{1 + \dots + 1}_{p \text{ 個}} = 0$$

を付け加えたものとし、標数 0 の代数閉体の理論  $\text{ACF}_0$  を ACF にすべての素数  $p$  に対して  $\neg \text{char}_p$  を加えたものとする。

完全である、という性質は構文論にかかわることのように見える。しかしモデル理論では、これをモデル間の関係に着目して証明できることが面白い。そのためにモデルの数学的性質を使う。

特に重要なのが以下である（[3] の Exercise 7.6）。

**定理 5.** ある理論  $T$  について、 $T$  の任意の非可算濃度のモデルが同型ならば、 $T$  は完全である。

なぜならば、もし  $T$  が完全でなければ、ある命題  $P$  があり、 $T \cap P$  も  $T \cap \neg P$  も無矛盾である。なので、それぞれレーヴェンハイム・スコーレムの定理より、ある非可算濃度  $\kappa$  のモデルを持つが、仮定よりこれは同型となる。しかしこれは矛盾。

そして実際、等しい非可算濃度を持つ同標数の二つの代数閉体は同型である。これは超越次数の議論によって行われる。ここで詳しく説明する紙幅はないので、ベクトル空間の基底と次元とほぼ同様の議論だだけ書いておく。ベクトル空間は基底と基底の間に集合論的な同型、すなわち全単射が存在すれば、ベクトル空間全体の同型が成立する。よって次元が同じなら同型である。同様に、代数閉体においては、素体上の超越基底の間の全単射が代数閉体の同型に拡張でき、よって素体上の超越次数が同じなら同型である。すると、非可算濃度の代数閉体の超越次数はおなじ濃度なので、同じ非可算濃度を持つ同標数の代数閉体はすべて同型である（より詳しくは [8] の補題 3.1.5 を参照）。

よって、 $\text{ACF}_0$  も任意の素数  $p$  に対する  $\text{ACF}_p$  も完全であることが証明できた。ここで面白いことは、「すべての命題を証明か否定することができる」という構文論的な性質であるにもかかわらず、実際に証明を組み立てるなどの構文論的な議論は一切せず、モデルの数学的性質の議論だけで済ましていることである。これは論理学の方から見たモデル理論のうまみであろう。

竹内外史が [1] において紹介している、Sheperdson の結果も同様の構造を持つ。それは、ペアノの公理系の数学的帰納法を量子なしの論理式のみに制限した公理系は、2 の平方根が無理数であることなどを証明できない、という証明論的にも見える定理を、モデル理論的に示したものだ。竹内外史はそれを踏まえ、論理学も「代数的なモデルをたくさんとりあげて研究してみるのも面白いのではないだろうか？」と提言している。

さて、ここまで来て注目すべき事実は、複素数体  $\mathbb{C}$  上である言語  $\mathcal{L}_{\text{field}}$  の命題  $P$  が成り立つことと、任意の標数 0 の代数閉体  $K$  上で  $P$  が成り立つことは同値である、という

ことである。これにより、 $\mathbb{C}$  で証明する代わりに、他の代数閉体  $K$  で証明するという可能性が生まれる。

ここにあるベクトル空間の次元と代数閉体の超越次数の類似をモデル理論的に推し進めるのが王道である。例えば Morley の非可算範疇性定理や、Morley 階数、強極小理論、順序極小理論などはすべて、ここを土壌としている（いろいろ載っているサーヴェイとしては [6] が便利である）。

またここで注意しておきたいことは、元となった数学的対象は同じでも、その中で生起するどのような関係に着目するかで、話は大きく変わる、という点だ。例えば、上のように、複素数体上に体の言語を考えた理論は完全になり、論理的にとっても扱いやすいものになる。しかし、ここに指数関数  $\exp(x) = e^x$  なんて考えようものなら、大変なことになる。この  $\exp$  に通常解釈を与える限り、どんな再帰的に定義可能な理論も不完全である。なぜならこの構造においては、 $\mathbb{Z} = \{z \in \mathbb{C} \mid \exp(2\pi z) = 1\}$  として、整数が定義可能で、ラグランジュの四平方定理より、 $\mathbb{N} = \{x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \mid x, y, z, w \in \mathbb{Z}\}$  として、自然数もまた定義可能である。するとこの構造の理論は自然数論を含んでいるので、不完全性定理から逃れることはできないのだ。

これが実数だと全く話が違ふ。実閉体の理論は順序極小理論というとても良い理論のクラスに入っていることが知られている（幾何的な次元や、ホモロジーなどが自然に定義でき、多様体論における病的な例、エキゾチックな例を自然に除外できる。詳しくは [4] がとても良い教科書である）。そして実数に体の言語 + 指数関数を考えた構造の理論も順序極小であることが知られている（Wilkie の定理と呼ばれ、その後様々に拡張されている。[5]）。

さて閑話休題。

$\text{ACF}_0$  と  $\text{ACF}_p$  が完全なことから、次のことが分かる。

**定理 6.** 命題  $P \in \mathcal{L}$  に対して次は同値である。

- (i) 任意の標数 0 の代数閉体  $K$  において  $P$  が成り立つ。
- (ii) 有限個の素数を除いた任意の素数  $p$  を標数として持つ任意の代数閉体  $K$  において  $P$  が成り立つ。
- (iii) ある正の整数  $N$  が存在して、 $p > N$  なる任意の素数  $p$  を標数として持つ代数閉体  $K$  において  $P$  が成り立つ。 ■

二つめと三つめの同値性は自明である。

一つめと二めの同値性は完全性にコンパクト性定理を組み合わせた結果である。もし、 $P$  が  $\text{ACF}_0$  で証明されるなら、 $\neg P$  と  $\text{ACF}_0$  は矛盾している。これは  $\text{ACF}_0$  の有限部分集合と  $\neg P$  が矛盾していることを意味しているが、その中に  $\neg \text{char}_p$  は有限個しかない。これらの素数を  $p_1, \dots, p_k$  とすると、これらの有限個の素数を除いた素数  $p$  において、 $\text{ACF}_p \vdash \neg \text{char}_{p_1}, \dots, \neg \text{char}_{p_k}$  であり、よって、 $\text{ACF}_p$  と  $\neg P$  は矛盾する。すなわち、任意の標数  $p$  の代数閉体において  $P$  が成り立つ。 $\neg P$  について同様の議論をすれば、証明は完了する。

これが、複素数における議論を有限集合における議論に帰着させる鍵である。

### 4.3 主定理の証明（概略）

では、Ax-Grothendieck の定理の証明に入ろう。

まず  $\mathbb{C}^n$  から自分自身への任意の多項式写像が単射なら全射であるという主張は、多項式のすべての変数に関する最高次数を固定すれば、一つの論理式にかける。このとき、固定する最高次数を任意にとって議論すれば、結局すべての多項式写像について議論したことになるから、充分である。

よって、その論理式を証明すればいいのだが、それを  $\mathbb{C}$  において証明する代わりに、任意の素数  $p$  における有限体  $\mathbb{F}_p$  の代数閉包  $\bar{\mathbb{F}}_p$  で証明する。

このとき、 $\forall$  に束縛された変数として考えられている多項式の係数は、すべて任意に取られた  $\bar{\mathbb{F}}_p$  の元、つまり  $\bar{\mathbb{F}}_p$  上の代数的元として考えてよい。こうして得られた多項式写像を  $f: X \rightarrow X$  としよう。

また、全射であることを証明するとは、任意の  $\bar{\mathbb{F}}_p^n$  の元  $y = (y_1, \dots, y_n)$  に対して、 $f(x) = y$  となる  $x \in \bar{\mathbb{F}}_p^n$  を探すことである。

このとき、 $\bar{\mathbb{F}}_p$  に多項式の係数と  $y$  の成分  $y_1, \dots, y_n$  を全部加えた拡大体  $F$  を考える。代数的元を有限個加えただけなので、これは代数拡大であり、よって  $F$  は有限体である。また、多項式写像  $f$  は  $F$  において意味を持つので、 $f$  の  $F^n$  への制限  $f|_{F^n}: F^n \rightarrow F^n$  が意味を持つ。そして  $y \in F^n$  であるので、 $f|_{F^n}(x) = y$  なる  $x \in F^n$  を見つければよいことになる。単射である写像の制限も単射なので  $f|_{F^n}$  は単射であり、また、 $F^n$  は有限集合なので、 $f|_{F^n}$  は全射である。よって  $f|_{F^n} = y$  なる  $x \in F^n$  の存在が示せた。

なお Ax-Grothendieck の定理は群の作用するセル・オートマトン\*1におけるエデンの園定理、すなわち最初からそう配置しないと絶対に到達できないセルの配置\*2の存在の証明に使われたりする（[10]）。

ここで面白いのは複素数体  $\mathbb{C}$  における定理を有限体  $\bar{\mathbb{F}}_p$  上で証明したこと以上に、それらの間に一切射が存在していないという事実であろう。射が存在しないのに、これだけの深い関係が成り立っているのである\*3。それが論理学を応用したことの面白さであろう。

この手法をさらに発展させた記念碑的論文 [11] [12] [13] では、付値体の言語を設定し、有限個除いた素数  $p$  に対して  $p$  進数体  $\mathbb{Q}_p$  においてある命題が成り立つことと、有限個除いた素数  $p$  に対して有限体係数の形式的ローラン級数体  $\mathbb{F}_p((X))$  において成り立つことの同値性を証明している。これを使えば E. Artin が予想した「 $d^2 + 1$  以上の変数を持つ  $d$  次斉次多項式は有限個の例外を除けば全ての  $\mathbb{Q}_p$  上に解を持つ」という定理を、 $\mathbb{F}_p((X))$  では例外なくこの形の多項式が解を持つことに帰着して証明できる。ちなみに Ax と Kochen はこの定理を選択公理と連続体仮説を仮定して証明し、同時にこの定理が属するようなある命題のクラスは、選択公理と連続体仮説を仮定した証明があれば、その2つを使わない証明も存在する、というメタ定理を同時に証明した。

\*1 一定のルールでセルの色が変わっていく Excel をイメージせよ。実際マクロで実装できる。ライフゲームを知っているならより良い。

\*2 セルの色の決め方。

\*3 もしかしら絶対数学が完成した暁には、これらの間の射ができるのかもしれない。詳しい話は未だ存在しないが、[9]などを参照。

## 4.4 今後の夢

現代の数学は様々な数学的構造を圏論の文脈に置いて考えることが主流である。しかし体について圏論的に考えようとする、先ほど少し説明したように、そもそも体の間の射は埋め込み射しかなく、圏としてはどうしても貧弱なものにならざるを得ない。これはモデル理論において、構造のなす圏やモデルのなす圏を考えても同様である。圏とあまり相性が良くなさそうなところが、数学者から見たモデル理論の「筋が悪そうな感じ」を醸し出している気がする。

なので、数学では環の圏を考えることが定番になる。しかし、環はモデル理論的には取り扱いにくい。

これをどちらが良いか悪いかではなく、トレードオフとみる始点が求められるのではなかろうか、と私は勝手に考えている。つまり、論理的には取り扱いにくい環は制約が少ないおかげで射が多く、圏論的に取り扱いやすい。論理的に取り扱いやすいように制約を多くして体になると、射が少なくなり、圏論的には取り扱いにくくなる。しかし論理的に取り扱いやすい体自体は、環の圏における底の役割を果たしているので、体についての知見が増えることは自然に環の圏への知見に返り、vice versa である。

難しいと言われる永田の『可換体論』[8]あたりがモデル理論を使って、理解しやすくないだろうか、と今は考えている。

さらには、他のジャンルでも、このようなトレードオフが見つければ面白いかもしれない。



## 参考文献

- [1] 竹内外史. 数学基礎論の世界. 日本評論社. 1972.
- [2] Poizat, Bruno. A Course in Model Theory. Springer. 2000.
- [3] Sacks, G.E. Saturated Model Theory. World Scientific Pub Co Inc. 2009.
- [4] Dries, Lou van den. Tame Topology and O-minimal structures. Cambridge University Press. 1998.
- [5] Wilkie, A.J. Model completeness results for expansions of the ordered field of real numbers by restricted pfaffian functions and the exponential functions. J. Amer. Math. Soc. 9, pp. 1051–1094. 1996.
- [6] 板井昌典. 幾何的モデル理論入門. 日本評論社. 2002.
- [7] 竹内外史; 八杉満利子. 証明論入門. 共立出版. 1988.
- [8] 永田雅宜. 可換体論. 裳華房. 1985.
- [9] 黒川信重. 絶対ゼータ関数論. 岩波書店. 2016.
- [10] Ceccherini-Silberstein, Tullio; Coornaert, Michel. On algebraic cellular automata. arXiv:1011.4759. 2010.
- [11] Ax, James; Kochen, Simon. Diophantine problems over local fields I. American Journal of Mathematics, 87, pp 605–630, 1965.
- [12] Ax, James; Kochen, Simon. Diophantine problems over local fields II. American Journal of Mathematics, 87, pp. 631–648, 1965.
- [13] Ax, James; Kochen, Simon. Diophantine problems over local fields III. Annals of Mathematics, 83, pp. 437–456, 1966.





## 論理学者の神話——矛盾篇——

淡中 圈

そのとき、全ての始まりの始まり未だ始まらざるとき、全ての終わりの終わり未だ終わらざるとき、無なかりき、有もなかりき、地と天互いに不分明にて名付けるべきものとしてなく、名付けるべき名すらなく、時流れず、空広がらず、ただただ茫洋なる否定のみがゆらぎしとき、楚人に盾と矛とを鬻ぐ者あり。これを誉めて曰く「吾が盾の堅きこと、能く陥すものなきなり。」と。またその矛を誉めて曰く「吾が矛の利きこと、物において陥さざるなきなり。」と。ある人曰く「その矛を以て、その盾を陥さばいかん。」と。物売り、自らの矛持ちて、自らの盾を陥さんとす。すると、無有り、而して有も有り、宇宙、万物、有りと有らゆるもの有り。矛盾に導かれざるもの、有り得べからざればなり。盾と矛持ちし人、如何なること起こりしか分からず、ただ立ちすくむのみ。彼を唆し、図らずか図ったか造物主とせし人、何も言わず立ち去り、その行方杳として知れず。





淡中 圏 本名：田中健策 毎回毎回前回書くと言っていたものと違うものを書いている。とりあえずみんな今海外アニメが熱いので、『アドベンチャー・タイム』とか『スティーブン・ユニバース』とか『レギュラー show』とか『おかしなガムボール』とか『フィニアスとファーブ』とか『グラビティフォールズ』とか『スターバタフライ』とか『RWBY』とか見ような！  
よく分からないブログ [http://blog.livedoor.jp/kensaku\\_gokuraku/](http://blog.livedoor.jp/kensaku_gokuraku/)  
twitter id @tannakaken

鈴木 佑京 修論を書いたり学生生活を終えたり会社に入ったり研修で円陣を組んだり営業になったり会社に嫌気が差したり転職活動をしたり会社を辞めたり新しい会社に入ったりプログラマに転身したりしていたらいつのまにやら夏です。仕事に加えて転職活動と別の原稿が重なり正直死ぬほど忙しかったのですがなんとか無事で持ち上げました。みんな仕事はちゃんと選ぼうね。別名ですが、マンガ批評活動とか、某百合烏賊にアニメ評論を投稿したりもしてるので気になる人は探してね。

石川 隆文 量化的書き方に人の個性が出るなあと、原稿のレビューをしていて思いました。Coqのように書くのが好きですが、Kunen 本のように書くのにも慣れてきました。

宮崎 達也 クソコードを書くたびに地獄との距離が近くなるし、もう俺はだめだ。

古賀 実 表紙絵を担当しました（1年半ぶり2回目）。

編集後記: チケット駆動による簡単な研究系同人誌の作り方。

- (i) まず書くことがあって暇のある者（学生とかフリーターとか）を最低一人は確保。
- (ii) 社会人など暇はあまりなくても、書くことや書く意欲はある者を出来るだけ調達。
- (iii) さくらサーバなどで VPS を借りる。ssh,git,redmine を用意。各メンバーがこれらのツールを使えるよう教育する。
- (iv) git リポジトリと redmine のプロジェクトを作成する。
- (v) git を push すると、変更箇所の通知がメールで全員に届くようにする。また redmine でチケットを切ったり更新した時、チケットの期限が近づいたときに関係メンバーにメールが届くようにする。
- (vi) 暇のある者が積極的に redmine のチケットを各メンバーに切り、小さな変化でもチケットを更新する。また、暇のある者が小さな変更でもいいので、どんどん git push する。これにより他のメンバーのモチベーションが上がる。
- (vii) 原稿がある程度集まったら、一度メンバーで集まり、レビュー担当を割り振り、チケットを切る。
- (viii) レビューした結果の修正提案箇所は、一つ一つチケットを著者に切る。
- (ix) 著者は指摘に従って修正してチケットを更新するか、もしくはチケットを破棄する。
- (x) 時間があれば二次レビュー、三次レビューと続ける。

最初の一押しが良ければ、メンバーどんどんチケットが切り、半自動的に同人誌が出来ていく。redmine のトラッカーやステータスは必要なものを足し、不必要なものは削除するなど、積極的にカスタマイズしよう。また、git の hooks も、commit 前のローカルでの検査や、push 後のリモートでの tex 自動コンパイルなど、少しずつ改良していきたいし、gitignore や Makefile 等の雛形ファイルも気付く度に更新していこう。それらは別の git リポジトリで管理する。

洗練されたツールの普及により、研究系同人誌が手軽に作れることを、最低限の教養に含めて良い時代が来たのである。

【淡中 圏】

発行者 : The dark side of Forcing

連絡先 : <http://forcing.nagoya>

発行日 : 2016年8月14日



