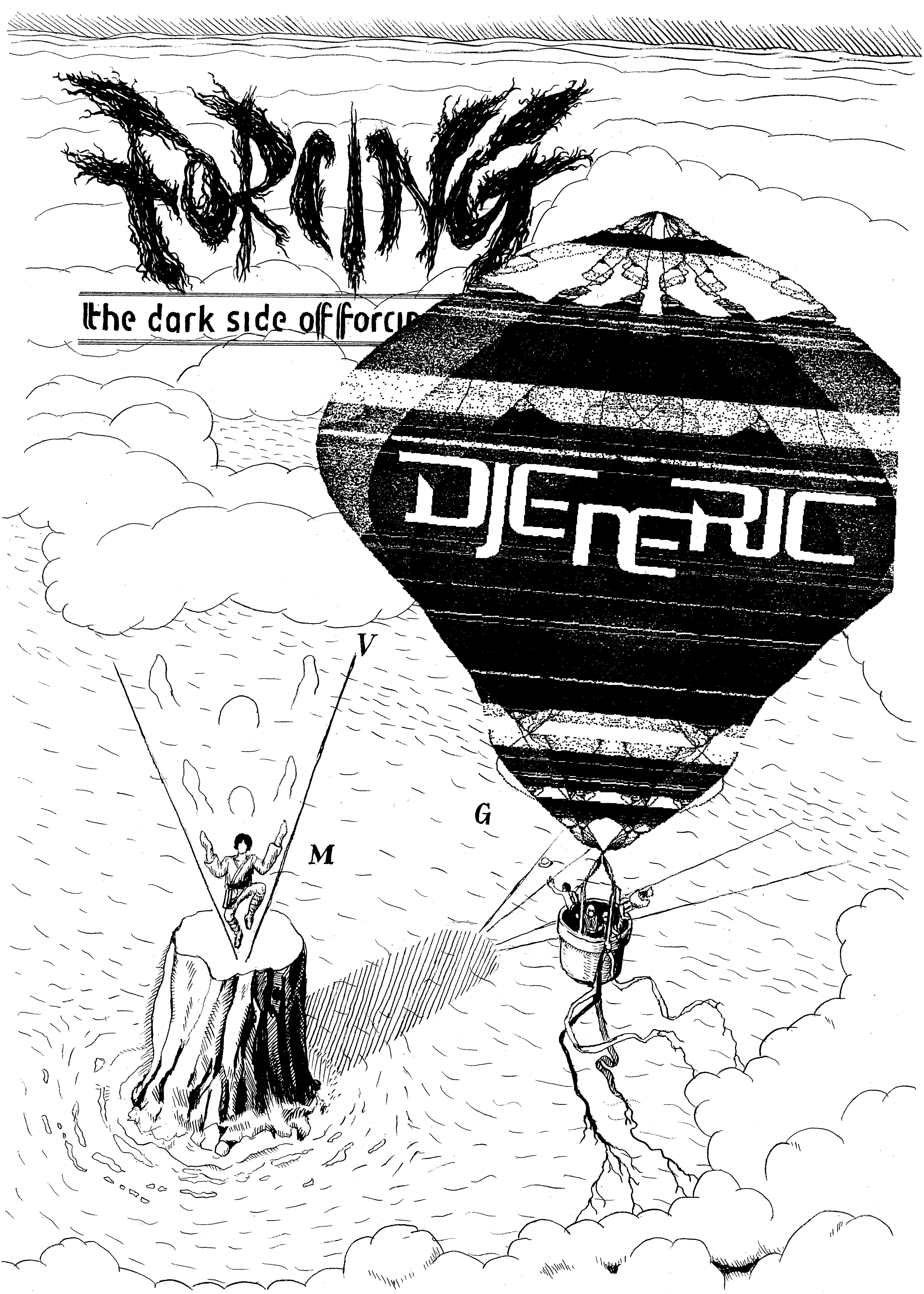

FORCING
the dark side off forcin
DJ Generic
V
M
G

The first day of forcing...

$\emptyset$

はじめに V は天 $\mathcal{H}(\theta)$ と地 M を創造された. [*1]

M は形なく, むなしく, M の半順序 $\mathbb{P}$ が M のなかにあり, V の L が順序数の表面をおおっていた.

V は「generic 拡大あれ」と言われた. すると G による generic 拡大があった.

V はその generic 拡大を見て, 良しとされた. V はその generic 拡大と他のモデルとを分けられた.

V は generic 拡大を $M[G]$ と名づけ, 他の拡大を総じて $M^{\mathbb{P}}$ と名づけられた. G は $M^{\mathbb{P}}$ に隠れてしまい, また G があった. 第一の Forcing である.

[*1] http://ja.wikisource.org/wiki/創世記（口語訳）

目次

第 1 章

可述算術の世界

鈴木　佑京

1.1　はじめに

極端なものが好きだ．派手なものが好きだ．バランスを犠牲にしても, ある特定のベクトルに突っ走ったものには, なにか特有の魅力がある．

たとえば初代『ダイ・ハード』は, アクション映画としてほとんど完璧に近い作品だと思う．脚本もよく出来ているし, 編集も緊張感に満ちている．でも私は, 『狂い咲きサンダーロード』のような, テンションの高さだけで突っ走る映画の方が好きだ．劇場版『マクロス F』二部作はこれ以上望めないほど楽しさが詰まった傑作だったが, やっぱり僕は『マクロス 7』の方を愛している．あと初代『ガメラ』より『ガメラ 2』を推したい．例が偏ってるって？申し訳ありません．

別に, 王道なもの, スタンダードなものが悪いというわけではない．いや, 全く逆に, 王道なものやスタンダードなものが素晴らしいのは当然のことだ．だからこそ王道やスタンダードとして扱われているのだから．しかし, ノンスタンダードなもの, ヘンなものにもまた, それなりの魅力があるはずだ．珍奇さだけではない．スタンダードなものの中にはなかった世界観, 我々が普段気づかないようなものの見方に, ノンスタンダードなものは気づかせてくれる．だから, そういったものをたまに摂取してみるのは, とても良いことだと思う．

まさに数学でもそれは同じだ, と私はいいたい．スタンダードな数学体系についての, スタンダードな方法による研究は絶対に必要だ．しかし, それだけというのはちょっと貧しいのではないか？非古典的な世界観に基づく体系, ノンスタンダードな方法による研究だってあってもいい．普段古典数学を学んでいる人だって, たまに非古典的な数学の世界を覗いてみれば, 新しい見方を獲得できるだろう．何より非古典的な体系は愉快なことが沢山起こる．そこには, 実数上の関数がすべて連続だったり[*1], あらゆる集合の集合が定義できたりする[*2]世界が広がっている．そこでいったいなにが起こっているのか, 気になる

[*1] 直観主義的解析の定理．

[*2] こういう体系は結構多い．無制限の包括公理を入れる代わりに, 論理の方を弄った体系でこういうことが起こるが, 論理の弄り方によっていろんな体系が作れるからである．たとえばアクゼルのフレーゲ構造とか．

のが人情というものではないか？

これから紹介するのはそんなヘンな数学の世界だ．エドワード・ネルソンという数学者が展開した，「可述算術 Predicative Arithmetic」という，弱い—ものすごく弱い，なんと指数関数がまともに使えない—体系を紹介したい*3．彼の名前に聞き覚えがある人もいるだろう．そう，実はこのネルソンは，2011 年にペアノ算術が矛盾していることを "証明" してちょっとした話題になった，あのネルソンだ．もちろん，ネルソンが与えた証明は後に間違っていることがわかったわけだが．

このエピソードだけを聞くと，なんだかネルソンがクレイジーな人みたいだが，この印象は半分は正しい．ネルソンのホームページ（https://web.math.princeton.edu/ nelson/）では彼の講演の原稿が見れるが，「現代数学の崩壊のサイン Warning Signs of a Possible Collapse of Contemporary Mathematics」だの，「ヒルベルトの誤り Hilbert's Mistake」だの，アジテーション色の強いタイトルが並んでいる．内容もタイトルの印象に違わず，過激な文言が溢れている．なかなか愉快な文章なので，一度読んでみるといい．賛成できるかどうかは別として楽しい気分になれる．

だが，ネルソンは単にクレイジーなだけではない．いちおう（という言い方はあまりにも失礼だが），彼はプリンストン大学の数学教授のポジションを持っている．量子力学や超準解析の分野でちゃんとした成果を上げている立派な数学者なのだ*4．

彼は彼なりのある世界観に基いてペアノ算術の正当性に疑問を抱き，その無矛盾性を疑った．同時に，その世界観に基いて正当性が主張できるような，より弱い算術を展開した．それが可述算術である．彼の世界観は，明晰に展開された哲学体系となっているとはとても言えないものの，しかしそれなりに筋が通っている．また，可述算術の展開そのものは，形式的手法に則った数学的に厳密なものだ．だから彼を単なる頭のおかしな人と片付けるのは間違いだ．ヘンな人であるのは確かかもしれないが，しかし彼の研究には，概念的な一貫性と数学的実質がある．実際，彼の研究は，後の限定算術の研究や計算量の研究に大きな影響を与えた*5．

彼がどんな数学的問題に立ち向かい，どう切り抜けたのか．そこには数学についてのどんな世界観が潜んでいるのか．細かい議論については適度にごまかしつつ，以下で紹介していきたい．

なお，ネルソンの哲学的な議論，特にその極端な構成主義的–改訂主義的*6な側面については，私自身は賛成できない．ましてや，読者に賛成してもらおうと思っているわけではない（自分が賛成していないことについて人を賛成させようとするほど私は不誠実ではない）．ただしかし，私は少なくとも以下のことについては正しいと考えており，またその正しさを読者にも是非伝えたいと考えている．まず，1) ネルソンの改訂主義的な哲学は，その徹底ぶりにおいて，賛成出来ない人にとっても "面白い" ということ．そして，2) ネルソンの研究には，哲学的なモチベーションを無視してもなお意味があるような数学的実質があるということ．最後に，3) ネルソンが提示する数学的活動のモデルは，極めて独特であると同時に，我々の直観にある意味で適っているような仕方での，数学的知識についての

*3 可述算術は，ある決まった理論からなる公理系という意味での体系ではない．ではどういう意味での体系なのか．それは，これから先を呼んでもらえばわかるはずだ．

*4 クレイジーさとまともな業績というこの結合は，なんとなくブラウワーを思い出させる．

*5 こうした研究の一例としては，たとえば [1] を参照．

*6 現状の数学的実践を改めることを主張するようなタイプの立場を，ここでは「改訂主義的」と呼んでいる．

描像を含んでおり, 彼の基礎論的立場に賛成出来ない人にとっても, 価値ある視点を含んでいるということ.

この章の構成は, この 1) から 3) におおよそ対応している. まず第二節と第三節では, ネルソンを可述算術に導いた, 哲学的なモチベーションを説明する. これが 1) に対応する部分. 第四節では, 可述算術が数学的にどのように展開されるのかについて, おおまかに説明する. これが 2) に対応する部分. 最後に第五節で, 再び哲学的な話に戻り, 私自身が可述算術について一番興味を持っていること, ネルソンの可述算術の中に内包されている数学的知識についての新しい捉え方について議論する. これが 3) に対応している.

1.2　可述性

「可述算術」という名前に示されているように, ネルソンによる古典的算術の拒否, そして可述算術の展開は, 「可述性 predicativity」という概念に導かれている. そこでまず, 可述的とはどういうことなのか, いやむしろ, 可述的でないこと, 「非可述 impredicative」であるということはどういうことなのかを, 一般論的に説明しておこう*7.

「非可述」という言葉が基礎論の歴史において登場したのは, 20 世紀序盤のラッセルとポアンカレの研究によってだ [4]. 彼らは, 当時論理学者たちを悩ませていたパラドクスたち—有名な「ラッセルのパラドックス」もその一つだが—の原因は, ある種の循環性を含む, 非可述な定義だと考えた. ここで非可述な定義とは, 次のように考えられている.

ある定義が非可述である iff.
その定義が, 定義されるところのものを含む総体 totality に対する言及を含んでいる.

もちろん, この説明は, 数学的に厳密なものではない. だが, それなりに使うことができるだけの明晰さはある. そのことを例で確かめてみよう.

- まずはポアンカレが実際に分析した, リシャールのパラドクスを取り上げる. なんらかの実数を定義しているような日本語の表現の集合 D と, D に属する表現によって定義される実数の集合 D' を考えよう. D の中には, 「円周を直径で割ったもの」とか, 「1 を 3 で割ったもの」とかといった表現が含まれている. D' の濃度は明らかに可算無限なので, D' の要素に $d_1, d_2, ...$ と自然数で番号をふることができる. ここで次のように対角線論法で新しい実数 r を定義する.

  $r =$ 小数展開したとき, 整数部分は 0 で, かつ, 任意の $d_n \in D'$ について, 小数第 n 位が, d_n で定義される実数の小数第 n 位に 1 を足したもの（ただし, d_n で定義される実数の小数第 n 位が 9 の時は 0）になるような実数

  r は対角線論法を使って定義されているから, どの D' の要素とも異なる実数である. つまり, D' に含まれない. だが, まさしく上は日本語の表現による r の定義だから, この表現は D に含まれる. よって r も D' に含まれる. ここに矛盾が起こる. この例で非可述性が登場するのはどこか？もちろん, r の定義だ. r は, D' という実数の総体に対して言及している. だが, r は定義することができる実数なわけだ

*7 以下は極めて簡潔な説明にすぎない. もっとしっかりした歴史的サーヴェイとしては [4] を参照.

から, D' に含まれる. つまりこの定義は, 定義される当の対象が含まれるような総体に対して言及した定義になっている. だからこの定義は非可述というわけだ.

- ZF 集合論には, 分出公理 $Separation$ という公理が入っている. これはある集合 a が存在したとき, 任意の論理式 $\phi(x)$ について, $\phi(x)$ を満たすような a の要素だけを集めた集合がまた存在する, ということを主張する公理だ. これを使って, 既に定義された集合 a から,

  $$\{x \in\ a | \forall y A(x, y)\}$$

  というように新しい集合を定義できる. だがこれもまた非可述な定義である. というのも, 定義で使われている全称量化子 $\forall y$ は, あらゆる集合を含む総体に暗黙的に言及している. だが, いま定義されている集合もまた, この総体に含まれている. 従ってこの定義は非可述である.
- 実数論の例もとりあげてみよう. 今, 実数が左デデキント切断によって定義されていることにする. このとき, 実数の有界集合 A に対して, A の最小上界は, A の上界の共通集合を取ったものとして定義できる. だがこれは非可述的な定義だ. なぜか？最小上界だって上界の一つだからだ. 「上界の共通集合を取る」という部分に, 定義されている当の対象を含む総体への言及が含まれていることになる.

これらの例から, 非可述な定義というものがどういうものか, なんとなくわかってもらえたと思う.

さて, この可述性の概念を最初に発見したポアンカレやラッセル, そしてその後のワイルなどは, こういう非可述な定義の使用を禁止しようとした. なぜだろうか.

当初はもちろん, パラドクスへの危機感があった. 既に述べたように, ポアンカレやラッセルは, 様々なパラドクスを分析し, 矛盾の原因が非可述な定義にあると考えていた. そこから, パラドクスをブロックするためには, 非可述な定義を禁止しなければならない, と考えたわけだ. だが既に見てきたように, ZF 集合論や実数論は非可述な定義を使用しているが, 特に矛盾の危険はない. 現代的な視点から見れば, パラドクスを避けるためだけに非可述的定義を禁止するのは, 牛刀割鶏というものだろう*8.

従って, より重要視すべきなのは, 可述的数学に対するもう一つのモチベーション—構成主義的な数学観の方だろう. 構成主義は, 数学活動を, 予め存在する数学的対象についての事実の発見としてではなく, むしろ様々な数学的対象や事実を構成していく過程として捉える. ラッセルはともかく, ポアンカレやワイルは, このような数学観を取っていたと言っていい.

だがこのような数学観を取ったならば, 非可述的な定義は悪性の循環を含んでおり, 許されないことになる. 構成的に見れば, 数学的対象の定義とは, その数学的対象を新しく構成することに他ならない. だがしかし, 非可述な定義においては, これから構成されるところの当の対象が, さも既に与えられているかのように暗黙的に言及されている. 従って, こうした定義は正当な数学的構成とは認められない. こういう理由で, ポアンカレやワイル, そして後の可述主義者たちは, 非可述な定義の使用を制限するのである.

*8 ただしネルソンは, 後述するような古典的自然数論の非可述性ゆえに, その無矛盾性をも疑っているようだが. [10] などを参照.

1.3　自然数論の非可述性

さて, 一般的な話はこれくらいにして, いよいよネルソンの話を始めよう.

ここまで見たところでは, 非可述性が現れるのは集合論や実数論の領域に限られていた. 実際, 当初, 自然数論, 少なくとも一階の自然数論の場面では, 非可述性の問題は真剣に考慮されてこなかった. たとえば, 可述的解析の先駆けとなったワイルは, 自然数のシステムを与えられたものとして前提し, その前提の上でどう可述的に解析を展開するかだけを考えていた.

だが 20 世紀の後半から, 一部の哲学者, そして数学者が, 自然数概念は既に非可述性を含んでいると主張し始めた. 先駆けとなったのはダメットの 1963 年の論文 [3] であり, この主張を全面的に展開したのがパーソンズの論文 [12]. そしてこの主張から出発したのがネルソンの可述算術 [8] である.

細かい論点を抜きにして彼らの主張を大雑把に説明すれば次のようになる. 我々は自然数概念について, a.)0 が自然数であること, b.) 自然数 x から後続者関数 S によって, 自然数 Sx が得られること, c.) 任意の性質について数学的帰納法が成り立つこと, この三つを理解している. いやむしろ, この三点についての理解こそが, 自然数概念の本質をなすと考えるべきだろう. だがこの c.) の中には非可述性が隠れている.

問題になるのは, 「任意の性質」という部分である. この性質の中には, 自然数上の量化を使って定義されるような性質も含まれているだろう（例えば, n についての性質, 「1 から n までのどの数でも割れるような数が存在する」—記号で書けば, 「$\exists x \in N \forall y \in N(y \leq n \to \exists z \in N z \times y = x)$」—とか）. ということは, c.) で一般化されている性質の中には, 自然数のシステムが既に与えられていることを前提にしているものがある. だが, 自然数の概念はまさしく c.) によって定義ないし理解される. 従って, ここには非可述性がある[*9]. つまり, 自然数についての数学的帰納法の使用は, 非可述な自然数概念を前提するものであり, 従って非可述性を含んでいるのである.

この非可述性は, 「任意の性質」をある程度制限したとしても—たとえば一階の算術の言語で表現できるような性質だけに制限したとしても—もしその中に自然数上の量化 $\forall x \in N$ や $\exists x \in N$ によって定義されるような性質が含まれているなら, 消滅しない. だから例えば, 一階の自然数論においてすら, それが帰納法の使用を含んでいるのなら, 非可述性から逃れているとは言えないのである.

さて, この主張を聞いてあなたはどう思うだろうか. 「こんな話は現実の数学的実践と全く関係ないのだからどうでもいい, 無視すべきだ」という反応があるかもしれない. もしかしたらそういう反応が一番 “健全” なのかもしれないが, この原稿の基本スタンスは「ヘンな人の考えに付き合ってみること」なので, ここはとりあえずグッとこらえていただ

[*9] この説明は, 「定義されるところのものを含む総体 totality に対する言及を含んでいる」という非可述性の定義に厳密に沿っているわけではない. なぜなら, 定義されているところの性質 N を要素として含む totality に対する言及がある, と言っているわけではないからだ（「$\exists x \in N \forall y \in N(y \leq x \to \exists z \in N z \times y = n)$」を要素として含む totality に対する言及は指摘されているが）. 厳密に理解するなら, ここで非可述なものとして指摘されているのは自然数の概念そのものではなく, 「$\exists x \in N \forall y \in N(y \leq x \to \exists z \in N z \times y = n)$」のような, 自然数上の量化を含む性質の定義の方だ. この定義は自然数概念に対する言及を含むが, だがこの自然数概念の中には, 今定義されているところの当の性質を含む totality に対する一般化が含まれている. 従って, ここには非可述性がある.

きたい.

“穏健” な反応は次のようなものだろう.「数学において極めて基礎的である自然数概念自体に非可述性が含まれているということは, 数学において非可述性から逃れる術は無いということである. だから, 非可述な定義を一般的に問題視する態度はおかしい」. なるほど, 筋の通った議論だ.

あるいはこう考える人もいるかもしれない.「確かに自然数概念には非可述性が含まれているかもしれないが, 自然数概念を使わない数学などありえない. だから, とりあえず自然数のシステムは受け入れて, それ以上の非可述性は許さないようにするのが reasonable ではないか」. つまり, 結果的にはワイルと同じやり方を取るわけである. こうした考え方は「自然数を前提した可述性 predicativity given the natural numbers」と呼ばれ, 可述的数学における多くの研究の基本方針となっている.

だがもっと “過激” な反応もあり得る.「帰納法の正当性がその中に含まれるような自然数概念は非可述だ. 従って, 帰納法をアプリオリな原理であるかのように使用することは間違っている. 自然数論は帰納法の正当性を前提せずに展開されねばならない」. もちろん, この道をとったのがネルソンだ. つまりネルソンは, 徹底的な構成主義・可述主義の立場に立ち, 非可述な自然数概念を前提しない仕方で, 従って数学的帰納法の正当性を前提しない仕方で, 自然数論を展開しなければならない, と考えた. 従って彼にしてみれば, 予め数学的帰納法の正当性を前提してかかり, ペアノ算術の公理の中で自然数論を展開することは, 非可述性を含む不当なやり方である. その代わりに, 非可述性を完全に追放して展開される自然数論, それが可述算術だ.

以上がネルソンが古典的算術を捨て, 新しい算術に向かった理由である. 共感できるかどうかは別として, それが徹底した立場であることはわかってもらえると思う.

1.4　可述算術の展開

さてやっと可述算術の数学的実質について話す段になった. ここまで述べたように, ネルソンは, 自然数の概念に訴えて数学的帰納法を正当化することはできないと考える. 0 が自然数であること, 自然数から後続者関数によって自然数が得られること, この二つは前提してもいい. だが帰納法はダメだ. 従ってネルソンは次のような数学的問題を抱えることになる.

問題 1 数学的帰納法の正当性を前提せずに, トリヴィアルでない自然数論を展開することはできるか？

問題 1 自体は, ネルソンの可述主義的哲学を離れても意味を持つものであると私は思う. それに対するネルソンの解答が可述算術だ. その展開の全てを詳しく追っていくことは紙幅の関係上不可能だが, しかし一端を以下で見てみることとしよう. *10

*10 以下の内容は全て [8] をもとにしている. なお [2] をまとめ方の参考にした.

1.4.1　出発点としてのロビンソン算術

まず出発点として, ロビンソン算術 Q を拡大した体系 Q' を取る．論理は古典述語論理とする．Q, Q' の言語 LA は, 非論理的な記号として, 定項 0, 一項関数記号 S, P, 二項関数記号 $+, \times$, 二項関係記号 $\leq$ を含む.

定義 1 次の式のうち, Ax.0-Ax.7 からなる理論をロビンソン算術 Q という．Ax.0-Ax.12 からなる理論を Q' という．Q に, $Ind_{A(x)}$「$(A(0) \wedge \forall x(A(x) \rightarrow A(Sx))) \rightarrow \forall x A(x)$」という形式の式をすべて公理として加えたものをペアノ算術 PA という.

- Ax.0 $Sx \neq 0$
- Ax.1 $Sx = Sy \rightarrow x = y$
- Ax.2 $x + Sy = S(x + y)$
- Ax.3 $x + 0 = x$
- Ax.4 $x \times Sy = x \times y + x$
- Ax.5 $x \times 0 = 0$
- Ax.6 $Px = y \leftrightarrow Sy = x \vee (x = 0 \wedge y = 0)$
- Ax.7 $x \leq y \leftrightarrow \exists z x + z = y$
- Ax.8 $(x + y) + z = x + (y + z)$
- Ax.9 $x \times (y + z) = x \times y + x \times z$
- Ax.10 $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$
- Ax.11 $x + y = y + x$
- Ax.12 $x \times y = y \times x$

Q の公理は, 自然数の概念や, 足し算・掛け算の定義から自然に正当化できるものである．特に大事なことは, 数学的帰納法や, 数学的帰納法を使わないと正当化できないような公理・規則が含まれていないということだ．だから, Q は厳格な可述主義の立場からも受け入れることができる.

一方, Q' には問題がある．足し算･掛け算についての結合･交換･分配法則（Ax.8-Ax.12）は, 足し算や掛け算の定義に含まれることではなく, 帰納法によって改めて証明されねばならないことだ．だから, こうした法則を予め前提してしまうのは, 暗に帰納法を使用していることになり, 可述的には不当である．従って, Q' を直接可述的な理論として認めることはできない.

だが, Ax.8-Ax.12 は, これから紹介するある “トリック” を応用して, 正当化することができる前提である．いったいどうやって？それはこれからの議論を見ればわかる．だからとりあえず, Q' は可述的に受け入れることができる理論であることにしておこう．そして, 非可述性を避けるために, Q' に含まれない原理は一切使わないことにしよう．Q' がいわば, 可述算術の出発点となる.

Q' は Q に比べれば, 掛け算・足し算についての一般的な法則を含んでいるので, その分強い．だが, 公理にも推論規則にも数学的帰納法が含まれていないので, 証明できることには限りがある．例えば, 論理式 $F(x)$ を, $F(x) \equiv \exists z(2 \times z = x \times Sx)$ として定義する. $F(x)$ は, $x \times (x + 1)$ が, かならず 2 の倍数になることを表している.

自然数論を名乗る以上, $\forall xF(x)$ ぐらいは言えて欲しい．だがこれを Q' で示すことは不可能だ．$F(0)$ と $F(x) \to F(Sx)$ は Q' で簡単に示せる．だから, もし数学的帰納法 $(Ind_{F(x)})$ が公理に入っていれば, $\forall xF(x)$ が言える．しかし数学的帰納法は公理にない．$\forall xF(x)$ を可述的に認めることは, 諦めるしか無いのだろうか.

1.4.2　ネルソンのトリック

ここでネルソン独自のトリックが炸裂する．アイデアはこうだ．我々の困難は, 全ての数について F が成り立つ, ということを示すことができないことだった．そこでネルソンは発想を逆転する．数について F が成り立つことを示せないなら, 逆に, F が成り立つものを数と呼ぶことにすればいいのではないか？つまり, 現在の自然数の概念—自然数$_0$ と呼ぶことにしよう—に, F が成り立つという条件を追加し, 新しい自然数概念, 自然数$_{F(x)}$ を定義する．そして, この新しい 自然数$_{F(x)}$ の概念に, 自然数概念を改訂する．こうすれば, 任意の数について F が成り立つことを, 可述的に認められるのではないか？

このアイデアを形式的に述べると次のようになる．今, 式の相対化を次のように定義する.

定義 2 自由変数が一つしか含まれない式を一項論理式と言う.
定義 3 一項論理式 $C(x)$ があるとき, A の $C(x)$ による相対化 $A_{C(x)}$ とは, A における量化子の出現 $\forall xB(x), \exists xB(x)$ を, すべて $\forall x(C(x) \to B(x)), \exists x(C(x) \wedge B(x))$ に置き換えたものとする.

Q' に, 新しく認めたい式 $\forall xF(x)$ を付け加えた理論を, $Q'[\forall xF(x)]$ とする．そして, この $Q'[\forall xF(x)]$ を, 量化のドメインを $F(x)$ に相対化することによって（ここが, 自然数概念を 自然数$_0$ から 自然数$_{F(x)}$ に改訂していることにあたる）, Q' の中で解釈[*11]する.

定義 4 LA の自由変数について適当に自然数を対応させ順序を付けておく．任意の一項論理式 $C(x)$ と, 任意の式 A について, A に含まれる全ての自由変数をこの順序で並べた列 $x_0, x_1, ..., x_n$ を取ったとき, $C(x_0) \wedge C(x_1) \wedge ... \wedge C(x_n)$ を $C(freeA)$ と書く.
問題 2 次を示せ．任意の LA の式 A について,
$Q'[\forall xF(x)] \vdash A \Rightarrow Q' \vdash F(freeA) \to A_{F(x)}$

一旦これが示せれば ,$Q'[\forall xF(x)]$ における定理は解釈によってすべて Q' の定理でもあるわけだから, $Q'[\forall xF(x)]$ を新しい理論として採用し, この中で算術を展開してよい．つまり, $\forall xF(x)$ を認めることができるのである.

このアイデアはしかし, すぐには実行できない．三つの問題点がある．一つ目の問題点は, $Q'[\forall xF(x)]$ の量化の変域が, 0 を含み, $P, S, \times, +$ で閉じている[*12]ことである．だから, $Q'[\forall xF(x)]$ のドメインを Q' において $F(x)$ で解釈するためには, Q' における $F(x)$ も 0 を含み, 後続者関数・足し算・掛け算で閉じていなければならない．二つ目の問題は, $Q'[\forall xF(x)]$ の一部である Q' の公理が, ドメインを $F(x)$ に相対化してもちゃんと成り立

[*11] 以下では解釈の一般的な定義はしない．これについては [3, Ch. 4] を参照.
[*12] 要するに, $Q'[\forall xF(x)]$ において, 変項 ,$0, P, S, \times, +$ から作られた項を, 全称例化, 特称汎化の推論の対象にできるということである.

つかどうかという問題である．Ax.7 以外の公理は, 開いた式*13なので, どんな式で相対化しても成り立つ．だが, Ax.7 はそうはいかない．ちゃんとこの式が成り立つことが保証できなければならない．

この二つの問題点は次の定義と定理で一気に解決できる．

定義 5 一項論理式 $C(x)$ に対して, $C^1(x), C^2(x), C^3(x)$ を次のように定義する．

- $C^1(x) \equiv \forall y(y \leq x \to C(y))$
- $C^2(x) \equiv \forall y(C^1(y) \to C^1(y+x))$
- $C^3(x) \equiv \forall y(C^2(y) \to C^2(y \times x))$

定理 1 $Q' \vdash C(0) \land \forall x(C(x) \to C(Sx))$ のとき, 次が Q' の定理となる．

- $C^3(x) \to C(x)$
- $(C^3(x) \land y \leq x) \to C^3(y)$
- $C^3(0) \land \forall x(C^3(x) \to C^3(Sx))$
- $C^3(x) \to C^3(Px)$
- $(C^3(x) \land C^3(y)) \to (C^3(x+y) \land C^3(x \times y))$
- $(C^3(x) \land C^3(y)) \to (x \leq y \leftrightarrow \exists z(C^3(z) \land x+z=y))$

証明 Q' の中で次を順番に証明していく．

1. $C^1(x) \to C(x)$
2. $(C^1(x) \land y \leq x) \to C^1(y)$
3. $C^1(0) \land \forall x(C^1(x) \to C^1(Sx))$
4. $C^2(x) \to C^1(x)$
5. $(C^2(x) \land y \leq x) \to C^2(y)$
6. $C^2(0) \land \forall x(C^2(x) \to C^2(Sx))$
7. $(C^2(x) \land C^2(y)) \to C^2(x+y)$
8. $C^3(x) \to C^2(x)$
9. $C^3(x) \to C(x)$
10. $(C^3(x) \land y \leq x) \to C^3(y)$
11. $C^3(0) \land \forall x(C^3(x) \to C^3(Sx))$
12. $C^3(x) \to C^3(Px)$
13. $(C^3(x) \land C^3(y)) \to (C^3(x+y) \land C^3(x \times y))$
14. $(C^3(x) \land C^3(y)) \to (x \leq y \leftrightarrow \exists z(C^3(z) \land x+z=y))$

それぞれの証明は煩雑なだけで簡単なので省略したいが, いちおう 4 から 7 だけ確認する．以下は Q' での証明だとして読んで欲しい．$C^2(x)$ とすると, 定義と 3 から $C^1(0+x)$．だが $0+x=x+0=x$．よって 4．$C^2(x)$ と $y \leq x$ と $C^1(z)$ を仮定する．このとき $C^1(z+x)$ だが, $z+y \leq z+x$ なので, 2 から $C^1(z+y)$．従って 5．$x+0=x$ なので $C^2(0)$．$C^2(x)$ と $C^1(y)$ を仮定する．すると $C^1(y+x)$ だが, 3 から, $C^1(S(y+x))$．$y+Sx=S(y+x)$ なので, $C^1(y+Sx)$．よって $C^2(Sx)$．従って 6 が示せる．$C^2(x), C^2(y), C^1(z)$ を仮定す

*13 量化子の登場しない式のこと．

る．$z+(x+y)=(z+x)+y$. $C^1(z+x)$ なので $C^1((z+x)+y)$．よって $C^1(z+(x+y))$. なので $C^2(x+y)$．（証明終わり）

従って, F を F^3 に強めると, F^3 は 0 を含み, $P, S, \times, +$ で閉じている．さらに順序関係の定義式もちゃんと成り立つ．残る三つ目の問題は, $Q'[\forall xF(x)]$ の公理のうちの, まさしく $\forall xF(x)$ である．この式は, 量化のドメインを $F^3(x)$ に相対化して Q' で解釈しても, ちゃんと成り立つのだろうか？もちろん, $Q' \vdash F^3(x) \to F(x)$ は成り立つことは定理 1 で示せている．しかし問題は, $Q' \vdash F^3(x) \to F(x)_{F^3(x)}$ が示せるかどうかだ．このことは, 決して明らかではない．幸い, $F(x)$ のケースでは, この三つ目の問題点はクリアできる．

定理 2 $Q' \vdash F^3(x) \to F(x)_{F^3(x)}$
証明 以下を元に Q' の証明を構成する． $F(x)_{F^3(x)}$ を書き下すと次のようになる． $\exists z(F^3(z) \wedge 2 \times z = x \times Sx)$． $F^3(x)$ を仮定する．すると定理 1 より, $F(x)$．つまり, $2 \times z = x \times Sx$ なる z が存在する．だが, 定理 1 より, $F^3(x), F^3(Sx), F^3(x \times Sx).z \leq x \times Sx$ なので, $F^3(z)$．よって, $(F^3(z) \wedge 2 \times z = x \times Sx)$ なる z が存在する．つまり, $F(x)_{F^3(x)}$．(証明終わり)

定理 3 任意の LA の式 A について, $Q'[\forall xF(x)] \vdash A \Rightarrow Q' \vdash F^3(freeA) \to A_{F^3(x)}$
証明 次の二つを証明すればよい．

- 任意の式 A, A' について, A から古典述語論理で A' が帰結するなら, $F^3(freeA) \to A_{F^3(x)}$から $F^3(freeA') \to A'_{F^3(x)}$ が古典述語論理で帰結する．
- $Q'[\forall xF(x)]$ の任意の公理 A について, $Q' \vdash F^3(freeA) \to A_{F^3(x)}$

前者は定理 1, 後者は定理 1 と 2 から直ちに帰結する．（証明終わり）

従って, 自然数概念を 自然数$_{F(x)}$ に改訂し, $Q'[\forall xF(x)]$ を新しい理論として採用して, $\forall xF(x)$ を認めることができるのである．

一つ注意を促しておこう．今までの過程で登場した新しい自然数概念 F^3 は, F^3 上の量化や, F^3 を含む総体に対する言及を全く含まずに定義されている．つまり, F^3 の定義には, 非可述性は全く含まれていない．従って, 自然数概念を F^3 によって改訂する過程は, 全く可述的である．

$\forall xF(x)$ を認めるためのここまでの議論の中に, 可述算術の典型的な展開方法が示されている．まず, 自然数全体について成り立って欲しい式 C を取ってくる．C を C^3 に強める．そして, 自然数概念を C^3 に改訂する．そのことによって, 理論が新しく, より強いものになっていく．

もっと形式的な描写をしておこう．現在の理論が T だとする．このとき,

1. 帰納法で示したい式 $\forall xC(x)$ があるとする．

   だが帰納法は使えないので, 代わりに以下のステップを踏み, 理論の方を強める．
2. C を C^3に強める．
3. $T[\forall xC(x)]$ の任意の公理 A について, $T \vdash C^3(freeA) \to A_{C^3(x)}$ を示す．特に, $T \vdash C^3(x) \to C(x)_{C^3(x)}$ を示す．
4. $T[\forall xC(x)]$ を, ドメインを C^3によって相対化し, T で解釈する．

5. $T[\forall x C(x)]$ を新しい理論として採用する.

Q' から初めて, 1 から 5 を繰り返すことによって, どんどん理論を強めていく. どれだけ理論を強めていっても, 最終的には Q' で解釈できるので, 可述的に認められない部分はない. 自然数に関する事実を, 数学的帰納法による証明ではなく, 自然数概念の改訂によって, 認めていく. これが可述算術である.

このステップの中でもっとも重要なのはもちろん, 3 である. これ以外のステップはどんな式 $C(x)$ についても実行可能だが, この 3 だけは, $C(x)$ の形によって証明できるかどうかが変わるし, またどう証明してよいかも変わってくる. もしも $C(x)$ が, 3 が実行できないような式であれば, その式は可述的には認められないことになる.

ちなみに, 1-5 を応用すれば, Q' を Q で解釈することができる[*14]. だから, 3.1 節で述べたような Ax.8-Ax.12 についての懸念は無視できる. Q' を可述算術の出発点とすることに問題はない.

1.4.3　可述算術でできること・できないこと

さて, ここまでの説明で可述算術がどういうものなのかについてはなんとなくわかってもらえたと思う. では, このやり方で, どれだけの範囲の自然数論を展開できるのだろうか？次の定理はその一つの答えである（証明は [8, Ch. 7] を参照）.

定義 6 任意の式 A について, A の任意の量化子の出現が $\forall x(x \leq t \to B(x)), \exists x(x \leq t \wedge B(x))$ という形式をしている時, A を明示的に縛られた式 manifestly bounded formula と言う. ただし, t は x を含んではならない.
定義 7 任意の式 A, と任意の変数 x について, A の自由変数のうち x を除いたものを定義 4 の順序で並べた変数列を $x_0, ..., x_n$ とするとき, $\forall x_0 \forall x_1 ... \forall x_n A$ を $A_x(x)$ と書く.
定義 8 LA の任意の明示的に縛られた式 $B(x)$ に対して, 次の式を $BI_{B(x)}$ と呼ぶ.
$BI_{B(x)} \equiv (B_x(0) \wedge \forall x(B_x(x) \to B_x(Sx))) \to B(x)$
定理 4 Q' に, 任意の明示的に縛られた式 $B(x)$ について $BI_{B(x)}$ を付け加えたものを Q_1 と呼ぶ. $D_0, ..., D_n$ が Q_1 の定理であるとき, Q' に $D_0, D_1, ..., D_n$ を付け加えた理論 $Q'[D_0, D_1, ..., D_n]$ は, Q' において, 適当な式による相対化で解釈できる.

つまり, BI を使って証明される式を有限個 Q' に付け加えた理論は常に可述的である. 従って, 可述算術においては, Q' と BI を使って自然数に関する事実を"証明"してもよいということになる. 実は, 前節で問題になった $\forall x F(x)$ も, BI を使って示せる.

その他, どのような理論が可述的なものとして認めうるかは, 実際に [8] を参照して欲しい. 注目すべきことに, 適当なコーディングを経由して, 一定範囲のメタ数学を可述算術の中で展開することができたりする[*15].

逆に, 可述的でない理論としてはどのようなものがあるだろうか？つまり, 可述算術の限界はどこにあるのか？一つの答えは, 指数関数である. つまり, 可述算術では, 指数関数の全域性を認めることができない. また, これと関連して, ゲンツェンの基本定理（述語論

---
*14 [8, Ch. 6] を参照.
*15 その結果として, 例えば定理 3 を可述算術で示すことができる.

理のカット除去定理）も, 可述算術では示せない [2][*16]. ちなみに, ペアノ算術はもちろん, たとえば原始再帰的算術でも, 指数関数の全域性と基本定理を示すことができる.

次のような疑問がわく人もいるかもしれない. 可述算術は, 最初に公理系を定めて, その中での証明によって展開していくものではない. 自然数概念を少しずつ改訂し, 理論をだんだん強めていくことによって展開していく体系である. だが, わざわざちまちまと少しずつ理論を強くしていくのではなく, 可述的に認められる最強の理論をまず作り, その中で普通に証明をしていけばいいのではないか？

つまりこういうことだ. 可述的に認めることができる, つまり Q で解釈できるようなどんな理論 T よりも強く, かつそれ自体可述的に認めることができるような理論 PR が存在しないだろうか. もし存在するのであれば, 段階を踏んで理論を強くしていくというステップを踏む必要はなく, この PR の中で算術を展開すればそれでよい. そっちのほうが話はすっきりするだろう.

残念ながらこのような PR は存在しない. 以下の問題を見て欲しい.

問題 3 $Q[A], Q[B]$ が Q で解釈可能であるような任意の式 A, B について, $Q[A \wedge B]$ も Q で解釈可能か？

これはネルソンが [8, Ch. 15] で提起した問題だが, ソロヴェイによって否定的に解かれた [2]. 従って, $Q[A], Q[B]$ が Q で解釈可能だが, $Q[A, B]$ は Q で解釈できないような A, B がある. $Q[A]$ も $Q[B]$ も可述的に認めることができるから, もし前述の PR が存在するなら, PR は $Q[A]$ や $Q[B]$ よりも強いはずだ. だから当然, PR は $Q[A, B]$ よりも強い. しかし, $Q[A, B]$ は Q で解釈できないのだから, それよりも強い PR が Q で解釈できるはずはない. つまり PR は可述的に認められる理論ではない. これは矛盾だ. よって, PR のような理論は存在しない. その意味で, 可述算術は本質的に非形式的である[*17]

1.5　数学的知識について

我々はここまでで, ネルソンが古典的な算術を拒否して可述算術を展開したモチベーション, そして可述算術の数学的実質を, ごくかいつまんでではあるが, 見てきた. 最後にこの節では, 可述算術が内包していると思われる独特な数学的知識についての考え方—可述主義や構成主義のモチベーションを共有しない人にとっても興味深いと思われる視点—を指摘して, この章の締めとしたい.

一般に知識の中には, それを知る過程の中でなにか新しいものを得られるような知識と, 何も新しいことを得られないような知識がある. 前者を「新しい知識」, 後者を「古い知識」, と呼ぶことにしよう. 例えば, 「独身者は結婚していない」という事はたしかに事実であるが, しかしこれを知ったとしても, なにか新しいことが得られたとは思えない. 我々がもともと持っている「独身者」という概念の中に含まれているものを吟味するだけで,

[*16] 証明図の長さが指数関数的に増大することを考えれば当然だろう.

[*17] どんな可述的な理論よりも強い PR は Q で解釈できなくてもよい, そう考えることはできる. PR 自体は Q で解釈できる必要はなく, PR から導出される定理の任意の有限集合 $\{D_1, D_2, ..., D_n\}$ を Q に付け加えた $Q[D_1, D_2, ..., D_n]$ が解釈できればよいと考えるのである（定理 4 を参照). だが, この条件を満たす PR もやはり存在しない. PR は $Q[A]$ よりも $Q[B]$ よりも強いから A と B を定理として導出してしまう. だが $Q[A, B]$ は Q で解釈できない.

「独身者は結婚していない」という知識は得ることができる．だから「独身者は結婚していない」というのは古い知識である．これに対して, 例えば, 「2014 年の日本国総理大臣は安倍晋三である」という知識を知る過程では, 主体はなにか新しいものを得るだろう．日本国の総理大臣が誰かを知るためには, 概念の分析だけではなく, 実際に選挙結果を調べるという経験が必要である．この経験が, 主体が獲得するところの新しいものであると考えられる．従って, 「2014 年の日本国総理大臣は安倍晋三である」は新しい知識である．

すると問題になるのは数学的知識である．とりあえずここでは自然数論に話を限ろう．自然数論の定理は, 我々の持つ自然数についての知識を表現していると言っていいだろう[*18]．たとえば我々は,「任意の自然数 x について, ある自然数 y が存在し, $x(x+1) = 2y$」という知識を持っているわけである．ではこうした自然数論の知識は新しいか, 古いか, どちらだろうか？

これはなかなか難しい問題である．というのも, 自然数論の知識は, 新しい知識の性格, 古い知識の性格を, 両方兼ね備えているように思えるからだ．まず, 自然数論に限らず, 数学の定理は基本的に, 概念操作だけによって獲得できるものであるように思える．経験や, 経験のようなものが働くことがあるとしても, それは主に発見的な役割だけを果たし, 原理的にはなしですますことができる．そう考えると, 数学的知識は, 「2014 年の日本国総理大臣は安倍晋三である」ことの知識よりも, 「独身者は結婚していない」ことの知識に近いように思える．つまり, 概念分析だけによって得ることができるような, 古い知識であるように思える[*19]．だが, 「任意の自然数 x について, ある自然数 y が存在し, $x(x+1) = 2y$」という知識は, 「独身者は結婚していない」のような内容のない知識ではなく, なにか意味のあること, 新しいことを我々に与えてくれるように思える．そう考えると, 数学的知識は新しい知識であるということになるだろう．

この問題は, 少し違った枠組み—分析/総合という枠組み—を使ってではあるが, 哲学史上, さんざん論じられてきた問題でもある[*20]．ウィトゲンシュタインやいわゆる論理実証主義者たちは, 数学的知識は言語の知識を確認するものに過ぎず, なんら新しいことを与えないものだと考えた．だから彼らによれば, 数学的知識は古い知識である（例えば [6] 参照)．対して, カントやポアンカレは, 自然数論の知識は新しい知識であると考えた．彼らによれば, 自然数論の知識を正当化する上では, 概念の中には含まれない, ある種の “直

---

*18 本文では軽く流したが, 実はこの前提は大きい．ある種の形式主義者にとっては, 数学活動は単なるゲームであり, そこに真性の認識論的活動は全く含まれていないだろうから．

*19 本文では, 「もっぱら概念操作だけによって数学的知識を獲得できる」ということを, 殆ど議論なしに実感に訴えて前提している．だがこの実感を共有しない人, あるいは, 疑えないほど強い実感だとは考えない人もいるかもしれない．そういう人は, 数学的知識獲得過程において, 概念の外の何か, 擬似経験的な心的状態が, 本質的に働くと考えることになるだろう．たとえば「$2+3=5$」のような極めて初等的かつ特称的な自然数論の知識であれば, 経験に近い何か（“形式的直観”？パターン認識？）がその獲得において重要な働きをなすと考えることは, そこまで不自然ではない．問題は, この考えをもっと巨大な数や, あるいは帰納法で正当化されるような一般的な知識にまで拡大できるかどうかである．感覚的表象能力を超える巨大な数量についての知識, あるいは数一般についての知識を得るために, 本質的な役割を果たすような直観とは、いったいどんなものだろうか．この問に答えることを, 前もって不可能だと言うことはできない．だが, ここに大きな困難があるのは確かだろう (この困難を指摘した古典的著作として [5] を参照)．そういうわけで, とりあえずここでは, 「もっぱら概念操作だけによって数学的知識を獲得できる」ということを前提させてもらう．

*20 ここで分析/総合という枠組みを使わなかったのにはもちろん理由がある．我々はこれから数学的知識が新しい知識の側面を持っていることを見るが, しかし, 数学的知識が, 何か概念外の事実を教えてくれるという意味で総合的だと言いたいわけではない．つまり, 我々は数学的知識が新しい知識とみなせると主張するが, 総合的な知識であると主張するわけではない．なので, 分析/総合でなく, 古い/新しいという区別を使った．

観” が本質的な要素として働く. この “直観” こそが, 数学的知識が我々に与える新しいものである. 従って数学的知識は新しい知識であることになる ([7][13] を参照).

しかしこのどちらの説も, 我々の実感を満足させるものではないだろう. 前者は, 数学が何か新しいこと, 意味のあることを与えてくれるという我々の実感を無視した理論である. 後者は, もっぱら概念操作だけで知識を獲得できるという（“直観” のような擬似経験的なものが働くことがあったとしても, それは派生的な役割を果たすだけであり, 必須の構成要素ではない）という, 数学の性格を無視している. 我々が求めているのは, 概念操作の特権的な重要性と, 数学の生産性, この両方を認めるような仕方での数学的知識のあり方の説明である.

私の考えでは, 可述算術はまさしくこのような説明を与えている. 可述算術は, 予め決められた公理の中での証明ではなく, 概念の改訂を通して, 新しい定理を認めていくものであった. この過程は, もっぱら概念の操作が中心となるものでありながら, しかし, 認識者に新しいものを与えるものにもなっている.

可述算術において新しい定理—A としよう—を示すときには, A が成り立つような数だけに, 自然数の概念を限り, 理論を更新していく. この過程の中には, もっぱら概念的な操作だけが含まれている. 経験や直観のような要素は, 派生的な役割を果たすことはありうるかもしれないが, しかし本質的な登場人物ではない.

一方, 定理 A を示すこと, A の知識の獲得には, 単なる手持ちの概念の分析に限られない要素が含まれている. それは, 自然数概念の改訂という側面である. つまり, 古い自然数概念から, 新しい自然数概念へと, 自然数概念の改訂が行われる. 従って, <u>自然数概念について</u>（新しい自然数概念について, ではなく）A が成り立つという知識は, 単に自然数概念の分析だけによっては得られることではない. この知識の獲得には, 今までの自然数概念になかった新しいものを, 自然数概念に付け加え, より概念を豊かにしていく過程が含まれている. よって, その意味で, A の知識は我々に新しいものを与える.

つまり, ネルソンが可述算術において描く数学的知識の獲得過程のモデルは, そこに含まれる “概念の改訂” という独特なステップを通して, 数学的知識について我々が実感しているところの特殊な性格を, よく説明してくれるものになっているのである.

もちろん, 可述算術によってカバーできる自然数論の範囲は限られているから, 古典的な自然数論の全域にこの考え方をそのまま当てはめることはできない. 従ってこの説明を受け入れるなら, a.) 非可述な自然数論については別の説明を用意するか, b.) なんらかの方法で可述算術における説明の仕方を非可述な自然数論にまで拡大するか, c.) 非可述な自然数論の知識は端的に無視するか, という三つのどれかを選ぶことになる. ここでどの道を選ぶのが適切なのかは定かではない. ネルソンの改訂主義的なモチベーションを共有する人なら c.) をためらいなく選ぶだろうが, それなりに保守的な人にとっては, a.) か b.) を選び, 非改訂主義的な立場にネルソンの描像を接続する道が魅力的だろう. あるいはネルソンが提示したモデルとは全く異なる仕方で, 数学的知識の性格をうまく説明できる可能性もある. だが, そうした疑問への答えを保留したとしても, ネルソンの可述算術は, 数学的知識のもつ性格を説明する少なくとも一つの有望なやり方を, その大筋において示してくれているのは確かではないだろうか.

参考文献

[1] Buss, S. 1986, *Bounded Arithmetic*, Bibliopolis.

[2] Buss, S. 2006, Nelson's Work on Logic and Foundations and Other Reflections on Foundations of Mathematics, in *Diffusion, Quantum Theory, and Radically Elementary Mathematics* (ed. Faris W.), Princeton University Press, 2006.

[3] Dummet, M. The Philosophical Significance of Gödel's Theorem, *Ratio* 5,140-155.

[4] Feferman, S. 2005, Predicativity, in *Handbook of the Philosophy of Mathematics and Logic*, (ed. S. Shapiro), Oxford University Press.

[5] フレーゲ,G. 2001,『算術の基礎』, 勁草書房.

[6] 飯田隆. 1989,『言語哲学大全　意味と様相 (上)』, 勁草書房.

[7] カント, I. 1961,『純粋理性批判（上）』篠田英雄訳, 岩波書店.

[8] Nelson, E. 1986, *Predicative Arithmetic*, Princeton University Press.

[9] Nelson, E. 2005, *Completed versus Incomplete Infinity in Arithmetic*, his talk at Infinity in Science, Philosophy, and Theology, Vatican City. https://web.math.princeton.edu/ nelson/papers/e.pdf

[10] Nelson, E. 2007, *Hilbert's Mistake*, sildes for his talk at the Second New York Graduate Student Logic Conference, New York. https://web.math.princeton.edu/ nelson/papers/hm.pdf

[11] Nelson, E. 2011, Warning Signs of a Possible Collapse of Contemporary Mathematics, in *Infinity: New Research Frontiers* (eds. Heller, M. and Hugh, W.), Cambridge University Press, 2011.

[12] Parsons, C. 1992, The Impredicativity of Induction, in *Proof, Logic, and Formalization* (ed. Detlefsen, M.), Routledge, 1992.

[13] Poincare, H. 1905, *Science and Hypothesis*, translated by William John Greenstreet, Walter Scott Publishing.

[14] Shoenfield, J. 1967. *Mathematical Logic*, Addison-Wesley Publishing Company.

[15] ウィトゲンシュタイン, L. 2003, 『論理哲学論考』野矢茂樹訳, 岩波書店.

第 2 章

線形代数の哲学に向けて　実世界/高等数学への広がり

淡中　圏

線形代数の哲学への道として, 線形代数教育のあるべき姿, 線形代数の実世界への応用, および線形代数からより高度な数学への橋渡し, の三つのテーマについて論考する.

2.1　introduction

現在の科学哲学では, 現場で何が行われているか, 何が行われてきたか, の知識を無視して,「科学とは何か」という疑問に答えることは不可能だ, という認識がようやく広がり始めている（[21] 参照）.

そういう考えのもと, 生物学の哲学や物理学の哲学など, 個別科学に寄り添った哲学が発達し始めている.

しかし, 個人的な感想では, 数学の哲学においては, その認識がまだまだ未発達に見える. なまじ, 論理学的構文論的な取り扱いがやりやすいがゆえに, 現場で人間がやっていることを置き去りにした時代錯誤な論考がはびこっている, ように見える.

この論考は別にそれに一石を投じるつもりがあるわけでは毛頭ないのだが, たとえば, 数学の哲学者が,「線形代数とは何か？」みたいなことを, 熱く語り合っているところなんてみたことないなあ, ということを, これを書きながら少し考えたので, introduction に少し書いてみたのだ.

「線形代数の哲学」. ありだと思うけどなあ.

この論考, 線形代数の哲学を語る前の準備段階として, 線形代数がどう使われているかについて語りたい.

そのために, 現在の線形代数の教授法の重大な欠点の指摘から入る.

それは,「線形空間を最初から基底の入った状態でしか考えない」という悪癖だ.

「基底のついていない線形空間」を考えないとなぜいけないのか, をまず第一節で「数学を使う立場」と「数学自体を研究する立場」の両方から解説した. またそれを踏まえると

早めに圏論的捉え方に慣れておく必要があることも自然に分かることも述べた．教育への提言と大上段に構えて入るが, 実行しようとすると, 高校数学や受験にまで踏み入らなくてはいけないので実効性は薄いことは予め断っておく．

次に第二節では, 線形代数の実世界への応用を, 第三節では, 線形代数から高度な数学への発展を解説する．つまり第一節の 2 つの立場をそれぞれ具体的に掘り下げたものだ．どちらでも, 線形空間を基底ありでしか考えていないと, 大きな壁にぶつかることが見て取れたら, この論考は成功である, といえる．ただし入門書として書いたわけではないので, 知識無しで読めるようには書かなかった（書けなかった）．数学がそこそこ分かる人のための読み物程度である．あしからず．

Appendix1 には, 「線形性」ということの意味することを, 科学全体やソフトウェア・エンジニアリングが直面する複雑性の問題, およびそれに対処するための両者の方法論や組織論について雑多に書いた．ここで科学哲学の話がまた少し出てくる．

Appendix2 には線形代数がその良い例を提供する「圏論的手法」を「不変量を取り出すための手法」と捉えて, 「不変量」という考え方の歴史について軽く触れた．ここでは古代ギリシャ哲学から現代物理学への流れ, そして我々の脳に刻まれた「世界の理解可能性についての期待」との関係が語られる．

アカデミックな意味での哲学には届かなくても, 「UNIX 哲学」などというときの「哲学」にはどうにか届けたらいいな, と考えている．

2.2 線形空間の教育への提言, 基底なしの線形代数の必要性

通常の線形代数の講義では, 線形空間の例として数ベクトルから入る．そして講義によってはこれで全てであったりする．高専で線形代数を教えていた知り合いの話を聞くに, それも仕方がない一面もあるのであろう．大学で数学を専門に学ぼうという人間以外[*1]には, 数ベクトルではない, 任意の線形空間というのは何のイメージもできない存在なのだろう．その知り合いも, 最初から 2 次元と 3 次元の数ベクトル空間だけ出して, その行列式や逆行列の計算以外教えていなかった．

その気持ちは分からないではない．

しかし, それではダメだ, というはっきりした理由がある．なぜなら, **線形代数を学ぶのは，それを使うためだからだ**．線形代数を使うためには, どこかに線形空間がなくてはいけない．しかし, 実際に線形代数を応用するときに, それが分かりやすい形で現れてくれるとは限らない．実際には, 線形空間ではないものを, 「線形空間とみなしてもさほど問題ない」という風に議論するときもある．とにかく, 絶対に言えることは, **現実世界で線形空間と出会うときは，それは数ベクトルという形だけは絶対にとらない**ということだ．だから, 何かが線形空間だと証明するときは, まず抽象線形空間としての定義に合うかどうかをチェックしなくてはいけない．そして, それが有限次元だと証明され, 何か基底を選んだとき, 初めてそれを数ベクトルだと思っていいのだ．だから, もし「線形空間とは数ベクトル空間だ」と思っていたならば, 線形代数を応用する重要な機会を逃しかねない．

だから, 線形代数を応用しようとする人間が必ず覚えておかなくてはいけないことは, 線形空間とは本体, 抽象線形空間, すなわち**単に**和と体によるスカラー倍を持つ代数であ

[*1] 実際にはそういう人間の大半にも

る, ということだ. そしてなんと, 線形空間は全て基底を持つ. よって, 有限次元線形空間は**基底を選ぶことによりなんと数ベクトルと考えて良い**.

数学者を目指していない人間にとって, 線形空間が基底を持つ証明を覚える必要は全くない. しかし, この「なんと数ベクトルと考えて良い」の「なんと」の部分はぜひとも忘れないで欲しい. これはとてもうれしいことなのだ[*2]. そのうれしさを学んで欲しい[*3]. 実際, 環上の加群などの一般化ではこの性質は成り立たない.

そして, もう一つ重要なことは, 先ほどの**基底を選ぶこと**だ.

何らかの基底を選ばないと, 線形空間は数ベクトル空間とはみなせない. 基底を最初から与えられたものと考えては駄目なのだ.

数ベクトル空間しか例を知らないと, 標準基底が最初から与えられている状態でスタートしてしまう. そうすると, 「基底は選ばないといけないもの」という自覚が育たない.

すると, 「問題に合わせて良い基底を選ばないといけない」という重要な意識も育たない. 基底の選び方によって, その線形空間に関する情報がすっきり取り出せたり, 取り出しにくくなったりするのだ.

例えば線形空間に, 一つ線形写像が与えられたとき[*4], その線形写像の作用が一番すっきり見えるのは, どんな基底を取ったときか, と考えると, 対角化やジョルダン標準形の理論が出てくる.

これも数ベクトルしか学んでいないと, 同じ対象を, ためつすがめつ観察している, という感覚が出てこないのではないか, と心配される. 基底を変えてしまうと, 違う対象になってしまう. 対角化した行列は違う行列なのだから, 違う線形写像なのだ, と考えてしまうのではなかろうか.

それでは基底変換が何をやっているのか, そもそも分からなくなってしまう. 基底変換行列が, どちらからどちら向きの写像か？　ということにそもそも混乱しがちなのは, ここに理由がある. ベクトル空間 V に, ある基底 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ と, $\{f_1, \ldots, f_n\}$ を選ぶ. このとき, f_i を $\{e_j\}_{j=1,\ldots,n}$ で数ベクトル表示した, 縦ベクトル

$$v_i = \begin{pmatrix} v_{i1} \\ \vdots \\ v_{in} \end{pmatrix}$$

を横に並べた行列 $A = (v_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ は, 果たしてどちらからどちらへの, 基底変換行列なのか？

[*2] 相手が数ベクトルと行列なら, 手を動かして計算がしやすいし, 今何をやっているのかも理解しやすい. もちろん, そのためには数ベクトルや行列の扱いをしっかり学んでおかなくてはならない. 数ベクトルの扱いと, どう数ベクトルに落とし込むかを, 同時平行的に学ぶべきなの.

[*3] ある種の芸人は, 客にどこで笑えばいいかを学ばせていく. これは, ある文化に参入するための文脈を学ばせていくのだ. それと同様, 数学という文化に参入させるためには, 「どこでびっくりすべきか. どこを喜ぶべきか」を学習させなくてはいけない. 「線形空間は全て基底を持つ」「積分は微分の逆演算である」「熱と運動エネルギーは互いに交換できる」. これらは全て, 本来びっくりして, しかる後に喜ぶべき事実なのに, 教育の順番の不手際により, さも当然であるかのように, 教授されてしまっている.

[*4] 空間に差分系としての構造を入れて考える, ということ

行列の計算をちゃんと手を動かした人間はすぐに分かる．この行列は,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ \vdots \\ v_{1,n-1} \\ v_{1n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ \vdots \\ v_{2,n-1} \\ v_{2n} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v_{n1} \\ v_{n2} \\ \vdots \\ v_{n,n-1} \\ v_{nn} \end{pmatrix}$$

という風に, $\{f_j\}_{j=1,\dots,n}$ による数ベクトル表示を, $\{e_j\}_{j=1,\dots,n}$ による数ベクトル表示に変換しているので, これは $\{f_j\}_{j=1,\dots,n}$ から $\{e_j\}_{j=1,\dots,n}$ への基底変換をしている．初学者はこれがさかさまになりがちだ[*5].

これが分かると, 行列の対角化の際, 基底変換行列 P とその逆 P^{-1} はどちらから挟むのかも分かりやすくなる.

K 線形空間 V の自己準同型写像 F の, 固有値, 固有ベクトルとは,

$$Fv = av \quad (a \in K, v \in V)$$

となる, a と $v \neq 0$ である．これは, F の作用が単なるスカラー倍になるベクトルを探せ, という意味である．そして, F の固有ベクトルのみを集めて V の基底を作ると, F の表現行列は固有値を並べた対角行列になり[*6], これが可能なことを, F は対角化可能だという. 対角化すると F の作用は, それぞれの基底の元ごとに完全に分離されており, 基底の元を一つずつ考えていけば, 作用の詳細は用意に理解できる．これはこの写像を何回も作用させ続けるとどうなるかを考えるときに, ものすごく楽になる（詳しくは後ほど）.

普通, 線形代数の授業で行うのは, 数ベクトル空間 $V = K^n$ に作用する何かの行列 M を持ってきて, それを対角化する, という作業だ[*7]．このとき, 実はすでに基底が与えられている．それはいわゆる標準基底である．そして, 固有ベクトルを横に並べた基底変換行列 P は, V を新しい基底で表示しなおした数ベクトル空間 $W = K^n$ から, V への変換行列である．さらに, M を V の自己準同型写像と考えると, これは対角行列 D になっている．これを図式にすると,

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{M} & V \\ \uparrow_P & \circlearrowleft & \uparrow_P \\ W & \xrightarrow{D} & W \end{array}$$

となる．つまり, $D = P^{-1}MP$ となるのだ[*8].

ところが, 教科書に載っている説明はこれとは違う.

$$Mu_1 = \alpha_1 u_1, Mu_2 = \alpha_2 u_2, \dots, Mu_n = \alpha_n u_n$$

[*5] 案ずるに, この数ベクトル表示を, 表示ではなく V の元そのものと考えてしまうと, 左側を $\{e_j\}_{j=1,\dots,n}$ 自体, 右側を $\{f_j\}_{j=1,\dots,n}$ 自体と考えてしまうのであろう．これはあくまで表示だ, と考えることが肝要である.

[*6] 行列の基底への作用が単なるスカラー倍であることが, その基底での表現行列が対角行列であることと同じことを意味する, ということももしかしたら初学者には難しいかもしれない．これに関しては, 必要なことはお題目ではなく, 手を動かして慣れることだ.

[*7] このときも, これが上の一般例の特殊な場合であることを理解したい.

[*8] このように見ると, 行列の対角化は, 抽象的な線形写像の対角化と比べて, 二度手間でうっとうしいことが分かる

より,

$$M(u_1, 0, \ldots, 0) = (u_1, 0, \ldots, 0)\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

$$M(0, u_2, \ldots, 0) = (0, u_2, \ldots, 0)\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$M(0, 0, \ldots, u_n) = (0, 0, \ldots, u_n)\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

となり, これを全て足すと,

$$MP = PD, \text{ただし } P = (u_1, u_2, \ldots, u_n),\ D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \text{\huge 0} \\ & & \ddots & \\ & \text{\huge 0} & & \ddots & \\ & & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

となるので, それより $D = P^{-1}MP$ とするのが, 一般的な説明だ.

これに関しては,「それはそうだよね」としか言いようがないのだが, この説明では基底変換をしていることがごっそり抜けてしまっており, 結局のところが理解できていないのであとで苦労することになる.

ただ上の説明にもまだ問題もある, $V = K^n$ と $W = K^n$ の違いが良く分からない. 両方 K^n と書いてしまうと, それこそ意味不明になるが, かといって V と W は全然違うものでもない. これらはあくまで同じ線形空間の, 違う基底を取ったことによる違う表示であるはずなのだが, それが分からないから, 基底変換していることが良く分からない.

実はすでに圏論的考え方を導入せざるを得ない地平に来ているのだが, それをサボっているから, よく分からなくなってしまうのである.

基点付き集合 (S, p) は, 集合の終対象 1 から S への射と考えたほうがシンプルである. 線形空間の圏の終対象はゼロ対象なので同じことはできないが, 似たことはできる.

K 線形空間 V のベクトルを一つ選ぶことは, K ベクトル空間の成す圏の特別な対象 K から V への射

$$< v >: K \to V, 1 \mapsto v$$

を選ぶことと対応している. すると当然ベクトル（相異なるとは限らない）を二つ選ぶことは, $< u >: K \to V, 1 \mapsto u$ と $< v >: K \to V, 1 \mapsto v$ の二つを選ぶことと対応するが, これは直和の普遍的性質より,

$$\begin{array}{ccccc} & & V & & \\ & \nearrow_{<u>} & \uparrow_{<u,v>} & \nwarrow_{<v>} & \\ K & \xrightarrow{i_1} & K^2 & \xleftarrow{i_2} & K \end{array}$$

という図式を可換にする唯一の射 $< u, v >: K^2 \to V$ を選ぶことと同じことである[*9]. 同様に n 個[*10]選ぶことは, K^n から V への射を選ぶことに対応している.

そしてこの射が同型になっているとき, 特にこの射を**基底**と呼ぶことにすればよい[*11]

すると, 先ほどの二つの基底 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ と, $\{f_1, \ldots, f_n\}$ は, 二つの同型射 $e : K^n \to V$ と, $f : K^n \to V$ になる. このとき, V の元を数ベクトル表示する写像は, それぞれ e^{-1} と f^{-1} になる. すると, 上の f から e への基底変換行列は, 単なる $e^{-1} \circ f$ である. A の作り方は, 標準基底の f による像を, e で数ベクトル表示したのだから, 当然である.

さて, これによって, 行列の対角化の議論を見直そう.

まず用意されているのは, 基底の与えられた線形空間, $e : K^n \to V$ と, V の自己準同型 $F : V \to V$ である. すると,

$$\begin{array}{ccc} K^n & \xrightarrow{M} & K^n \\ \downarrow_e & \circlearrowleft & \downarrow_e \\ V & \xrightarrow{F} & V \end{array}$$

として, F の e による表現行列 M が決まる.

そこに, 新しい基底 $f : K^n \to V$ を与えるのだ. すると, 図式は,

$$\begin{array}{ccc} K^n & \xrightarrow{M} & K^n \\ \downarrow_e & \circlearrowleft & \downarrow_e \\ V & \xrightarrow{F} & V \\ \uparrow_f & \circlearrowleft & \uparrow_f \\ K^n & \xrightarrow{D} & K^n \end{array}$$

となる. この真ん中の行を抜けば, これが先ほどの, 図式になるのだ.

このように, 線形空間を正しく抽象線形空間と見ることにより, 基底を選ぶことの大切さが強調され, 線形空間のさまざまな技法や概念も理解しやすくなる. また, その際, 「基底付きの線形空間」のような対象が, 実は射として考えたほうが筋が良い, というように, 圏論的捉え方が必須になることも注意したい. これは難しさでもあろうが, 障壁を越えれば, それ以前よりもずっと見通しが良くなり, またより高度な概念への竜門を登ったと考えれば, それほど悪い話ではない.

このように, 線形空間を基底なしで考え, 基底を考える際は必ず選んだものとして考える訓練をつむことは, 数学を実世界に応用しようとする科学者工学者的観点からも, 数学自体を目的とする数学者的観点からも, 非常に重要になる.

先ほど書いたことを重要なのでもう一度書くと, それは「重要な線形空間は, 決して基底付き線形空間としては現れない」からである.

しかし数学者にとってはもう一つ重要な点がある. それは, 「環上の加群など, 線形空間の一般化には基底は必ずしも取れない. よって, 基底なしで考えないと, 一般化との関係が掴めない」という点である.

例えば（体 K 上の）二次形式と言われると, どうしても

$$q(X, Y) = aX^n + bXY + cY^2 (a, b, c \in K)$$

[*9] ベクトル空間, より一般に環上の加群の圏で有限の直和は直積と同じになるので, 馴染みのある直積で書いた.

[*10] 無限濃度個でも構わない. ただし射のドメインは直積ではなく直和でなくてはいけなくなることに注意.

[*11] V から K^n への射を選びそうになってしまうかもしれないが, すでに分かるように, こちらの定義のほうが余分だったり足らなかったりして基底になっていない場合まで拡張できるので, 筋がよい. また, こちらにすると, 後々ホモロジー代数などとの相性もよい.

のような式を思い浮かべてしまう（簡単のためにとりあえず二元の場合を書いた）．もちろん, これはこれで大切なのだが, 次へ進むためにはこれを加群の射と見るべきになる.

$$Q : V \to V, v \mapsto q(v) \quad (V \text{ は二次元 } K \text{ ベクトル空間}, v = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}).$$

これは,

$$Q(av) = a^2 Q(v), B_Q(v,w) = \frac{1}{2}(Q(v+w) - Q(v) - Q(w)) \text{ は双線形形式}.$$

を満たしており, このような性質を満たす (V,Q) を二次加群という．注目すべきことに, ここには基底は出てこない．そして基底を一つ選んで, 双線形形式を行列表示してやれば, もとの式が復元できる．つまりこれは二次形式から基底を抜いたもので, 二次形式は二次加群をある基底で表現したものにほかならない.

そしてこちらはこのままの形で, 任意の環上の加群で定義できる.

また二次形式の同値関係などについても, こちらのほうがずっと見通しが良い．二次形式はどの基礎体上考えているかで議論の仕方がかなり変わるが, 式の形だと, どうしてもそれを忘れがちになる．その点こちらは, いつもどの環の上で議論しているのかを意識しやすい．また等方的 (isotopic) など, 重要な概念の多くも, こちらの形のほうが定義しやすいし, 一般の環上にも自然に拡張できる.

同様に行列式やトレースなど, ある値が基底のとり方によらない, ということは, この値が, 一般の環上の加群に拡張できることの強い証拠になる．そのような議論をこなすためにも, 基底を使って定義した概念を, 基底なしで定義し直すことは, 数学を目指す者にとって, 非常に有益な訓練になるだろう*12.

また, 値が基底の選び方によらない, すなわち基底変換群 $\mathrm{GL}(V)$ の作用で不変だ, ということは, それが**不変量**であることを意味する.

このことをしっかり理解したい．そのためにも,「基底は自分で選ぶもの」という感覚が必要なのだ．不変量を求めるためにも, 基底はしっかり選ばなくてはいけないのだ.

また不変量の概念を理解するためにはやはり, 圏論的議論への慣れが必要である．数学における圏の故郷が位相幾何であるのは, とても自然な話で, 圏とは変換（ただし逆変換があるとは限らず、また変換の合成も必ずできるとは限らない）の作用をあらわすための, 装置であり, その目的は変換によって変わらないもの, すなわち不変量を取り出すことだ. そして, 数学において,「ちょっと形を変えても変わらない性質を探す」, すなわち不変量を探す, というメソッドを大々的に取り入れたのが位相幾何だったのだ*13.

ここからは、もう少し具体的なことを述べて見よう.

2.3 線形代数の実世界への応用

2.3.1 差分系および微分系における, 未来予測

線形代数を大学 1 年で学んだ学生に教えると, わりとびっくりされる話題からはじめよう.

*12 そういう意味では二次形式論は格好の素材なので, 数学科ならぜひチャレンジしたい課題だ．しかも数論, 微分幾何学, リー群・リー代数, など様々な分野につながるので無駄になりにくい．私は, 数論出身なので [19] で最初に二次形式に出会った．ここでの議論にも参考にしている.

*13 不変量についてのもう少し突っ込んだ話を Appendix2 に書いた.

彼らが, 大学受験で解いた問題に次のようなものがある.

次の漸化式の一般項を求めよ.

$$a_{n+2} = ba_{n+1} + ca_n, \quad (a_1 = a_2 = 1)$$

この問題の大学受験における正しい解き方は, こうだ.

まず何故かは知らないが, 次の特性方程式と呼ばれるものを解く.

$$x^2 = bx + c$$

この方程式の解を, α_1, α_2 とする（簡単のために, 重解ではないとする）. すると, 二次方程式の解と係数の関係により上の式を,

$$a_{n+2} - \alpha_1 a_{n+1} = \alpha_2(a_{n+1} - \alpha_1 a_n)$$

と変形でき,

$$b_n = a_{n+1} - \alpha_1 a_n$$

とおきなおせば,

$$b_{n+1} = \alpha_2 b_n$$

というただの等比数列となる. 等比数列なら, 高校生にでも一般項が求められ, そこから a_n の一般項を求める, という算段だ.

しかしそもそも, なぜこういう方程式を解くのか, という説明は全くない. こうやるとなぜかうまく行くよ, と教えるだけだ.

このような, そう考える理由などを無視して上から頭ごなしに方法や概念を導入するやり方を, 数学界のジャーゴンでは「天下り」という[*14].

一般的天下りの用法とはずいぶん違うが, あまりやらないほうが良いという空気は共通である. ただ, 時間がない, 余白が狭すぎるなどの, 物理的制限下においては, 便利な手法ではある.

種を明かすとこれは実は, 行列の対角化をしているのである.

大学院まで行くと, 分かっている人も多くなるが, なぜか学部の段階ではほとんど教えられていないので, ここに軽く書いておこう.

上の漸化式は次のように書き換えられる.

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & c \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}.$$

つまり, これは

$$A = \begin{pmatrix} b & c \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と置いたとき, A^n を求める問題に帰着されるのだ.

大学受験の段階では, 行列のべき乗を求める問題[*15]は, ケイリー・ハミルトン方程式を使うこともあるが, よくあるのが, 小問の誘導によって対角化を行うやり方だ.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}$$

[*14] くわしくは数学界のジャーゴンファイルである『数学の儀礼と儀式辞典』[6] を参照.
なお, 私は天下りをするときは, 「出る出るフォイフォイ　降り来るオラクル　天下り！」という呪文を唱えない.

[*15] 今現在, 行列の計算が受験の範囲に入っているかは知らない. 行列は出たり入ったりするので. いやらしい！

なら,

$$P^{-1}A^nP = \left(P^{-1}AP\right)^n = \begin{pmatrix} \alpha_1^n & 0 \\ 0 & \alpha_2^n \end{pmatrix}$$

となるので,

$$A^n = P \begin{pmatrix} \alpha_1^n & 0 \\ 0 & \alpha_2^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

として, 行列のべき乗を求めることができる[*16].

対角化の効能の基本中の基本だが, これも本当は, 線形写像の作用が分離するような基底を選んで基底変換をしていることをちゃんと教えるべきだと思う.

大学数学においては, A の固有方程式 $\det(A - xI) = 0$ を解くことにより, 固有値を求めることから始まる. そしてこの固有方程式を計算してみると,

$$\det(A - xI) = \det \begin{pmatrix} b - x & c \\ 1 & -x \end{pmatrix} = -x(b - x) - c = x^2 - bx - c = 0$$

よって,

$$x^2 = bx + c$$

となるが, これはいわゆる特性方程式そのものである.

そして, この場合の固有ベクトルは（固有値が違う値とすると）,

$$\begin{pmatrix} b - \alpha_1 & c \\ 1 & -\alpha_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b - \alpha_2 & c \\ 1 & -\alpha_2 \end{pmatrix}$$

のそれぞれの表す連立一次方程式の解なので,

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である. そして, もともとのベクトル $\left(\begin{smallmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{smallmatrix}\right)$ のこの新しい基底における表示を求めたければ, 作用させるべきなのは,

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

だが, この場合スカラー倍は無視してよいので, 結局

$$\begin{pmatrix} 1 & -\alpha_2 \\ -1 & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

となる. これを作用させたものは,

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} - \alpha_2 a_n \\ -a_{n+1} + \alpha_1 a_n \end{pmatrix}$$

で, これに A を作用させると, 上の成分が α_2 倍になり, 下の成分が α_1 倍になる. これはまさに, もともとの解法そのものである[*17]

このように考えれば, 大学受験の非常に内容のない問題が, 大学の数学に繋がっていることが分かる. この気付きの機会を失っているのは, 非常に残念である.

また, この問題は, 実世界への数学の応用の非常に重要な例になりうる.

[*16] これをちゃんとした線形代数抜きに教えるのも, 相当無茶な話だ

[*17] なお, 重解の場合に, 等差数列に帰着させるのは, ジョルダン標準形の議論である. また, 一次分数変換を, やはり固有方程式を解いて, 行列の対角化に帰着させる問題も, 大学受験の範囲に実は出ている.

三項間漸化式の有名な例であるフィボナッチ数列が, ウサギの繁殖に関する思考実験からもたらされたように, 数理生物学*18などのジャンルで自然界をモデル化するときに, 離散力学系が出てくることは多い.

そして, その中には次のステップへ写るための写像が線形であると考えても, 問題がないものが少なからずある*19

それらは全て, 上記の漸化式と同様に, ある行列 A の作用として表示でき, そして座標変換 P によりジョルダン標準形

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} J_1 & & & & \\ & J_2 & & \text{\huge 0} & \\ & & \ddots & & \\ & \text{\huge 0} & & \ddots & \\ & & & & J_r \end{pmatrix} \quad \text{ただし } J_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & 1 & & & \\ & \alpha_i & 1 & \text{\huge 0} & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & \text{\huge 0} & & \alpha_i & 1 \\ & & & & \alpha_i \end{pmatrix}$$

に変形できる.

これも, 対角化ほどではないにしろ, 非常に扱いやすい形なのだ.

まずこの J_i をジョルダンブロックと呼び,

$$\begin{pmatrix} J_1 & & & & \\ & J_2 & & \text{\huge 0} & \\ & & \ddots & & \\ & \text{\huge 0} & & \ddots & \\ & & & & J_r \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} J_1^n & & & & \\ & J_2^n & & \text{\huge 0} & \\ & & \ddots & & \\ & \text{\huge 0} & & \ddots & \\ & & & & J_r^n \end{pmatrix}$$

なので, ジョルダンブロックのべき乗を求めればよい.

そして一般に, 行列が

$$J = \alpha I + N \text{ ただし, ある } k \in \mathbb{N} \text{ があって, } N^k = 0$$

と, スカラー行列とべき零行列 N の和に書けるなら,

$$J^l = \alpha^l I + l\alpha^{l-1}N + \cdots +_l C_{k-2}\alpha^{l-k+2}N^{k-2} +_l C_{k-1}\alpha^{l-k+1}N^{k-1}$$

---

*18 数学に重きを置くときは生物数学と言うこともある

*19 実際には, 我々が結局線形なものしか理解できない, と言った方が正解かもしれない. だから, 科学の中から例を探すと, ほとんどが何らかの意味で線形近似できるものばかりになる. 数学内部でも, このことはよくおきる現象で, 非線形なものを何らかの意味で線形代数に帰着することにより, 理論が大きく進展することが良くある. 微分なんてのは, 非線形なものの線形化の典型であるし, グロタンディークのコホモロジー論は, 全てを線形代数に帰着させせようという, 強力な哲学に裏打ちされている. 一時期, カオスやフラクタルなど, 非線形な現象の研究が注目されたのは, 門外漢が騒いだように「科学にも分からないことがある, 予想できないことがある」からではなく, 非線形な性質の線形化の技法（ウェーブレットなど）が発達して, 今まで視野の外にあった非線形現象の理解が深まったからである. しかし, この**線形なもののみが人間に理解できる**というテーゼは哲学的に議論を呼ぶ解釈ができるかもしれない. 統計学などにおいて, 正確にはどう考えても正しくないことが分かっているにもかかわらず, 近似的に十分正しい可能性が高い仮説をデータによって確かめる, ということをすることがある（たとえば, 二つの耕作地で, 収穫高が等しい, という仮説）. これは, 「科学が真実を求めている」ということの反証だといわれることがある. むしろ人間にとって取り扱いやすいデータを求めているのであって, 科学を左右しているのは, 世界の都合ではなく, 人間の側の都合だというわけだ. 上記の「線形のテーゼ」にも同様の議論に使える可能性が高い. 世界が線形ではないことは, 我々は痛いほど知っているが, 我々はその中から, 線形および, 線形近似が可能なものしか理解できない. よって, 科学は世界の真理を求めているわけではなく, 線形な予想可能なものを調べているに過ぎない. 予想可能性こそ, 科学の目的である.

これに関連した問題を Appendix1 に書いているのでそちらも読んでください.

となるので[20], N の k 以下のべき乗のみを計算しておけばよいわけだ.

ジョルダン標準形でそれを計算すると, この場合（簡単のために, 4 次の場合を考える)

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, N^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

のようになる. これは, 線形写像の基底への作用が, 自分かせいぜいが隣にのみ影響を及ぼし, しかもそのバケツリレーは途中で必ず途絶える, ということを意味している.

よって, 一般項は,

$$J_i^n = \begin{pmatrix} \alpha_i^n & n\alpha_i^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\alpha_i^{n-2} & \dots & {}_nC_k\alpha_i^{n-k} \\ & \alpha_i^n & n\alpha_i^{n-1} & \dots & {}_nC_{k-1}\alpha_i^{n-k+1} \\ & & \ddots & & \\ & \text{\Large 0} & & \alpha_i^n & n\alpha_i^{n-1} \\ & & & & \alpha_i^n \end{pmatrix}$$

となる.

さらに, ジョルダン標準形の重要な応用は, 線形微分方程式の解である.

先ほどまで考えていた差分方程式は, 状態の変化が離散的に起こる場合である. この 1 ステップに掛かる時間を短くしていき, 連続時間にするとこれは微分方程式に変わる.

この世の中は, 連続的に変化するように見える現象がたくさんあるので, 微分方程式でモデル化できる現象も多く, その中にはやはり線形とみなせる現象がたくさんある. 一番手軽な例は, 振幅が小さいときの振り子であろう. この場合は単振動と見なせるので, 加速度, すなわち位置（原点からどれくらい離れているか) の二階微分が, 位置に比例定数負で比例する. 単純化すると,

$$x'' = -x,\ x(0) = x_0,\ x'(0) = x_1$$

となる. これは, 線形微分方程式の, 二番目くらいに簡単な例であろう. 線形微分方程式は, 線形差分方程式のほとんど同じ議論で行列の作用で表せる. この場合,

$$\begin{pmatrix} x'' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ x \end{pmatrix}$$

となる. これが, 一階の微分方程式の場合 $x' = ax, x(0) = x_0$ であり, この解は, $x_0 e^{at} = x_0 \exp(at) = x_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a^n t^n$ である. 同様に, 微分方程式

$$v' = Av, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, v' = \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix}$$

の解は,

$$\exp(tA)v(0) = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n t^n\Big) v(0)$$

[20] もちろんここで, ${}_nC_m$ は $n \geq m$ のときは $\dfrac{n!}{(n-m)!m!}$ であるが, これを $n < m$ のときにも, ${}_nC_m = 0$ として拡張している.

となり, また,

$$\exp(tPAP^{-1}) = P\exp(tA)P^{-1}$$

が成り立つ.

ここでも, A のべき乗を求める問題が出てくるので, ジョルダン標準形が役に立つ. 実際,

$$\exp(tJ) = \begin{pmatrix} \exp(tJ_1) & & & & \text{\huge 0} \\ & \exp(tJ_2) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & & \exp(tJ_2) \end{pmatrix}$$

であり, 上でのジョルダンブロックのべき乗の一般項を使うと,

$$\exp(tJ_i) = \begin{pmatrix} e^{t\alpha_i} & \frac{t}{1!}e^{\alpha_i} & \frac{t^2}{2!}e^{\alpha_i} & \cdots & \frac{t^k}{k!}e^{\alpha_i} \\ & e^{t\alpha_i} & \frac{t}{1!}e^{\alpha_i} & \cdots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{\alpha_i} \\ & & \ddots & & \\ & \text{\Large 0} & & e^{t\alpha_i} & \frac{t}{1!}e^{\alpha_i} \\ & & & & e^{t\alpha_i} \end{pmatrix}$$

となる.

さきほどの振り子の線形近似の場合,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

の固有方程式は, $x^2 + 1 = 0$ なので, 固有値は $i, -i$ で, 固有ベクトルは, $\binom{i}{1}$ と $\binom{-i}{1}$ で, よって,

$$\frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

となり,

$$\begin{aligned} \exp(tA) &= \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} & -\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} \\ \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} & \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって, この微分方程式の解は, $x_1 \sin t + x_0 \cos t$ となる.

普通大学の数学の授業では, 教えてもここまでだが, ここには実は重要な含意がある. これは数学を実世界に応用することの, とても基本的な例題なのだ.

何か, 差分方程式もしくは微分方程式でモデル化できる系があったとしよう. その系が時間に従って, どのように発展するか, ということに興味を持つことは自然である. もし, その方程式が線形, もしくは説得力のある線形近似を持つならば, この答えは, 固有値を求めることに帰着される. すべての, 固有値の絶対値が 1 未満ならば, その系は次第に安定して定常状態になる. それはジョルダン標準形のべき乗の一般項, および指数関数を見れば明らかである.

逆に, もし一つでも絶対値が 1 より大きい固有値があり, その作用する成分が 0 でないならば, その成分はどこまでも大きくなってしまう. もちろん, 自然界においてそのようなことはまず起こりえないので, どこかの時点でこのモデルが実際の世界の近似とは言えなくなってしまい, 新しいモデルが必要とされる*21. そして, もし, 固有値の絶対値がちょうど 1 なら（振り子の例）, それが作用する要素は周期的に振動することがわかる.

これは, 『全地球史解読』[10] の第一章に書かれている内容である.

このように, 何に意味があるのか分からず解いていた漸化式の問題は, 地球の歴史について考えるための重要な手法と密接に関わり合っているのだ.

もちろんこれは環境問題など, 我々にとっても身近で差し迫った問題と繋がっている.

2.3.2 Google の Page Rank

次に, 我々が普段使っている Google 検索が固有値固有ベクトル問題を解いていることと同じだということに軽く触れよう. この節は『集合知プログラミング』[18] 第 4 章を参考にした.

Google が革命的であったのは, ページの重要度を探るのに, ページの内容を調べる必要などない, という着眼点だ（もちろん実際には内容も調べている）. ケインズが投資をするのに, 値段の上下（一種の投票）だけを頼りにしたように, Google もページの重要度を調べるのに, 内容ではなく, 一種の投票を頼りにする.

まるで, 重要だから投票されるのではなく, 投票されるから重要なのだ, とでもいうように振る舞うのだ.

仮に, すでに何らかの基準により（でたらめでも何でもいい）, ウェブページに重要度が点数として割り振られていたとしよう. 仮に 6 点とする.

そしてこのページが 3 つの別のページにリンクを張っているとする. すると, このページはそれらのページに自分の点数をリンクの数で割った数字を分け与えるのだ.

つまり, 重要なページからリンクを張られているページは重要なページであり, ただしリンクがたくさん張られている場合は, 重要度は分散する, と考えているのだ.

この場合は, 2 である.

これをすべてのページで行えば, 次のステップにおける重要度が割り振られたことになる.

これは行列で表現できる.

たとえば, www が次のような小さいものであったとする.

$$\begin{array}{ccc} A & \leftrightarrows & B \\ \downarrow & \nwarrow\!\!\!\!\swarrow & \downarrow \\ C & \rightarrow & D \end{array}$$

そして, 各サイトのある時点での重要度を, サイトの名前と同じ変数で表すと, 次のステッ

*21 たとえば, まず宇宙に散らばる塵を最小単位にしたモデルを作ってそれが衝突しあって, 大きくなっていくシミュレーションをし, 次に, 塵が固まった岩を最小単位にしたモデルを作り, 惑星の誕生をシミュレーションし, 最後に, 惑星を最小単位にした系を作る, という流れである. このように, モデルからモデルへと渡り歩くことを, **シナリオ**という.

プにおける重要度は,

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix}$$

となる. これは, グラフの重み付きの隣接行列と呼ばれるものである.

そして, 今必要なのは, 重要度の点数ではなく, ただ順位なので, このような変換を施しても, 順位が変わらないような重要度の配分を見つければいいのでは, というのが一つの考え方になる. たとえば, すべての点数が一斉に 2 倍 3 倍になっても, 順位付けには影響しない.

よって, 固有値が正の実数である固有ベクトルを求める問題に帰着されるのだ.

これは言い換えれば, $n \times n$ 行列を $n-1$ 次の射影空間に作用させたときに, 固定点を求めよ, という問題とほぼ同じだ.

実際には, 縦と横が www のページの数の行列の固有ベクトルを計算で求めるのは不可能なので, 固定点を求める際の定石に則って, 何らかの数字から初めて, 値が十分に安定するまで作用させ続けることによって, 求める.

しかし, ここでも当初はベクトルとみなしてはいなかったものを, ベクトルとみなすことにより, 問題が解決される, という流れが観察されるであろう.

2.3.3　ウェーブレットによるノイズ除去, または輪郭線抽出

固有値固有ベクトルばかり注目するのもあれなので, それ以外の例も考えてみよう. この節は『ウェーブレット』[1] を参考にした.

もう一度, 実世界に線形代数を適用する準備の流れを確認しよう.

まず世界から, 線形空間と見なして良さそうなものを選ぶ. 次に, その線形空間と見なしたものが有限次元であることを確かめる. そこまで行けば, 基底を選ぶことで, **なんと**これは数ベクトルと見なしてよいことになるのだ.

これを, 圏論の言葉で言い換えると, 有限次元ベクトル空間を対象とし, 線形写像を射とする圏は, 有限次元数ベクトル空間を対象とし, 行列写像を射とする圏と, 圏同値である, ということである.

これは, 二つの圏が同じだということではないし, それどころか同型ですらない. 例えば, これを一次元の対象のみに制限すると, 一次元ベクトル空間の圏と, 対象が K のみで, 射が K の元によるスカラー倍のみの写像である圏が圏同値になってしまう. 片方の対象は, （何らかのユニバースに制限することにより）無限集合であるが, もう片方の対象はなんと一個である.

ちなみにこれが小学生の時にやった, 「単位の変換」である. 全ての「足せて」, 「連続に増減できる」ものが「数」で表せる, ということは, 決して自明なことではなく, しかも定数倍で, 任意の別の数による表し方に変換できる, というのは結構難しい技術なのである. たとえば, 100mL と 1L なら 1L の方が多いと判断するためにやっていることは, まさに基底変換なのだ. 小学生が悩むのもむべなるかな.[*22]

そして n 次元 K 線形空間は, K^n と同型だから数ベクトルだなんて思ってしまうと, そ

[*22] 小学校の単位の問題が圏同値の問題である, という指摘は藤原一宏氏による.

もそも何について考えていたのか分からなくなってしまうし, 圏同値のうま味も行方不明だ.

線形空間でないものを線形空間と見なしたことで, 話が簡単になり, 線形代数の技法が使えるようになり, 数ベクトルではないものを数ベクトルだと見なすことにより, 話が簡単になり, 簡単になったので, いくつか新しい知識が得られ, それを, 数ベクトルの外に持ち出し, さらに線形代数の外にまで持ち出すから, おもしろいのだ. 数ベクトルの中で完結してしまったら何もおもしろくない.

また数ベクトルと見なしてしまうと, どんな基底も結局は同じものになってしまう.

しかし, 数ベクトルの外の世界が見えていたら, 数ベクトルと見なすときに落ちてしまう情報を, 基底の取り方に込めることができるようになる.

それが基底をうまく選ぶ, ということだ. 基底をうまく選ぶためには, 数ベクトルの外が見えていないと困るのだ.

例えば, ノイズを含んだ音波があったとする. 非常に細かいジグザグがたくさんできていて, 本来の情報がつぶされてしまっている.

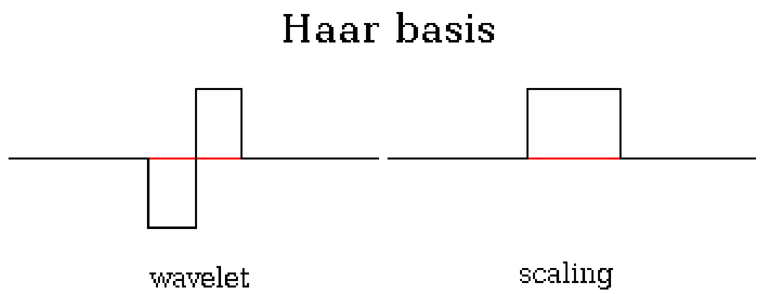
ここから元の情報をできるだけ傷つけずにノイズを除去する, というのは切実な問題である. それをウェーブレットという技術で実現して見よう.

まず, 音波をデジタル化する. すると, これは時間を区切って, 各区間での電位の強さの情報になる. 区間の数は有限であり, それを例えば 1024 個とすれば, これは 1024 個の実数値の組, つまり 1024 次元のベクトルになる.

しかし, これをベクトルと見なしてしまったとたんに, たくさんの情報が落ちてしまっていることに注意. たとえば, 各区間の順番などは, 基底の添字という二次的な情報に押し込められてしまう. ここでさらに別の基底を取ると, 時系列の情報が完全に落ちてしまうこともあり得る. よく知られた例が**フーリエ展開**で, 区間全体における周波数の情報を得るために, 時系列の情報は抜け落ちる. だんだん周波数が上がっていく波などを分析しようとしても, うまくいかないのだ.

ウェーブレットはそのような問題を解決するために開発されてきた.

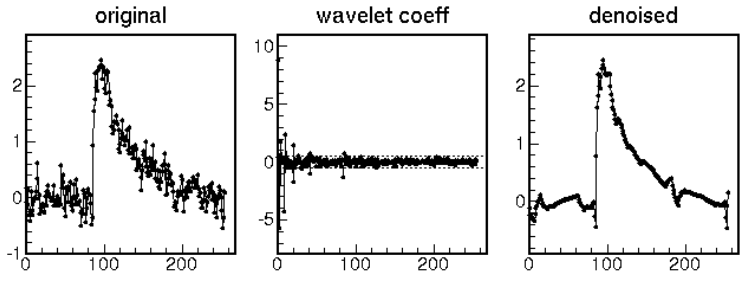
ここで, 一番簡単な離散ウェーブレット, ハール・ウェーブレットを考えてみよう.



のような形のパルスを 2 ピクセルずつ横にずらしていって, 基底を構成する[*23]. 左側をウェーブレット・ベクトルと呼び, 右側をスケーリング・ベクトルと呼ぶ.

ここで, 次の左側のグラフの様に, ノイズの加わった波をこのベクトルの一次結合の形に表す.

[*23] 図は http://www.thepolygoners.com/tutorials/dwavelet/DWTTut.html のものを加工して使っている.



すると, これはこのグラフを意味するベクトルを, ウェーブレット・ベクトルの一次結合であるベクトルと, スケーリング・ベクトルの一次結合であるベクトルの直和に分解していることになる*24.

そして, スケーリング・ベクトルの係数は隣り合ったピクセルにおける波の高さの平均を意味し, ウェーブレット・ベクトルは隣り合ったピクセルにおける波の高さの変化を意味している*25.

つまり, この基底は, 単なる線形空間と考えてしまったときに抜け落ちてしまった, 時間の順番の情報, つまり時間連続体の位相の情報をもう一度付加しているのだ.

細かいテクニックはいろいろあるのだが, たとえば一番単純なことを考えると, ここで, ウェーブレット・ベクトルの情報を全て捨てて, スケーリング・ベクトルの一次結合だけを取り出してみよう.

もし, 本来の情報が短い時間で激しく変化しない, と十分に信じられるなら, ノイズの情報はウェーブレット・ベクトルに集まり, スケーリング・ベクトルはよりなだらかな本来の情報が現れてくる, と考えられる.

今回は一次元で考えてみたが, これは高次元でもそのまま使え, 特に二次元の場合は, 画像解析に応用できる. 画像からノイズを消すことはもちろん, 逆にウェーブレット・ベクトルの持つ情報に注目して, 情報が大きく変化している境界の曲線を取り出すことができれば, 画像から輪郭線を取り出して, 物体を認識する重要な情報を取得することができる.

2.3.4　その他の例

神経細胞のモデルである, ニューラルネットワークも, 基本的なところでは線形代数を使っている. 特に簡単なものを考えると, 一つのニューロンは, w_i で重み付けされた N 個の入力 x_i の合計が h を越えたら, ニューロンが発火する, というモデルにできる.

この条件は

$$\sum_{i=1}^{N} w_i x_i > h$$

と書くと, これは単なるベクトルの内積であることが分かる.

たとえば, この入力を「メールの中に含まれるさまざまな単語の数」とし練習問題を解かせながらなんらかの方法で学習させていけば, 迷惑メールのフィルタリングをすることができる.

もちろん実際には, こんなに簡単にはいかず, 入力を非線形な関数（カーネル関数）で変

*24　グラフは東北大学ニュートリノ科学センター (http://www. awa. tohoku. ac. jp) の http://www.awa.tohoku.ac.jp/ sanshiro/kinoko/Usage/Usage.html から引用した.

*25 微分に似ていると思ってくれると, 先生は喜ぶ.

換したり（SVM のカーネルトリック）, この出力を ON/OFF ではなく, 微分可能な連続関数（シグモイド関数が良く使われる）にして学習が伝播するようにし（バック・プロパゲーション）, 何層も積み上げげたり（ディープラーニング）, 網目状に絡みあげたり（ボルツマンマシン）, いろいろと工夫するのである.

しかし, ここにも, 我々がコントロールできるものは, 結局線形なものだけであり, どうにか線形なものに帰着させよう, というプロジェクトが垣間見える.

2.4　高等数学への道

2.4.1　可換環論への一般化, 特に単項イデアル整域上の単因子論について

線形空間には基底がある. これを言いかえれば線形空間は全て, ある集合による K 上の自由加群である.

これをホモロジー代数の初歩の, 非常に自明な部分である, と考えることは, その後の発展に上手く繋がっていいいと思う.

さて, もう一度確認すると, 全ての有限次線形空間に基底があることは, 任意の有限次線形空間 V に対して, 同型 $f : K^n \to V$ がある, ということを意味している.

これを環上の加群に拡張したい. すると「有限次元」に対応する概念は「有限生成」である. そして次は自明に成立する.

環 R 上の有限生成加群 M に対し, 全射準同型 $f : R^n \to M$ がある.

しかし, これは単射とは限らない. たとえば, $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/(l)$ などは単射なわけがない.

線形代数との類推をできるだけ使いたいと思うなら, これが単射からどれだけ離れているかを測ることが肝要である.

それはこの f のカーネル $(f) = \{r \in R^n | f(r) = 0\}$ である. これもまた R 加群になっている.

よって, この $\ker(f)$ を理解すれば, M が理解できることが分かる. 先ほどの $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/(n)$ ならば, カーネルは (l) であり, これは $\mathbb{Z}$ 自由加群でありよく分かるので, 元の加群も良く分かるものだといってよいわけだ.

すると, ここで一見スタートに戻ったように見える. 調べる対象が M から $\ker(f)$ に変わって, 同じことがはじまるように.

しかし実は, スタート地点に戻れているとは限らないのだ. なぜなら $\ker(f)$ が M と同じように有限生成だとは全く限らないからだ.

これが成り立つために必要な仮定が, R がネーター, すなわち全てのイデアルが有限生成である, ということである. すると, 有限生成加群の部分加群が有限生成になるので, $\ker(f)$ も有限生成であり, 同様の議論により, 全射準同型 $g : R^m \to \ker(f)$ ができる. これが単射なら, ここで終り, そうでないなら, $\ker(g)$ について同様の議論をする.

これをどこまでも繰り返すと, 次の長完全系列が構成される.

$$\cdots \to R^{r_2} \to R^{r_1} \to R^{r_0} \to M \to 0.$$

これを, M の自由分解と呼ぶ.

ベクトル空間に必ず基底があるということは, この分解が最初の一個で止まることを意味している.

自由加群は射影加群と呼ばれるものの一種なので, この分解は実は射影分解と呼ばれるものの一種である.

そして,

$$0 \to R^{r_n} \to \cdots \to R^{r_2} \to R^{r_1} \to R^{r_0} \to M \to 0.$$

という形の射影分解を, 長さ n の射影分解といい, M の射影分解の長さの最小値を, M の射影次元といい, R 加群全体における射影次元の最大値を, R の**大域次元**という.

よって, ベクトル空間に必ず基底があることは, 体の大域次元が 0 であることを示している. これは体を幾何学的に捉えようとすると, 点にあたる存在になる, ということと強く関係している*26.

可換環論において, 体の次に簡単な対象は何であろうか.

可換環論の始まりは, デデキントによる整数環 $\mathbb{Z}$ の研究とヒルベルトによる多項式環 $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ の研究から始まった. 数論と不変式論という別々のジャンルにおいて, 同じ手法が使えることが発端なのだ*27.

なので, 体の次に簡単な対象は $\mathbb{Z}$ と $K[x]$ と考えるのが妥当であろう*28.

この二つはどちらも P.I.D.（単項イデアル整域）である. そして, P.I.D. 上の加群について考えるのであれば, 当然 P.I.D. 上の行列（この場合は任意の有限生成加群ではなく, ただ有限生成自由加群同士の間の射のみを表現している）について, 体上の行列を調べたように調べないといけない.

定理（P.I.D 上の単因子論）*29　A を P.I.D.R 上の行列とすると, A に初等変形を施すことにより,

$$\begin{pmatrix} d_1 & & & & & & \\ & d_2 & & & & \huge{0} & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r & & & \\ & & & & 0 & & \\ & \huge{0} & & & & \ddots & \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

---

*26 現代数学において, 何度も観察される現象に, 幾何的対象と関数環の双対性がある. 集合の特性関数や, 論理学の命題と外延の関係や, 位相空間におけるウリゾーンの距離化定理などは全てその初等的な現れである. 高等数学においては, 多様体など, 幾何的対象を直接考えるのではなく, その上の, その対象と双対的になるような適切な関数の層を考えることが多い, すると, 関数は環をなすので, 線形代数やその拡張である環上の加群の議論が使え, 後で述べる, 層のコホモロジー論などが, この対象の幾何的性質をうまく抽出するのだ. これがグロタンディークがコホモロジー論によって, 線形でない対象の議論も全て, 線形代数に帰着させてしまう手法である.

またこの双対性によって, 本来幾何的対象の上の関数環として導入されたわけではない任意の環を, 何らかの幾何学的対象の上の関数環だと見なそうという手法が, **scheme** 論であり, 詳しくは [3] を参照. 体 K に対応する scheme である $\mathrm{Spec}(K)$ は位相空間としては実際に点になる. ただし局所環付き空間と呼ばれるものになるので, 位相空間としての単なる一点よりは複雑な構造を持つ

*27 整数環と多項式環の間には, 表面的以上の類似があり, たとえば類体論なども多項式環上で構成できる. この類似を深めていくと, 数論幾何の深みにはまり込んでいくことになる.

*28 整数環が簡単だなんていうと, 起こられるかもしれない. ゲーデルの定理を持ち出すまでもなく, 整数環はものすごく難しい. それに対して多項式環が割合簡単だ. 数論幾何では, まず多項式環で証明し, その類似を整数で証明することも多い（もちろん逆もある) が. 多項式が割合簡単な理由は, 体 K の存在によるところが大きい. そこで, 整数環にも何か底になる体があるといいなあ, と考え始めると, 後述の絶対数学の誘惑を感じ始めることになる.

*29 堀田良之『代数入門—群と加群—』[5] より引用. 証明も同書を参照せよ

の形の行列で, 条件

$$(*) \qquad d_i | d_{i+1} (1 \le i < r), \qquad d_r \ne 0$$

を満たすものが得られる．さらに, 条件 (*) の下に, $(d_1, d_2, \ldots, d_r)$ は単元倍除いて一意的であり, これを行列 F の**単因子**という．

これはもちろん, 体上の行列において, ランクが一意的に決まることの拡張である（体では d_i は全て 1 になるので, その数のデータを持っていれば十分だ）．
これを使うと, 次の定理が導ける．

定理 P.I.D.R 上の加群 M には次の自由分解

$$0 \to R^n \to R^m \to M \to 0$$

が存在する．

証明 先ほどと同様に, 自由分解を長さ 1 まで行う．

$$R^l \xrightarrow{g} R^m \xrightarrow{f} M \to 0.$$

この g を初等変形をすることにより, 上の定理の形に直す．これは, R^l の基底 $y_1, y_2, \ldots, y_l$ と R^m の基底を $z_1, z_2, \ldots, z_m$ をうまく選ぶことにより, ある $1 \le n \le l$ がとれて,

$$g(y_i) = d_i z_i \quad (1 \le i \le n), \qquad g(y_i) = 0 \quad (i > n)$$

となることを意味する．よって, $y_1, \ldots, y_n$ で張られる R^l の自由部分加群に g を制限したものを, 新たに g と名づけなおすと, $gR^n \to R^m$ は単射であり, 制限前の g が全射であったことから、この射もまた $\ker(f)$ への全射である．よって,

$$0 \to R^n \to R^m \to M \to 0$$

が構成できた．

これは, P.I.D. の大域次元が 1 以下であることを意味している*30.
上の証明は, 実際にはもう少し強いことを証明できていて, それは P.I.D. R 上の有限生成加群 M は

$$\bigoplus_{i=1}^{l} R/Rd_i \oplus R^r$$

の形に書けることである．もちろんこれは, ベクトル空間が体の直和であることの拡張である．
たとえば $R = \mathbb{Z}$ とすれば, アーベル群は $\mathbb{Z}$ 加群なので, 次が言える．

定理（有限生成アーベル群の構造定理） 有限生成アーベル群 A は次の形の同型を持つ．

$$A \cong \bigoplus_{i=1}^{l} Z/Zn_i \oplus Z^r.$$

---

*30 Spec($\mathbb{C}$) は複素平面にあたるものであり, これは平面とは呼ぶものの $\mathbb{C}$ 上で考えれば 1 次元, つまり直線である．整数環 $\mathbb{Z}$ も Spec($\mathbb{Z}$) は, 素数を並べた一次元の scheme になり, 前にも書いたように, さまざまな意味で体 (特に有限体 $\mathbb{F}_p$) 上の直線に似ている．これを, 何らかの体上の直線と考えるために, **一元体** $\mathbb{F}_1$ もしくは $\mathbb{F}_{\mathrm{un}}$ なる体ならぬ体を探そうというのが, **絶対数学**である．詳しくは [9] を参照.

また, $R = K[x]$（ただし K は代数閉体）とすれば, なんとジョルダン標準形の存在の証明ができる.

代数閉体 K 上の正方行列におけるジョルダン標準形の存在の証明

V を有限次元 K ベクトル空間, F を V の自己準同型とする. V を次の作用で, 多項式環 $R = K[T]$ 上の加群と考える.

$$R \times V \to V, \quad (p(T), x) \mapsto p(F)x, \quad (p(T) \in K[T], x \in V).$$

このとき, V の K 上の基底は明らかに R 上の生成系でもあるから, V は R 上有限生成であり, よって定理より, R加群としての同型,

$$V \cong \bigoplus_{i=1}^{l} K[T]/K[T]d_i(T)$$

が存在する. ここで, $K[T]$ は K 上無限次元ベクトル空間なので, K 上ベクトル空間として有限次元な V は R 加群としての自由部分は持たないことが分かっている. R は直和成分ごとに分離して作用するから, この直和成分一つ一つを別に見ていけばよい. さらに, この直和分解は, 当然 K ベクトル空間としての直和分解にもなっていることに注意.

ここまでは, K は任意の体で大丈夫である. しかし今は K は代数閉体なので, 各 $d(T) = d_i(T)$ は $d(T) = \prod_{j=1}^{r}(T - \alpha_j)^{n_j}$ ($\alpha_j \in K$ は互いに異なる) というように一次式に既約分解することができる. すると, 中国式剰余定理より, 先ほどの同型の直和成分は

$$R/Rd(T) \cong \bigoplus_{j=1}^{r} \quad R/R(T - \alpha_j)^{n_j}$$

とさらに直和分解できる. よって, 先ほどと同じ議論で, 調べるべきものは, 直和成分,

$$W_\alpha = R/R(T - \alpha)^m \quad (R = K[T])$$

への T の作用のみである.

W_α の K ベクトル空間としての基底を,

$$e_i = (T - \alpha)^{m-i} \mod ((T - \alpha)^m) \qquad (1 \leq i \leq m)$$

ととると, これへの $F - \alpha$ の作用は,

$$(F - \alpha)e_i = (T - \alpha)e_i = (T - \alpha)^{m-(i-1)} \mod ((T - \alpha)^m) = \begin{cases} e_{i-1} & (1 < i \leq m) \\ 0 & (i = 1) \end{cases}$$

となる. よって, V の部分ベクトル空間 W_α 上では, 自己準同型 $F - \alpha$ は,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & \text{\huge 0} & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & \text{\huge 0} & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

と表現される. よって, F をこの基底で表現すれば,

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & & & & \\ & \alpha & 1 & \text{\huge 0} & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & \text{\huge 0} & & \alpha & 1 \\ & & & & \alpha \end{pmatrix}$$

となる．V はこれらの部分空間の直和なので, V 全体への F の作用は, これらのジョルダン・ブロックを対角線に並べたものとなる．Q.E.D.

これらの定理は一見, 片方は群論の, もう片方は線形代数の定理に見えるが, どちらも可換環論に視野を広げたほうが, すっきりと理解できるようになり, 結果証明も読みやすいものとなる．

2.4.2　さらに遠くへの道しるべ

より一般のネーター環 R に対しては, この分解をさらに伸ばして議論する．もちろん, 任意の場合には必ずしも有限で終わるとは限らない．

また, 逆に,

$$0 \to M \xrightarrow{\epsilon} I^0 \xrightarrow{f^0} I^1 \xrightarrow{f^1} I^2 \xrightarrow{f^2} \cdots$$

というように完全系列を伸ばしていくほうが, 便利な場合も多い[*31]．これらの I^i が入射的と呼ばれる性質を持っていれば, この系列は入射分解, と呼ばれ, コホモロジーなどで使われる．

ここまでの, 体と P.I.D. 上の加群の例を見れば, 対象それ自体を直接調べようとするのではなく, それを良い性質を持った対象による完全系列に分解した系列を調べたほうが筋が良い, ということが分かるであろう．

しかし, 一般の場合では, この系列が必ずしも, 有限生成にならないので, 系列自体が分かりやすいものになるとは限らない．

そこでたとえば, 必ずしも完全とは限らない R 加群から R 加群への自己左完全関手 $\mathscr{F}$ を上記の完全系列に作用させて,

$$0 \to \mathscr{F}(I^0) \xrightarrow{\mathscr{F}(f^0)} \mathscr{F}(I^1) \xrightarrow{\mathscr{F}(f^1)} \mathscr{F}(I^2) \xrightarrow{\mathscr{F}(f^2)} \cdots$$

とすると, $\mathrm{im}(\mathscr{F}(f^0)) \subseteq \ker(\mathscr{F}(f^1))$ は成り立っても, 等号は必ずしも成り立たない．そこで, その商群

$$R^n\mathscr{F}(M) = \ker(\mathscr{F}(f^n))/\mathrm{im}(\mathscr{F}(f^{n-1})) \quad (\text{ただし, } R^0\mathscr{F}(M) = \ker(\mathscr{F}(f^0)) \text{ とする．})$$

を取り出す．驚くべきことに, 実はこれらは I^n の取り方によらず, この R 加群から R 加群への関手 $R^i\mathscr{F}$ を $\mathscr{F}$ の右導来関手と呼ぶ．

そしてコンパクト性など自然な仮定の下では多くの場合, これらは有限生成になる．

この議論は環上の加群に限らず, 任意の対象が入射的対象の部分対象になっているような（入射的対象を十分に持つ, と呼ばれる）**アーベル圏**から, 別のアーベル圏の関手に対して使える[*32]．もっとも重要な例は, 各種多様体や scheme や解析空間などの局所環付き空間 X 上の, 加群の層から加群もしくは加群の層への関手である．

その場合, 層の系列が完全であるとは, 全ての点での茎が完全, つまり各点の無限小近傍において加群の系列が完全であることを意味している．

そして, 大域切断をとる関手 Γ は左完全関手ではあるが, 完全ではない．この場合の右導来関手 $H^n(X, \cdot) = R^n\Gamma(X)$ を**コホモロジー関手**と呼び, $H^n(X, \mathscr{F})$ を $\mathscr{F}$ の**コホモロジー群**という．

[*31] 当たり前だが, 右肩に乗っている数字は, べき乗ではなく, 添字である．

[*32] 射影的対象を十分に持つアーベル圏の右完全関手に対しては同様に左導来関手が定義できる

これは, 多様体などが局所的には自明だが, 大域的には自明でないことに対応している. なので, 局所と大域のズレを計るという意味で, コホモロジー関手という名に相応しいものである.

ところが実際には, 入射的対象は存在は楽に証明できても, 巨大なものになりがちで, コホモロジーを計算するのには使えないことが多い. そこで, コホモロジー群が消えていることが証明できるような対象（**非輪状**と呼ばれる. もちろん底空間によって変わる）な対象からなる完全系列で, 計算すれば良いことが知られている.

たとえば, 実多様体や複素多様体では, **1 の分割**を持つ**細層**による分解が良く使われる. 1 の分割があれば, 大域切断を, 局所切断を足し合わせて作ることが可能なので, コホモロジー群は消えるのだ.

もっとも良く知られた例は, 実多様体上の de Rham コホモロジーであろう. 実多様体 M の n 次微分形式の成す層 Ω^n に, 外微分 $d:\Omega^n \to \Omega^{n+1}$ を入れた複体,

$$0 \to a\Delta(\mathbb{R}) \to \Omega^0 \to \Omega^1 \to \Omega^2 \to \cdots$$

は M は局所的に単なる球体なので, 層の完全系列である（ここで, $a\Delta(\mathbb{R})$ は R の定数層である）. よって, 大域切断の成す系列,

$$0 \to \Omega^0 \to \Omega^1 \to \Omega^2 \to \cdots$$

は R の定数層のコホモロジーを計算していることになる.

このような計算を続けていると（数学の世界では良くあることだが, 最初は一つの加群や定数層を調べるために構成されるだけだった系列自体が, 興味の対象[*33]となっていく.

ただし, 同じ対象のコホモロジー群を調べようとしていても, これらの系列には全く一意性がない. よって, これらの系列は, コホモロジー群という隠れている対象の, 目に見えやすい現われに過ぎない, と考えるのが妥当だ[*34].

そこで, その隠れているコホモロジー群が住んでいる圏を解明しなくはてはいけない. そのために, 対象の系列の成す圏から新しい圏を作る必要がある[*35].

[*33] 興味の対象, という言葉はあるが, 興味の射, という言葉はまだない. どうでも良い話だが.

[*34] これは, 線形代数において, ベクトルの数ベクトル表示や線形写像の行列表示が, 目に見えない抽象的な線形空間の, 目に見えるが一意性は全くない現われに過ぎないことと, パラレルである. つまり, コホモロジーを計算するためによい入射分解を見つけようとすることが, 良い基底を探して基底変換することとパラレルである.

[*35] 圏論の強みは, このような関係を, 等価 $=$ ではなく, 同型 $\cong$ として表せることであるたとえば線形代数を圏論的に扱うことの利点は, 数ベクトル空間ではないベクトル空間が, 数ベクトル空間と同型ではあるが等しくはないことによって, 「ベクトル空間はある文脈では数ベクトルと見なせる」ということをうまく表現できることだ. $=$ で表してしまうと, 本当に同じものとなってしまうが, 数学において, 等しいということは大概, 何らかの文脈において同型であるものを, 同一視してしまっているに過ぎない. そして文脈は容易に変わっていく.

かつてクラインは, ユークリッド幾何や射影幾何の特徴づけを, どの群で変換すれば重ね合わせられるか, によって, つまり変換群の種類によって行おうとした. たとえば, ユークリッド幾何は合同変換群, 射影幾何は射影変換群, というようにである. これを**エルランゲン・プログラム**と呼ぶ.

すると, 線形代数で行っていることも, 群の作用を, 群とは対象が一つで, 全ての射に逆射がある圏であると見なすことにより, 圏の作用に一般化した「**一般化エルランゲン・プログラム**」の一環と言って言えないこともなさそうである. この一般化の大きな利得は, 群ではなく圏を考えることにより, 異なる文脈の間を移動しながら比べることが自由になったのだ. 例としては, すぐ後の導来圏の定義で出てくる, 局所化がある. 同型でない射が同型になるような, 新しい文脈を人工的に作ってしまうのだ. 高等数学に慣れた人々は実際, 複数の文脈を行き来するのに慣れている人なのだ. でないと, 「$[0,1]$ 閉区間の 0 と 1 を同一視すると, 円周になる」などという乱暴な物言いは理解できない. この場合の円周がどの文脈の円周

ここで, コホモロジー群 H^n が群だからといって, 群の圏の整数個の直積をとっても仕方がないことは明らかである．群の射がなければ, 元の圏での射がないのは明らかだが（例: ブラウアーの不動点定理の証明）, 群の射があっても, 元の圏に射があるとは限らない．群の直積の圏では, どんな射があるのか, という情報が抜けてしまっている．そこで, もとの系列の圏の射や対象に, コホモロジー群における等しさや同型を同値関係として入れなおすことによって, コホモロジー群が住む圏を構成しよう．

まず, アーベル圏 $\mathscr{A}$ の複体の成す圏 $\mathrm{Comp}(\mathscr{A})$ を考える．この圏の対象 $A^{\cdot}$ は,

$$\cdots \to A^{-2} \xrightarrow{d^{-2}} A^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} A^{0} \xrightarrow{d^{0}} A^{1} \xrightarrow{d^{1}} A^{2} \to \cdots$$

で $d^{i+1} \circ d^{i} = 0$ となるものであり, $h^i(A) = \ker d^i / \mathrm{im} d^{i-1}$ を $A^{\cdot}$ の**コホモロジー対象**と呼ぶ．この圏の射 $f : A. \to B.$ は,

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\cdots & \to & A^{-2} & \to & A^{-1} & \to & A^{0} & \to & A^{1} & \to & A^{2} & \to & \cdots \\
 & \circlearrowright & \downarrow_{f^{-2}} & \circlearrowright & \downarrow_{f^{-1}} & \circlearrowright & \downarrow_{f^{0}} & \circlearrowright & \downarrow_{f^{1}} & \circlearrowright & \downarrow_{f^{2}} & \circlearrowright & \\
\cdots & \to & B^{-2} & \to & B^{-1} & \to & B^{0} & \to & B^{1} & \to & B^{2} & \to & \cdots
\end{array}$$

という可換図式であり, これはコホモロジー対象の間に射 $h^i(f) : h^i(A) \to h^i(B)$ をもたらす．

複体の間の二つの射, $f, g : A^{\cdot} \to B^{\cdot}$ が**ホモトピック**[*36]であるとは, 各 i に対する射の集合 $k^i : A^i \to B^{i-1}$

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \to & A^{i-1} & \xrightarrow{d_A^{i-1}} & A^{i} & \xrightarrow{d_A^{i}} & A^{i+1} & \to & \cdots \\
 & & {}^{f^{i-1}}\downdownarrows_{g^{i-1}} & \swarrow_{k^{i}} & {}^{f^{i}}\downdownarrows_{g^{i}} & \swarrow_{k^{i+1}} & {}^{f^{i+1}}\downdownarrows_{g^{i+1}} & & \\
\cdots & \to & B^{i-1} & \xrightarrow{d_B^{i-1}} & B^{i} & \xrightarrow{d_B^{i}} & B^{i+1} & \to & \cdots
\end{array}$$

があって, $f^i - g^i = d_B^{i-1} \circ k^i + k^{i+1} \circ d_A^i$ が成り立つときである．このとき, コホモロジー対象に同じ射 $h^i(A) \to h^i(B)$ をもたらす．

よって, まず $\mathrm{Comp}(\mathscr{A})$ の射を, ホモトピックなもの同士を同一視することにより（対象は同じ）, 射を減らして新しい圏 $K(\mathscr{A})$ を構成する．これによって, 射の数をコホモロジー対象においての数まで減らすのだ．この圏を**ホモトピー圏**と呼ぶ．

この圏の射 $f : A^{\cdot} \to B^{\cdot}$ が, コホモロジー対象の同型 $h^i(f) : h^i(A) \cong h^i(B)$ をもたらすとき, f を**擬同型**と呼ぶ．

同型射はもちろん擬同型射だが, 擬同型射は必ずしも同型射ではない．

このような必ずしも逆射を持たない射に, 逆射を付け加える操作を, 環論で可逆でない元を可逆にする操作の類似と見て, **局所化**という．

$K(\mathscr{A})$ を弱同型射の集合で局所化した圏を $D(\mathscr{A})$ と書き, これを $\mathscr{A}$ の**導来圏**と呼ぶ．

これによって, コホモロジー対象が同型な複体同士を同型にできる．この圏こそ, コホモロジー論が調べようとしたものの, 住んでいる圏であると, 考えられるわけだ．

ここまで来ると, 現代数学の最前線にかなり近くなったといえそうである．しかし, ここはあの線形代数からしっかり繋がっているのだ．現代数学の峰峰を振り仰ぐ人も, 自分の登ってきたところから下を振り返り見下ろす人も, このことを忘れないで欲しい．

かを, 理解できないからだ．

ここまで考えると, 現在の高等数学で行っていることの多くが．このプログラムの視野に入ってくる．一例を挙げるにとどめると, 一時期ポピュラー・サイエンスで有名になった「エキゾチック・球面」とは, 位相多様体の圏（文脈）と微分多様体の圏（文脈）のズレである．

[*36] ホモトピーをホモとピーと書くべきと主張する人もいるので, ホモとピックと書くべきかも知れない

2.5　Appendices

数学と数学外の文化との様々な関係について考えた雑多な論考は, 内容との関連性が薄いので Appendix [*37]としてまとめた.

2.5.1　Appendix1：線形性という桎梏

論考中の注によって指摘した, 科学哲学的問題に良く似た, 線形代数とは直接関係はないが, 興味深い, 線形性の問題がある. それは我々が取り扱える複雑さの限界もまた, 線形に過ぎないのではないか, という問題だ.

ソフトウェア・エンジニアリングにおけるブルックスの法則によると, 「炎上したプロジェクトに人を増やすと, プロジェクトの進行は遅くなる」, なぜなら「人員を増やしたことにより, 情報処理能力は線形に増えるが, 人員同士のコミュニケーションは二乗に比例して増える」からである. n 個の点を結ぶ線分の個数は $\frac{1}{2}n(n-1)$ であることを考えるとすぐ分かる.

分業をすれば効率が上がる, という理論を高らかに歌い上げたのはアダム・スミスだが, 彼がその理論のモデルにしたのは釘工場であった. 実際, 単純作業は人員同士がコミュニケーションする必要がないので, 人員は増やせば増やすほど仕事が進むだろう. トラックが足らないところにトラックを増やせば, その日のうちに成果を挙げ始める.

しかしたとえばプログラミングなどのような高度な頭脳労働は, 新しい人員は現場の状況がどうなっているのか, これまでの成果はどのようなものかを理解しなければ仕事に参加できない. そのために, 教育用の人員を裂かなくてはいけないし, 新しい人員の成果はすぐには出ない. 分業された仕事が複雑に絡み合っていれば, そのプロジェクトに参加している全員が, 新しい人員の仕事のスタイルについて理解しなくてはいけないかもしれないし, 新人も先輩たち全員を理解しなくてはいけないかもしれないのだ.

この問題への解決策は, それぞれの人員が, 自分以外の人間がどんな仕事をしているのかにあまり左右されないような仕事をすることである. もちろん, 実際には一人では仕事ができないので, 少人数のチームが, 独立して作業を行うことになるだろう.

このことは, おそらくオブジェクト指向設計の考え方を, コンウェイの法則「システムを作る組織は, その組織の構造にそっくりの構造を持ったシステムを生む」の提言にしたがって, 組織の側に射影したものではないかと, 考えられる.

オブジェクト指向の考え方も, プログラムをデータと機能の塊**オブジェクト**に分け, そのオブジェクトの間のコミュニケーションは一定のプロトコルに沿ったものに制限してしまう. このことによって, システムが巨大化していくにしたがって, 急激に増大する複雑さを, 線形なものにまで抑えようとしているのだ.

この考え方の別の表明がたとえば UNIX 哲学や, オープンソース開発であろうと考えら

[*37] ちなみに虫垂のことを英語で appendix と呼ぶ. 虫垂炎は appendicitis, 虫垂炎切除は appendectomy である. appendics が必要以上にありすぎる本（線形代数の基本とか, 群論の基本とか, ガロア理論の基本とか, 他のより基礎的な本を紹介しておけばいいのに, わざわざ大量の appendix をつけてより分厚くより高価になっている本というのが世の中にはあって, しかも大概断片的にしか書いていないから, 結局基礎的な本も買わないといけないはめになるのだ）を私は勝手に appendicitis を起こしていると呼んでいるが, この本も appendectomy が必要かも知れない.

れる．オブジェクト指向が, 自分の管理をある程度自分でやるように, オープンソフト開発においては, 自分の仕事や自分の教育をある程度自分にやってもらう．最も管理すべきことは, 上がってくるコードの選別なので, 人数に対して大体線形程度にしか上がらない．

このことによって, ブルックスの法則を越えてスケーラビリティを確保しているわけだ*38．

さて, これとよく似た世界の複雑さへの対応の仕方をしている組織が, アカデミズムである*39．

科学のそれぞれのジャンルは, 他のジャンルの住人から見て, ブラックボックス, 実際には近くで見るとそれなりに中身の見えるグレーボックスとして機能している．

その大きな役目はここでも, ジャンル同士のコミュニケーションを大きく減らし*40 , 複雑性をアカデミズムの大きさに対して線形程度に収めて, スケーラビリティを確保することであろう*41．

しかし, 組織をこのようにモジュール化することができても, 実際に世界がこのようにモジュール分けできるとは全く限らない．いや, むしろ経験はこのことがおそらく嘘であることを教えているとすら言えるかもしれない．

プログラミングにおいて, せっかく結合を疎に設計したものを, 機能を拡張しようとすると, せっかくのモジュール性, 疎結合性が崩れていくことは良くある．

学問においても, 世界を説明するに際して, ジャンル分けが桎梏になることは多い．そこで, ジャンルを越えて, 世界を説明しようとすると, アカデミズムから抵抗を受けることも良くある．

これは, 科学というものが, 世界の側の都合ではなく, 人間の側の都合で組織されていることの, もう一つの証拠ではなかろうか．

もちろん, 私はこんな単純な議論で,「科学は真実を求めているわけではない」という結論に飛びつくほど単純な人間ではないつもりだ．そもそも科学に唯一の目標や目的があるなんて仮定が怪しいし, 良いジャンル分けと悪いジャンル分けはやはりあり, 良いジャンルわけを探すことも, 世界の真実への道と考えることも可能だ．

ただ, このように世界を要素に分けて, 個別的に調べるという手法に, 批判があるのも当然だと思う．

たとえば, [13] においては, 線形代数のアナロジーを使って, この世界を分割する手法が批判されている．

行列が標準形に変換できるように, 世界も互いに複雑な作用を及ぼしあわないように分

---

*38 [20] の訳者解説に引用される田宮まやの指摘にもあるように, この方法がうまく行き続けるためにはハッカーが際限なくいなくてはならず, エリック・レイモンドはこのネックについて気付いていないのか, それとも見てみぬふりをしていると言われている．

*39 [22] にあるように, オープンソース開発がアカデミズムの影響を受けているのも大きな原因であろう．

*40 コミュニケーションのチャンネルを一応開いておいて, いざというとき以外使わなければ良い, と非常に常識的に考える人もいるだろう．しかしそれは非常に慎重にやらないとうまくいかない．ソフトウェア・エンジニアリングにおける「テスト」について考えるとそれが分かる．普段使わない機能を念の為に実装すると, たとえ滅多に使わないとしても, そこにある以上, ちゃんと動くかテストしないといけない．するとそれが次第に負担になり, 正常な機能も圧迫されはじめる．同様にコミュニケーションのチャンネルも多ければ多いほど良いというわけではない．あれば普段使わなくてもチェックする必要が出てきてしまうのだ．

*41 このことを哲学者のパトナムは,「言語学的な分業」がなされている考えた．違う学問ジャンルにいる人間はそもそも違う言語を使っているのだ．それによって, 世界を別の仕方で認識し, 認識の分業を行っている, というわけなのだろう．

割できると勘違いしてしまったのが, 現代科学が世界を過剰に予想可能, コントロール可能なものと思い込んでしまった原因だというのだ. そして, その最初の勘違い自体は, 科学革命の最初の大きな成功例, ニュートン力学による, 太陽系の記述の成功に見る. 惑星の運動においては, 月と地球の関係だったら, 太陽は無視できるし, 地球と太陽だったら月はほぼ無視できる. というように, 世界を互いに複雑に絡み合った作用を及ぼしあわない要素に分割することが比較的容易だったのだ. これが, 人類に科学の能力の高すぎる見込みを出させて, それがたとえば経済学などにも現れている, と長沼は主張する. 行列がジョルダン標準形へ変形できるのは, 係数が体のときだけで, たとえばもっと一般の関数などでは, できるとは限らないのに, と.

線形代数っぽくしているが, 数学が分かっている人間が読めば, 全て単なる例え話であることが分かることは, この際置いておこう. 実際, 彼の話は一理ある. 一理はあっても二理はない, 栗より美味い１３里, 支離滅裂の五里霧中. 言葉を無理やりやりくりするのも一通りやったのでもうやめるが, そもそもこの話には, 代案がない. 今の科学は駄目だ, と言っておいて, 何の代案も出さなければ, 建設的議論はできない.

他の科学批判の類型として, 「科学の蛸壺化」を非難するものがある. アカデミズムは日毎に細分化されていく, 科学者は他のジャンルの学問に興味を持つ余裕をなくし, 隣のジャンルの論文ですら, 必ずしも読めるとは限らない, という有様だ. そこで, 学際的な研究などの必要が叫ばれるものの, いざ学際的な研究がどこかで始まろうものなら, よってたかって白い目で見るのが慣例となっていることは先ほど指摘した.

また, 医学の分野でも縦割りの専門分化の弊害が指摘されて, 「ホーリスティック医療」なる鵺のような怪しい代物が喧伝されたりしている.

ここまでの議論が正しければ, もし本気でアカデミズムが学際的な研究に取り組み, 医療界がホーリスティック医療に取り組んだら, 大変なことになるのではなかろうか. どちらの領域でも, ブルックスの法則が発動し, システム内部でのコミュニケーションのコストが管理能力を大幅に超えてしまう. 人員が増えれば増えるほど, 内部のエージェントは, 自分以外がどんな仕事をしているかを理解するために掛けなくてはいけないコストが増え続け, 自分の仕事ができなくなってしまう. 知的労働では, 釘工場でのような単純な分業はうまくいかないのだ. 結果として, コミュニケーションを密にしたら, 分業を維持するためのコストが, 分業のリターンを超えてしまい, プロジェクトは破綻する.

この, 全世界の知的労働者が同時にデスマに突入するシナリオを, 私は勝手に「叡智圏のマルサス崩壊（Malthusian Catastrophe of The Noosphere)」と勝手に読んでいる[*42].

この陰鬱な未来予想は, もちろん半分は冗談のつもりで書いているので, 安心してもらいたい.

2.5.2　Appendix2: 不変量の哲学

本文中で数学において, 不変量という考え方を大きく導入したのは位相幾何だと書いたが, これはあくまで数学においては, という話であって, 不変量の考え方自体はもっと古い.

この考え方を最初に打ち出したのは, 古代ギリシャ人である.

[*42] 元のマルサスの議論は「人口は幾何級数で増大するが, 食料は算術級数でしか増えないのでほっとくと崩壊する」というものだった. それと比べると, 一次式と二次式なので, ズレは小さいが, それでも最終的には大きな差になる

例えば, ミレトス学派のターレスは「万物は水だ」と言い, アナクシマンドロスは「アペイロン（限定できない何か）」だと言った. この少し後には, 「万物は数だ」と看破したピタゴラスがいる.

これを「昔の人はおかしなことを考えたのだなあ」と思うだけじゃ, もったいない. これは, 初めて「変わっていく過程の中で変わらないものは何か？」という問いを問うた歴史瞬間と考えるべきなのだ.

少し後のイオニア学派のヘラクレイトスは「万物は流転する」で有名だが（ちなみに本当にこう言ったかは定かではないらしい）, 「同じ川に二度入ることは出来ない」という言葉を残している. これは鴨長明の「行く川は絶えずして、しかも本の水にあらず」と似ているが, 実は底流する思想はずいぶん違う. 日本人だといわゆる無常感, 「だから難しいことを考えても仕方ない」という感慨につながりがちだが, ヘラクレイトスは返す刀で「だが変わらないものがある. それはロゴス*43（言葉, 論理, 法則）だ」と言ってしまう. 「世の中の全ては変わっていくが, 変わり方の形式は変わらないはずだ」と考えたのだ. 天才的と言って過言ではない*44.

「変わらないものを探す」というプロジェクトの存在を感じると, ターレスもアナクシマンドロスもピタゴラスもヘラクレイトスもパルメニデス（変化を否定した）もデモクリトス（変化しない小さな粒「アトム」で有名）もソクラテス（倫理の分野で変わらないものを探した）もプラトンもアリストテレスも, 初めて流れとして理解できる. 詳しくは, [8] を参照.

実際には「変わらないものを探す」というのは, 別にそれほど大層なことではなく, おそらく我々も無意識にやっていることだ.

我々が世界に対して何らかの予測を立てるためには, 畢竟何らかの保存則, 保存量が必要である. 「このことは変わらない（もしくは問題にしている時間範囲の間変わらない）ので, これはこうなる！」というのが議論の裏に潜む形式である. 科学以前の神話や呪術だって, 何らかの「変わらないもの」を提示していることが, そういう意識で呼べば分かる.

なぜならこれは, 我々の本能に組み込まれているからだ.

生後四ヶ月半の乳児に, 一つのボールの前に衝立を立て, 乳児の目の前でボールを一個追加したのち, 衝立を除く. このとき, ボールが 2 個ではなく, 1 個や 3 個だと, 赤ん坊の注視する時間が明らかに長くなることが知られている. 詳しくは [11] を参照. これなどは, 我々が生まれつき, 世界に何らかの保存則, 保存量があることを期待している, ということを表していると言っていいだろう. これは世界の理解可能性に対する我々の信頼であり, ぜひとも育てていきたい感覚である*45.

しかし, 人の胆力が発揮されるのは逆境である. [8] にもあるように, 古代ギリシャ時代はむしろ, 世界に対する理解可能性が揺るがされた時代だ. 政情不安, 異民族との交流で, 伝統的な神話的世界観が崩れ落ちた. その中で, 初めて意識的に「変わらないものを探そう」というプロジェクトを始めたグループの一つが古代ギリシャの哲学者だったのだ. そ

*43 現代の英語で論理を意味する「logic」や, 学問を表す名詞（biology, sociology, psychology, archeology, etc）の接尾辞「logy」の語源であり, 姉妹語であるラテン語由来の「lecture」と同語源である. ヘレニズム期のストア派哲学者たちに神格化され, ヨハネ福音書の冒頭の「はじめに言葉があった. 言葉は神とともにあり, 言葉は神であった」の「言葉」もロゴスの訳語である. [16] 参照.

*44 ピタゴラスの影響ももちろんある. ヘラクレイトスはピタゴラスを詐欺師と言ったらしいが.

*45 ある種の生徒は「学習に対する学習性無力感」, すなわち「世界は理解できない」ということを学習してしまっているように見える.

う考えて初めて, 彼らがどうして革命的だったか分かるし, 古代インドの哲学者や古代中国の哲学者も, アプローチの仕方はかなり違うが, 根っこが同じであることが理解できる.

そしてアリストテレスの自然学（physica[*46]）の名前を引き継いだ, 物理学（physics）もその基本思想を受け継いでいる. ある量が**物理量**と呼ばれるためには, 座標変換で不変でなくてはいけない. これがガリレオの相対性理論以来の鉄則である. そして変換が変われば, 何が物理量かも変わる, ということがアインシュタインの相対性理論や量子力学の歴史に現れている.

これを理解するためには, もちろん手を動かして計算することは必須だが, もう少し俯瞰から見るために「自分たちは変わらないものを探しているのだ」という意識を初学者は定期的に再確認しないと, 自分が何をしているのかわからなくなって, 行方不明になりがちだ.

古代ギリシャ人のように唯一の変わらないものを探すのはさすがに半ば諦めた我々は, とりあえず今考えている系において, 変わらないか変わりにくそうな値を探し, それを軸に系の未来を予測するのだ. これが物理を世界に適応するときの基本戦術と言ってよいと思う. これがないと, 大学で習った物理も絵に描いた餅にしかならない.

大学の物理まで行かなくても, 高校の物理の段階で, どうして「**力**」をそう定式化するのか, どうして「**仕事**」とか「**エネルギー**」などの概念が必要なのかが, 全く教えられていない現状がある. 「梃子の両側で変わらないものがあるはずだ」. そういう意識で世界を観察して初めて, 「仕事」という奇妙な概念の必要性が納得できる. 逆にその意識を醸成しようという教育をしていなければ, 理解できるはずもない. 大学レベルの教科書ならば, 不変量の考えからの大切さは必ず強調されている. しかし, 教えなくてはいけないのは, それ以前のレベルかも知れないのだ.

さらに遡れば, 小学校で比例と反比例を教えているが, あれが何のためにあるのかを全く教えていない. あれは不変量を探すための, 最初のツールなのだ. 不変量を求めている者は, 比例している 2 つの量や反比例している 2 つの量を見ると, 「ここに不変量があるぞ！」とマイム・マイムを踊って喜ぶものなのだ.

「仕事」という概念はまさにそうやって発見された. 力も長さも割合目に見える量だ（力はバネを使って距離に変換する）. しかし目に見える量は得てして変わりやすい. だからそこから, 変わり方の形式を, 変わらない量として構成しなくてはいけない. それは当然, 抽象的な目に見えない量になっている[*47]. このことをごまかしてはいけない. 物理量の多くが抽象的で目に見えないものであることをごまかさずに, それでも必要なものであることをちゃんと教えるのが, 教育というものではないのだろうか.

「変わらないものが本当にあるのかはしらないけど, とりあえず探してみる. そして大切なものは, 大概目に見えないものだ」

そう言い換えると, 物理学もずいぶんロマンチックに感じられないだろうか.

[*46] phy という部分は, 英語の be と語源が同じである. つまり「存在するもの」という意味だ. [16] 参照. 現代の訳語「物理学」の「物」に当たるわけだが, より動詞的な「自然学」の「然（しかり＝しくあり）」のほうが近く感じられるのも面白い.

[*47] ギリシャ哲学も, 「水」でスタートしたかと思ったら, あっというまに「限定できないもの」「数」「ロゴス」と急激な抽象化を経験した. これはおそらく, 裏に流れる「世の中の全ては変わっていくが, 変わっていくその形式は変わらないはずだ」という思想が, かなり必然的な考え方だからだ.

参考文献

[1] 新井仁之, ウェーブレット, 共立出版株式会社.
[2] F.P. ブルックス (滝沢徹/富沢昇/牧野祐子訳), 人月の神話—狼男を撃つ銀の弾はない, アジソンウェスレイパブリッシャーズジャパン.
[3] R. ハーツホーン (高橋宣能/松下大介訳), 代数幾何学, シュプリンガー・フェアラーク東京.
[4] 堀田良之, 加群十話—代数学入門, すうがくぶっくす, 朝倉書店.
[5] 堀田良之, 代数入門　—群と加群—, 裳華房.
[6] 数野晴晦 (編著), 数学の儀礼と儀式辞典, 氷原社.
[7] 河内明夫, 線形代数からホモロジーへ, 培風館.
[8] 古東哲郎, 現代思想としてのギリシア哲学, ちくま学芸文庫.
[9] 黒川信重/小川信也, 絶対数学, 日本評論社.
[10] 熊沢峰夫/伊藤孝士/吉田茂生, 全地球史解読, 東京大学出版会.
[11] G. レイコフ/R. ヌーニェス (植野義明/重光由加), 数学の認知科学, 丸善出版.
[12] S. マックレーン (三好博之/高木理訳), 圏論の基礎, シュプリンガーフェアラーク東京.
[13] 長沼伸一郎, 物理数学の直感的方法, 講談社 BLUE BACKS.
[14] 西山亨, 多項式のラプソディ, はじめよう数学 2, 日本評論社.
[15] 奥村晴彦, LaTeX 2_ε 美文書作成入門, 技術評論社.
[16] Online Etymology Dictionary, (http://www.etymonline.com/).
[17] 斎藤正彦, 線形代数入門, 基礎数学 1, 東京大学出版会.
[18] T. セガラン (當山仁健/鴨澤眞夫訳), 集合知プログラミング, O'REILLY(オライリー・ジャパン).
[19] J.P. セール (彌永健一訳), 数論講義, 岩波書店.
[20] E. レイモンド (山形浩生訳), 伽藍とバザール, (http://cruel.org/freeware/cathedral.html).
[21] A. ローゼンバーグ (東克明/森元良太/渡部鉄兵訳), 科学哲学　なぜ科学が哲学の問題になるのか, 現代哲学への招待, 春秋社.
[22] S. ウェバー (山形浩生/守岡桜訳), オープンソースの成功, 毎日コミュニケーションズ.

何でも良いから基底を取って, 数ベクトルと思ってしまった後の技法を学ぶための本はたくさん存在している. とりあえず定番として, [17] をあげておく. もちろん, 抽象的な線形空間についてもたくさんのページを使っているが, 具体的なものと抽象的なものとの関係については突っ込んでいない.

線形代数の実世界への応用については, 私はまとまった本を知らない. 微分積分だとその手の本結構あるのに, 不思議だ. 今回参考にしたのは, [1] と [18] と [10] である. [1] はウェーブレットを映像解析に使う手法が詳しく書いてある. [18] はプログラミング言語 python を使ってさまざまな機械学習の手法を紹介している. ネットから実際のデータを手に入れて解析するので, 面白い. しかし, ネットの移り変わりの早さのせいで, サーヴィスが終了してしまって本の通りできない部分も多い. また, python は読みやすく書きやすく, 一見いいとこ尽くめに見えて, コードの途中で改ページすると, まだ解説の途中なのに, コードを写すのに, コードが何をしているかを理解することが求められるのが難点. 動かしながら理解する, ということが出来なくなってしまう. 印刷の仕方に工夫がいる. [10] は地球科学の本だが, 一章まるごとを, 線形代数をどう応用するかに費やしている. 非常に含蓄深くてよい本だ. 専門以外の人や科学哲学をはじめとする文系の人も読むべきだと思う.

線形代数を環上の加群へ一般化することは, 数学を志すならぜひ早めにクリアしておきたい課題だ. P.I.D. 上の単因子論は, [5] がオススメ. その他, 群論などの初歩なども, 非常に分かりやすく書いてあるし, 群環の形で事実上表現論にも踏み込んでいる良書. もし, 少し難しいと感じたら, その前に [4] を読んで, 一般の加群に慣れよう.

ホモロジー代数に恐怖を抱いている向きは, [7] が線形代数からホモロジーへの架け橋を意識していて良いのではなかろうか. 本格的に入門するための本は, ネットで調べてもいろいろ出てくるだろうから, ここでは詳しく書かないが, 今回参考にしたのは, [3] の 2 巻である. また, 導来圏をはじめ, 圏論のさまざまな概念については, [12] を参考にした.

一部で話題の絶対数学を知りたければ, 類書は結構あるが [9] などを読むと良いかも知れない. 怪しい部分も多くて, 成功するかはよく分からないが, 発見の文脈における数学の姿が垣間見えて, 数学の哲学的にも面白いと思う.

二次形式については, 数論においてのものしか勉強したことがないので, [19] くらいしか紹介できない. Serre の本は, 『有限群の線形表現』なんかでも強く感じることだが, 無駄がなく, ページ数の割に高度な内容まで到達していて驚かされる. この本も, 第一章で有限体, 第二章 p 進体といきなり飛ばして, 最後には言葉こそ出ないが, **非可換類体論**に当たる話題まで触れている. しかし当の非可換類体論の専門家である藤原一宏氏によると「お子様向け」なのだとか. オソロシヤ.

ソフトウェア・エンジニアリングがどう複雑性に立ち向かっているかは, [2], [20], [22] を参考にした.

最近の科学哲学の動向については [21] を参考にした. ギリシャ哲学については, [8] が著者の科学に関する知識に不満を持ちながらも, 基本線では面白かった.

否定的に取り上げたが, [13] は良い本である. どう数学を教えるか, について深く考えさせられたし, それが「どう数学を考えるか」に関しても無視できないものだ, と今では考えている.

数学を認知科学的に分析する, という研究手法はまだまだ発展途上だが, とりあえず今まとまって読める本は [11] である. ただし後半の記述はかなり的外れになっている. 詳しくはいずれネットに公開されるか電子書籍化されるはずの, この同人誌のバックナンバーの私の記事を読んでほしい.

語源に関するトリビアは [16] から. 一日中読んでられる遊べるサイトである.

数学者の間に跋扈する奇妙な言葉遣いや習慣などを収集分類した [6] にも「天下り」と

いう言葉について調べるのにお世話になった．またこの本の存在を教えてくれた [14] にも感謝する．

そしてもちろん，[15] は大いに参考にした．

他にもこの文章を書くために，Ubuntu に LaTeX 環境を構築する方法や，emacs の日本語変換を mozc にする方法や，emacs-w3m や mew や navi2ch や eshell や org-mode を使って emacs 内部で全てをこなす生活をする方法や，git の使い方，magit を使って emacs 上から git を使う方法，redmine のチケットの切り方など，様々なことをネットの情報源に頼らせていただいた．

正直どのサイトを見たのか全部は覚えてないので，名前を挙げることは不可能だが，無数の叡智圏の開墾者（Homesteaders of the Noosphere）に感謝を捧げたい．

最後になったが，高速に大量の誤字脱字を生産し続ける機械である私のプロダクトをレビューし続けてくれた他のメンバー諸氏に感謝したい．彼らも自分たちの執筆に忙しい中，ほんとうにすみませんでした．そして心からありがとう．

あなたたちがいなければ，本稿はひどいものでした．

いやマジで．

もちろん，もしまだ本稿がひどいものだったとしたら，責任はレビュワーではなく全て私です．

文句等がございましたら，本小冊子後ろにある著者紹介に書いてある私のブログまで．

第 3 章

特異点を与えて正則関数を作る

足立 真訓

標準的な複素関数論の入門コース (留数定理まで) の「補講」として, 複素平面 $\mathbb{C}$ 上のミッタクレフラーの定理を解説し, その層とコホモロジーによる記述を与えます. $H^1(\mathbb{C}, \mathcal{O}) = 0$ とエレガントに記述される数学的事実はどのような実体を持つものか, その感覚をお伝えすることが本稿の目的です.

3.1　前回までの復習と, 今日のゴール

みなさん, こんにちは. 私ごとから話を始めますが, 2014 年度前期に工学部の学生を対象とした『複素関数論』の非常勤講師を某大学で担当しました. 複素数の定義から始め, 留数定理をゴールとした, 講義 13 回＋試験 2 回のコースです. 講義の範囲は, 教科書 [1] の §1.1〜§3.3 まで. 取り扱った内容をざっとまとめますと,

- 複素数とは何か. 複素平面による幾何学的解釈と, 極形式の計算.
- 実関数と複素関数.
- 正則関数の複素可微分性による定義. 一次関数, 多項式関数, 有理関数.
- 正則関数のコーシー・リーマン方程式による特徴付け, 等角性.
- ベキ級数による正則関数の構成. 初等関数 (指数・三角・対数・累乗関数).
- 複素線積分, コーシーの積分定理.
- 正則関数のベキ級数展開可能性. その種々の帰結.
- 正則関数の孤立特異点とローラン展開. 留数定理.
- 留数定理の定積分・フーリエ変換の計算への応用.

といった所です. 高校以来の微分積分学のまとめとして, また進んだ物理を学ぶための数学的な技法の準備を目指して, 駆け足で解説を行ないました. (本稿はここまでのコースを一度学んだ経験のある読者を想定しています.)

もちろんここまででも正則関数は, 十分に面白い (と学生に伝わった) と信じます. ただ, 数学を専門とするものとしては, ここからがいよいよ本当に面白いのに, という思いを抱かざるを得ません. 13 回の講義の主眼は, 高校以来お馴染みの実直線上の実関数たち

(初等関数) を複素平面上の複素関数とみなして, 一段高い立場から見直すことにあったと言ってよいでしょう. そのために, 初等関数を含む正則関数という関数のクラスを定義し, その一般的な性質を学んできました. 一通りの基礎理論を学び終えた今, 我々は, 視点を変え, 未知の関数を探索できる入り口にいるのです. つまり, 由緒正しい初等関数の "良さ" を一般化するような新しい関数を, 正則関数の中で見つけることができるのか, という問題にアプローチできるのです.

整理された数学から学び始めると, その動機を見失い, 数学が楽しくなくなることがしばしばありますが, 複素関数論においては幸せなことに, この素朴な問題意識が約 2 世紀に渡って, 現代の最先端まで継続しており, 比較的容易に動機を理解することができます. 例えば, [3] で紹介されているように, 複素関数論の 1 つの源流には, ガウスによる正十七角形の作図可能性があります. 円の等分問題をレムニスケートの等分問題に一般化しようとしたとき, 円と密接に関わる三角関数の加法定理・周期性を手がかりとして, 三角関数の一般化としての楕円関数が見出されたのです. そして, 楕円関数を調べるうちに, 現代的な観点でいえば, 多変数複素関数論の萌芽であるアーベル関数論, また, リーマン面上の複素関数論が展開されるに至ったのです.

改めて一般に述べると, 複素関数論の最も素朴な問題意識は, 複素関数が持ち得る何らかの特別な性質に着目し, その性質を持つ正則関数が存在するのか, あるとすればどのくらいあるのか, を問うことです. この存在の程度が関数の定義された空間の性質, 特に幾何を反映するような問題を取り扱うようになると, 現代の複素解析幾何学の深みにはまっていくのです.

さて, 本稿では, このような展開の第一歩として, 教科書 [1] の順番に沿い, 複素平面 $\mathbb{C}$ 上でのミッタクレフラーの定理の証明を行ないます. ここまでの講義で, 具体的に取り扱った正則関数は, 次のように構成されました.

1. 一次関数 $f(z) = \alpha z + \beta$ $(z \in \mathbb{C})$ は正則です. そもそも正則関数とは, z の ($\bar{z}$ ではなく!) の一次関数で近似できる関数でした.
2. 正則関数が与えられたとき, 加減乗除・合成・逆関数を取る操作により, 新しい正則関数が作れます. これにより z の多項式は $\mathbb{C}$ 上正則であることが分かります.
3. 多項式で局所的によく近似できる関数, すなわち, 収束半径が正のベキ級数により, 収束円板上の正則関数が作れます. たとえば, 指数関数
$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$
の収束半径は無限大なので, $\mathbb{C}$ 上正則な関数となります.

つまり, 一次関数から出発し, そこから芋づる式にどのように正則関数が作れるかを見てきたわけです.

この基礎理論を踏まえ, 我々はもう一段階進んだ問題, ある望ましい特徴をまず念頭におき, それを達成するような正則関数を作ること, に取り組みます. 今回着目するのは[*1],

[*1] 基礎理論を学び終えた今, 解析接続によるゼータ関数の構成, 複素線積分・鏡像の原理による楕円関数の構成, ディリクレ問題の解によるリーマン写像の構成などなど説明できることはたくさんありますが, それはまた別の話です.

正則関数の孤立特異点です．留数定理で学んだように, 孤立特異点には閉経路での複素線積分の情報が集約されており, 電磁気学のガウスの法則における電荷の役割を果たす, 基本的なデータでした．我々は, 孤立特異点の情報を与え, それを達成する正則関数を作ろうと思います．孤立特異点が電荷だというならば, 電荷をおけば静電ポテンシャルができるはずで, 孤立特異点をおけば正則関数ができるであろう, というのです．実際に, この構成が可能であることを主張するのが, ミッタクレフラーの定理です．我々は今回は, 無限級数の理論を用いて, 証明を行ないます．

その後, 話は, この小冊子の周辺の人々の共通言語である, 層とコホモロジーに向かいます．ミッタクレフラーの定理は, 層とコホモロジーの言葉では $H^1(\mathbb{C}, \mathcal{O}) = 0$ を実質的に主張します．層とコホモロジーを初めて学ぶとき, ついついジェネラル・ナンセンスの形式論の光と闇に目がくらみがちです．この形式論はあくまで機能美であって, これを実際に使ってみて味わおう, というのが本稿の立場です．層とコホモロジーの言葉により, ミッタクレフラーの定理という実体のある数学的現象が的確に記述されているのだ, という感覚を得ていただければ, 本稿の目的は達せられたことになります．

3.2　ミッタクレフラーの定理

早速, 主張を述べ, 教科書 [1] に沿って, 証明を行ないましょう．

ミッタクレフラーの定理．　複素平面 $\mathbb{C}$ 内の集積点を持たない点列 $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ を考える．これに沿い, 各 b_k に対し, その周りの m_k 位の極のデータ

$$P_k(z) = \sum_{l=1}^{m_k} \frac{c_{-l}^{(k)}}{(z-b_k)^l} \qquad (c_{-l}^{(k)} \in \mathbb{C})$$

を与える．このとき, $\mathbb{C} \setminus \{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ 上定義された正則な関数 f が存在し, f の b_k におけるローラン展開の主要部 (負ベキの部分) が P_k と一致する．

この定理はどこが非自明でしょうか．ポイントは極のデータが無限個与えられていることです．仮に与えられているデータが有限個, つまり, 点列 $\{b_k\}_{k=1}^{n}$ が有限点列であったとしましょう．このときは, 単純に

$$f(z) := \sum_{k=1}^{n} P_k(z)$$

と定めればよいのです．P_k は有理式なので $\mathbb{C} \setminus \{b_k\}$ 上定義されていることに注意してください．f は部分分数分解された有理式となり, それで話は済みます．

これを踏まえて, 無限点列の場合も,

$$f(z) := \sum_{k=1}^{\infty} P_k(z)$$

とすればよいのではないか, とお思いかもしれません．しかし, そう世の中甘くはありません．たとえば, 点列 $\{b_k\} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ に対し,

$$P_k(z) = \frac{1}{z-k}$$

というデータを与えて, この f の安易な構成を試してみましょう. すると

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z-3} + \cdots$$

となりますが, たとえば,

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{0-1} + \frac{1}{0-2} + \frac{1}{0-3} + \cdots \\ &= -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\right) (\text{発散}) \end{aligned}$$

となり, 0 は予め指定されていないにも関わらず, f の特異点となってしまいます. それどころか少し考えると, どんな $z \in \mathbb{C}$ に対しても f は収束しないことが分かり, まったくナンセンスなことになってしまいました.

この困難をどのように解決したらよいでしょうか. ポイントは, 我々には自由度が許されていることです. つまり, 有限点列 $\{b_k\}_{k=1}^n$ に対し, 極のデータ P_k を与えたとき, 先の構成の

$$\sum_{k=1}^n P_k(z)$$

は確かに答えとなっていますが, 答えはこれだけではなく, $\mathbb{C}$ 上の勝手な正則関数 g ($\mathbb{C}$ 上まったく特異点を持たない) を加えた

$$\sum_{k=1}^n P_k(z) + g$$

も問題の解となっています. たとえば,

$$\sum_{k=1}^n P_k(z) + z^2, \quad \sum_{k=1}^n P_k(z) + e^z, \quad \sum_{k=1}^n P_k(z) + \sin z$$

のようなものはみな解です. 正則関数を足しても, 特異点の情報は変わりません. この問題のフレキシビリティを利用し, 発散を押さえ込むように, うまく P_k を正則関数でずらしながら足し合わせる, これが証明のアイディアです.

それでは証明を行ないましょう.

証明 ([1] に基づく) **.** まず与えられた点列を並び替えて,

$$|b_1| \leq |b_2| \leq |b_3| \cdots$$

となるように名前を付け直しておきます. 先に見たように有限点列に対しては, 安易な構成で解が得られるので, 我々は十分先の点列について問題を解けば OK です. (有限点列に対する解と, 十分先の点列に対する解を足し合わせればよい.) ですので,

$$0 < |b_1| \leq |b_2| \leq |b_3| \cdots$$

という状況で問題を解くことにします.

証明のアイディアとして述べたように, 各極のデータ P_k をうまくずらしあわせながら足し合わせることになるのですが, このずらし方から説明しましょう. 極のデータ P_k は今回有理式で与えられていますので, $\mathbb{C} \setminus \{b_k\}$ で定義された正則関数です. ですので, 特に開円板 $\{|z| < |b_k|\}$ で正則です. この上では, P_k を原点を中心とするベキ級数で展開する

ことができます．(たとえば, 先に見ておいた simple pole の状況 $P_k(z)=(z-k)^{-1}$ であれば,

$$P_k(z)=\frac{1}{z-k}=-\frac{1}{k}\frac{1}{1-\frac{z}{k}}=-\frac{1}{k}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{k}\right)^n$$

という次第です．)

この P_k のベキ級数展開は収束円板 $\{|z|<|b_k|\}$ 上, 広義一様収束するので, とくに, 半径を半分にした円板 $\{|z|<|b_k|/2\}$ 上, 一様収束します．したがって, 十分高次の項まで考えた部分和 g_k をとれば,

$$|P_k(z)-g_k(z)|<\frac{1}{2^k}$$

を $\{|z|<|b_k|/2\}$ 上成り立たせることができます．(たとえば, 先の simple pole の状況であれば,

$$g_k(z)=-\frac{1}{k}\sum_{n=0}^{k}\left(\frac{z}{k}\right)^n$$

と k 次で打ち切ればうまく行きます.) ここで g_k はただの多項式ですから, $\mathbb{C}$ 上正則であることに注意してください. $\mathbb{C}$ 上正則な関数 g_k で P_k を円板 $\{|z|<|b_k|/2\}$ 上でずらすことにより, P_k と同じ特異性を持つ, 値のとても小さな関数 P_k-g_k を作れるのです.

求める正則関数 f を定義する準備が整いました．我々は,

$$f(z):=\sum_{k=1}^{\infty}(P_k(z)-g_k(z))$$

と定めます．この関数が $\mathbb{C}\setminus\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ 上定義された正則関数で, その孤立特異点 $\{b_k\}$ でのローラン展開の主要部が P_k で与えられていることを確認しましょう．(つまり, 先の simple pole の状況での答え (の 1 つ) は,

$$\begin{aligned}f(z)&=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-k}-\frac{1}{k}\sum_{n=0}^{k}\left(\frac{z}{k}\right)^n\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z}{k}\right)^{k+1}\frac{1}{z-k}\\&=\frac{z^2}{z-1}+\frac{1}{8}\frac{z^3}{z-2}+\frac{1}{81}\frac{z^4}{z-3}+\cdots\end{aligned}$$

だったわけです．)

f の表式自体は $\mathbb{C}\setminus\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ に対して有効 ($z=b_k$ のときは, $P_k(b_k)$ が発散しているで意味がない) なので, 問題はその収束性です．勝手な正数 R に対し, 円板 $\{|z|<R\}$ を考え, $\{|z|<R\}\setminus\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ での収束を示しましょう．点列 $\{b_k\}$ は集積点を持たない点列だった (ここでこの仮定を用います) ので, $|b_k|\to\infty$ $(k\to\infty)$ となることに注意すると, ある番号 N 以降の k に対しては, $2R<|b_k|$, つまり, $R<|b_k|/2$ となります.

この番号 N に着目して, 円板 $\{|z|<R\}$ 上で, f を

$$f(z):=\sum_{k=1}^{N-1}(P_k(z)-g_k(z))+\sum_{k=N}^{\infty}(P_k(z)-g_k(z))$$

とみます．第一項は有限和ですから, 収束には関係しません．第二項については, $R<|b_k|/2$ ですから, 評価

$$|P_k(z)-g_k(z)|<\frac{1}{2^k}$$

を適用することができます．すると，

$$\left|\sum_{k=N}^{\infty}(P_k(z)-g_k(z))\right| \leq \sum_{k=N}^{\infty}|P_k(z)-g_k(z)| < \sum_{k=N}^{\infty}\frac{1}{2^k} < \infty$$

ですから，第二項は円板 $\{|z|<R\}$ 上絶対一様収束します．これで収束性が確かめられました．

この収束性から，極限関数 f の正則性もただちに従います．第一項はその表式から $\{|z|<R\} \setminus \{b_k\}_{k=1}^{N}$ での正則関数を定めています．第二項については，$k \geq N$ の k に対し，$P_k(z)-g_k(z)$ が円板 $\{|z|<R\}$ 上正則であることから，正則関数の一様収束極限は再び正則となることを根拠として，円板 $\{|z|<R\}$ 上の正則関数を定めることが分かります．

この円板 $\{|z|<R\}$ における極限関数 f の記述から，f の極が $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ に限られ，それぞれにおけるローラン展開の主要部が P_k と一致することも見て取れます．これで証明は完了です．(証明終)

3.3　コホモロジーの消滅

ミッタクレフラーの定理の応用として，種々の初等関数の部分分数分解を行なう，Weierstrass の $\wp$ 関数を構成する，ミッタクレフラーの定理を $\mathbb{C}$ 内の領域へ一般化する，といった方向に話を進めることもできますが，それはまた別の話として，本稿ではミッタクレフラーの定理を，$H^1(\mathbb{C},\mathcal{O})=0$ というコホモロジーの消滅定理として定式化する，という話をしましょう．

まず $\mathcal{O}$ という記号について説明します．これは端的にいってしまうと，「正則関数」を表す記号です．複素平面 $\mathbb{C}$ 内の開集合 U が与えられたとき，U 上の正則関数の集合，より正確には正則関数の成す環 $\mathcal{O}(U)$ を対応させる，この対応そのものを記号 $\mathcal{O}$ で表します．「正則関数」という概念を定式化するとき，「全ての正則関数を集めた集合」を考えるのは適切ではありません．関数には定義域があるので，定義域を混ぜて考えてしまうと，どこで値をとっていいかも分かりませんし，関数どうしの演算もできるか分かりませんし，役に立たないのです．そこで「正則関数」という概念を，各定義域に対して，その上の正則関数を対応させる，その対応として定式化するのです．$\mathcal{O}$ は正則関数の芽の層，あるいは，($\mathbb{C}$ の複素多様体としての) 構造層と呼ばれます．

同様に，複素平面 $\mathbb{C}$ 内の開集合 U に対し，U 内の離散集合 D の補集合で定義され，D の各点で高々極を持つ正則関数，つまり U 上の有理型関数のなす体を $\mathcal{M}(U)$ で表しておきましょう．$\mathcal{M}$ は有理型関数の芽の層と呼ばれます．

この層の記号を用いると，前節で証明したミッタクレフラーの定理を次のように言い換えることができます．

ミッタクレフラーの定理の言い換え． 複素平面 $\mathbb{C}$ の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を考える．各 U_λ に対し，$f_\lambda \in \mathcal{M}(U_\lambda)$ を与える．$U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$ のとき，

$$f_\lambda - f_\mu \in \mathcal{O}(U_\lambda \cap U_\mu)$$

であると仮定する．このとき，各 U_λ 上 $f - f_\lambda \in \mathcal{O}(U_\lambda)$ となるような $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ が存在する．

いくぶん抽象的な定理に見えますが, 実質的な内容は, 前節のミッタクレフラーの定理と変わっていません. 実際, この定理はミッタクレフラーの定理と全く同じであることを説明しましょう.

証明. この問題で与えられているデータがどのようなものなのかを確認しましょう. 問題が何なのかはっきり分かれば, ミッタクレフラーの定理と全く同じ問題を解いていることを見てとることができます.

今, 与えられているのは, f_λ という複素平面の一部分, 開集合 U_λ 上で定義された有理型関数たちです. U_λ たちは複素平面を覆い尽くしていますので, ある意味で複素平面全体でのデータが与えられています. ある意味で, と書いたところがこの問題の肝心な点で, 共通部分 $U_\lambda \cap U_\mu (\neq \emptyset)$ 上では, 隣り合うデータ f_λ, f_μ は関数として必ずしもぴったり一致しているわけではありません.

f_λ, f_μ はぴったり一致はするとは限りませんが, 条件 $f_\lambda - f_\mu \in \mathcal{O}(U_\lambda \cap U_\mu)$ が仮定されています. つまり, 2 つの有理型関数 f_λ, f_μ の差は共通の定義域上で正則です. このことから, f_λ, f_μ は関数としては一致するとは限りませんが, それらの持つ極のデータ, 極の位置とその周りでの有理型関数の主要部, については, $U_\lambda \cap U_\mu$ 上一致することが分かります. したがって, この各 U_λ 上で f_λ を通して与えられた極のデータは, $\mathbb{C}$ 上で貼り合わさり, $\mathbb{C}$ 上の離散的な極の集合と, 各極の周りでの有理型関数の主要部からなるデータを与えます. これがこの問題で与えられているデータです. $\mathbb{C}$ 上の離散集合は可算ですので, この $\mathbb{C}$ 上の極の集合は点列として表すことができます. これはミッタクレフラーの定理とまったく同じ状況設定です.

そして, 求める f はこの特異点の情報を達成するような有理型関数です. 実際, 各 U_λ 上の条件 $f - f_\lambda \in \mathcal{O}(U_\lambda)$ は, f と f_λ の極の情報が一致すべきことを意味しているからです. (証明終)

以上で, ミッタクレフラーの定理が層 $\mathcal{O}, \mathcal{M}$ の言葉でどのように記述されるのか分かりました. それでは次に, 我々が前節で行なったミッタクレフラーの定理の証明についてはどうでしょうか. ミッタクレフラーの定理の証明を層 $\mathcal{O}, \mathcal{M}$ の言葉で見直してみましょう.

前節における証明の基本的なアイディアは, 与えられたデータ P_k を特異点の情報を壊さないように正則関数 g_k でずらし, 取り扱い易いデータ $P_k - g_k$ に修正することでした. これは, 本節の記号では, 各 U_λ 上で $g_\lambda \in \mathcal{O}(U_\lambda)$ を見付け, 与えられたデータをずらし, $f_\lambda - g_\lambda \in \mathcal{M}(U_\lambda)$ を考えることに相当します.

前節では, f を収束級数としてうまく構成できるように, 正則関数 g_k を見つけ, データ $P_k - g_k$ を構成しました. それでは, 本節での定式化では, 与えられたデータをどのような指針でずらせばよいでしょうか. 与えられたデータ f_λ たちが共通定義域 $U_\lambda \cap U_\mu (\neq \emptyset)$ 上で初めから関数として一致 $(f_\lambda = f_\mu)$ していれば, f_λ たちを貼り合わせて解 f が作れます. ですので,

$$f_\lambda - g_\lambda = f_\mu - g_\mu \in \mathcal{O}(U_\lambda \cap U_\mu)$$

とずらし, 与えられたデータを貼り合わせ可能なように修正できればよいわけです. この貼り合わせの条件式を少し変形すると,

$$f_\lambda - f_\mu = g_\lambda - g_\mu \in \mathcal{O}(U_\lambda \cap U_\mu)$$

となります．つまり，ミッタクレフラーの定理を証明するには，「与えられたデータ $f_\lambda \in \mathcal{M}(U_\lambda)$ の食い違いのデータ $f_\lambda - f_\mu \in \mathcal{O}(U_\lambda \cap U_\mu)$ に対して，食い違いのデータがこれとちょうど一致するような $g_\lambda \in \mathcal{O}(U_\lambda)$ たちを作れるか」という問題を解くことになります．前節の証明は，これが実際に可能であることを無限級数の理論を用いて示していたのです．

本稿の主題を式で表した $H^1(\mathbb{C}, \mathcal{O}) = 0$ は，まさにこのことです． すなわち，$H^1(\mathbb{C}, \mathcal{O}) = 0$ のいわゆるチェック・コホモロジーによる定義を展開して書き下すと，「複素平面 $\mathbb{C}$ のどのような開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ と，データ $\{h_{\lambda\mu} \in \mathcal{O}(U_\lambda \cap U_\mu)\}_{\lambda,\mu\in\Lambda}$ で，コサイクル条件

$$h_{\lambda\mu} + h_{\mu\nu} + h_{\nu\lambda} = 0 \in \mathcal{O}(U_\lambda \cap U_\mu \cap U_\nu)$$

を満足するものに対しても，$\{g_\lambda \in O(U_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ で，

$$h_{\lambda\mu} = g_\lambda - g_\mu \in \mathcal{O}(U_\lambda \cap U_\mu)$$

となるものが作れる」ことを意味します．食い違いのデータが，ミッタクレフラーの定理の場合のデータ $h_{\lambda\mu} = f_\lambda - f_\mu$ よりも一般化された形で定式化されている点，見た目は異なりますが，ミッタクレフラーの定理は，層係数コホモロジーの言葉での主張 $H^1(\mathbb{C}, \mathcal{O}) = 0$ と実質的に同値なのです．

本稿では，層や層係数コホモロジーの一般的な定義の説明は行ないませんが，ここまで読まれた方は，ぜひ参考書を手にとって，(あるいは Google で検索して,) それらの定義をご確認ください．

今日の講義では，複素関数論の一般的な問題意識を説明し，その例としてミッタクレフラーの定理を無限級数により証明し，この定理を $H^1(\mathbb{C}, \mathcal{O}) = 0$ という層係数コホモロジーの式としてまとめました．なぜ層係数コホモロジーによる定式化が複素関数論において強力なのか，その威力について，話をいくらでも続けることはできますが，一回の講義としては長すぎる話になりますので，今日はここまでとします．ご購読ありがとうございました．

読書ガイド

[1] 岸正倫・藤本坦孝,『複素関数論』, 学術図書.
今回の講義で使った 1 変数複素関数論の教科書. 薄い教科書だが, 手際良く記述されており, (演習問題も含めると) かなりの話題を学ぶことができる.

[2] L. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hill. (日本語訳: アールフォルス (笠原乾吉訳), 『複素解析』, 現代数学社.)
1 変数複素関数論のいわゆる名著. 豊富な話題, 厳密性と直観性のバランスの取れた記述は誰にも薦められる.

[3] 高木貞治, 『近世数学史談』, 岩波文庫.
ガウスの数学を中心に, たとえば楕円関数論の起こりがヴィヴィドに描かれています. 薄い本ですが, 数学の書かれたパートを読みこなすことは簡単ではないので繰り返し味わって読める本です.

[4] O. Forster, *Lectures on Riemann surfaces*, Graduate Texts in Mathematics **81**, Springer.
現代的に書かれたリーマン面の教科書の定番. 1 変数複素関数論の基礎を学んだ後, これを読んでおけば, 進んだ代数幾何学, 複素解析幾何学, ポテンシャル論の勉強をスムースに開始することができます.

[5] 及川広太郎, 『リーマン面』, 共立出版.
日本語で書かれたリーマン面の教科書の定番. Forster よりも分かりやすいとの専らの評判.

[6] R. Bott and L. W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*, Graduate Texts in Mathematics **82**, Springer.
de Rham コホモロジーを用いたトポロジーの入門書. いわゆる名著. 層とコホモロジー, スペクトル系列といったテクニックを自然な流れで明瞭に解説している.

[7] 野口潤次郎, 『多変数解析関数論 —学部生へおくる岡の連接定理—』, 朝倉書店.
数学の専門基礎の過程を終えた学部生に向け, 懇切丁寧に書かれた多変数複素関数論の入門書. 特に層の理論が整備されるきっかけとなった岡潔の数学を解説している.

[8] 大沢健夫, 『多変数複素解析』, 岩波書店.
ヘルマンダーの流れを組む, 現代的な多変数複素関数論のコンパクトな入門書. 記述は簡潔に見えるが, 含蓄は深い.

[9] J.-P. Demailly, *Complex Analytic and Differential Geometry*, `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/` からダウンロード可能.
やや代数幾何学寄りの複素解析幾何学の標準的なテキスト.

第 4 章

“スタート集合論” のノート（WIP）

才川隆文

4.1　はじめに – “スタート集合論” について

2014 年春から, 名古屋では, IT プランニング (www.itpl.co.jp) の小笠原啓さんと私との主催で, “スタート集合論” という勉強会を開催しています.

このように始まりまして, 集合論のテキスト [1], [2] を読み進めています.

Kunen 本 [1]（およびその日本語訳 [2]）は, 概念の明快な解説と, 定義や定理の丁寧な動機付けが与えられている良いテキストです. 勉強会の企画として, 読み進める道筋をさらにわかりやすくするために, 目標である強制法へ向けて抑えるべき急所となる定義や定理を, 両手で数えられるくらいに絞りこみました. この企画にあたっては, 私よりも集合論の理解が深い`@srb_2`さんと`@evinlatie`さんに, 大いに助けて頂いています.

急所としては以下のようなものを選び出しました.

- Mostowski collapse（III.5.9. Definition）
- relativization と absoluteness（§IV.2 と §IV.3）
- reflection theorem（IV.7.4. Theorem）
- definability（Ch.V）と, L（Ch.VI）
- generic extension : $M[G]$（§VII.2）
- forcing : $M[G] \vDash \mathrm{ZFC}$（§VII.3 と §VII.4）
- $\mathrm{Con(ZFC)} \to \mathrm{Con(ZFC} + \neg\mathrm{CH)}$（§VII.5）
- 余力があれば, $\mathrm{Con(ZF)} \to \mathrm{Con(ZF} + \neg\mathrm{AC)}$（Exercises for Ch.VII）

Infinitary combinatorics の章の内容をまるごと飛ばしているのは意図的なものです. Kunen 本の学習曲線を考えたとき, そこだけが極端に急であるとの, 経験者（複数）の言葉に従い, 直接挑むのを避けた結果です. いずれ generic filter を導入する頃には戻ってくる必要のある場所ではありますが, その時のどのように料理するかは未定です. 良い know-how が得られるかもしれませんし, 大失敗するかもしれません. 楽しそうです.

5 月から 8 月までの 4 回の勉強会で, 上記の内 absoluteness までを扱ったところです. これはそれを踏まえての work-in-progress なノートです. いずれ上の急所リストを全て片付けた後には, 勉強会の内容全体が見える形の完成版ノートを作りたいものですが, 現時点では, これまでに見つかった思わぬ難所や remark の羅列であり, 雑談です. なお以下では, Kunen 本が読者の方のお手元にあることを仮定しています. ご了承下さい. このノートを目にすることで, 読者の方が Kunen 本を読み始める動機付けを得られることを期待しています.

4.2 公理 0, $x = x$ とは？

勉強会が始まってみると, 第一章を読むのに 2 回分を使い, 割とじっくりと公理たちを鑑賞するという進みかたになりました. 最初の話題であったのは Existence の公理です.

§I.5 を見ると, Axiom 0 として,

$$\exists x(x = x)$$

なる式が書いてあります. 勉強会で最初に話題になったのは, この $x = x$ の理解の仕方でした. 今, 等号を含む一階述語論理の上に ZFC が乗っています. 等号を含む一階述語論理において $x = x$ は公理ですから, informal に上の公理を言いかえると

$$\exists x(True)$$

と書いてあるようなものです. $\exists x$ だけで論理式を終わらせるわけには行かないので, “$True$” をうまいこと等式として書いているということであるわけです.

ZFC の公理は多くありませんから, そらで言えるようになるまで鑑賞し, 吟味しておくことは, 楽しくまた有益でもあると思われます.

4.3 クラス

集合論を学び始めた初期に困惑させられるのは**クラス**という用語であるようです. 「集合ではないけれど, ものの集まり」「集合にするには大きすぎるような, ものの集まり」といった説明を見て, その不可解さに苦しんだという経験を持つ方は多いのではないでしょうか. Kunen 本の §I.9 でも, 始めにこのような述べ方がなされています. このような informal な説明を最初に述べるのが, 混乱の始まりです. 次のような定義をまず述べることで, 理解は格段に容易になります.

定義 1 (クラス)**.** クラスとは, ZFC の言語で書かれた論理式のことである. *1

クラスがまるで集合のように $\in$ や $=$ などの述語に引数として渡されている表現は, I.9.1. Definition 付近の解説にあるとおり, 単なる略記なのですが, 論理式だと思ってクラスを見ることを徹底し, 物のあつまりという考えを一旦捨てておけば, これが略記であることは格段に理解しやすくなります.

集合論の対象となる物である集合は, 「実体としての物のあつまり」という側面と「論理式」という側面の二つを持ち, Comprehension がその橋渡しをしています. 真のクラスは Comprehension が効かず, 論理式という側面だけを持つものですが, 論理式と集合を橋渡しするという集合論のこころに従うならば, 真のクラスを物のあつまりと思いたくなるのも自然なことです. ただ, 数学的議論を理解する段階にあっては, 単なる論理式と思う方が気楽ではないかと思います.

4.4 公理の長さの節約

ZFC の公理の多くは, 集合の存在を言っています. 例えば,

Pairing $\forall x \forall y \exists z (x \in z \wedge y \in z)$
Union $\forall \mathscr{F} \exists A \forall Y \forall x (x \in Y \wedge Y \in \mathscr{F} \to x \in A)$

などは名前の通り対と和を作るための公理ですが, 対と和そのものを作る公理ではないということは, 字面だけを見ていると見落しがちです. §I.6 の地の文に書かれていますが, たとえば Pairing は, x と y を要素として持つ集合の存在は言うものの, それが x と y だけを要素として持つ集合（これが対でした）だとは言っていません. Pairing で何かを作ったあと, Comprehension で余分なものを切り落とすことで, はじめて対が得られることになります. 和についても同様です.

公理の導入の仕方によっては, Comprehension を使う手間を省くこともできます. 例えば Pairing を,

$$\forall x \forall y \exists z (x \in z \wedge y \in z \wedge \forall w \in z (w = x \vee w = y))$$

とでもすればよさそうなものですが, 問題は式が長くなることです.

---

*1 あるいは項から論理式への関数と言ったほうが良いのかもしれませんが, いずれにせよメタレベルにある物です.

forcing を目標とした議論では, 相対化や絶対性など, 論理式に対するメタレベルの操作が多く用いられることは避けられません. そのようなメタレベルで公理を扱うときに, 特に相対化した公理が正しいままであるかどうかチェックするときに, 式の複雑さが増していることは障害となります. 多少 bootstrapping に手間をかけても, 公理をなるべく短かくしておくことで, 後で楽をできることになります.

4.5 $\mathbf{WF} = \mathbf{V}$?

III.2.2. Definition でのクラス **WF** の定義は, 直接 well-foundedness を表現したものとはなっていません. 直接表現すれば

$$\mathbf{WF}(x) = x \neq 0 \to \exists y \in x(\neg \exists z \in x(z \in y))$$

と, Foundation の公理から全称量化を取って述語にした形で書けるはずです. 実際 III.2.2 での定義は（ZF^- においては）well-founded set 全てを含むものではないということが, III.3.2. Lemma の下に書かれている注意からわかります.

このずれがおもしろい形で明らかになるのは III.4.1. Theorem です. 定理の内 (a)→(b) は, Foundation の公理を仮定すると, 全ての集合が membership に関して well-founded になると言っているだけであり, well-foundedness の定義に “∈” を代入しただけのものです. しかし (c) はどうでしょう. **WF** の定義が上の直接的な定義, well-foundedness そのものであれば, (c) と他との同値性は自明になってしまいますが, 今 **WF** はそれとは違う, hereditarily well-founded set のクラスでした. ここに III.4.1. Theorem の価値があります. Foundation の公理を仮定したときに, **V** がどのような作られかたをしているのかということを述べた定理であるわけです.

4.6 メタ理論とモデルの扱い

第四章に入ると, ZFC の**モデル**ということが題材になり始め, いよいよメタレベルでのモデル弄りが激しく始まるのかと身構える所ですが, Kunen 本の記述はあくまでも集合論の中に留まろうとした控えめなもので, メタレベルをあまり意識させないものになっているように読めます. §I.4 での記述 “if we allow infinitistic methods in metatheory,” や, §IV.9 での “If we are willing to accept infinitistic methods in metatheory,” といった文言を見ると, メタ理論は控えめにし, なるべく集合論の中で議論を済ませようというのが, Kunen 本を通しての姿勢であるとわかります.

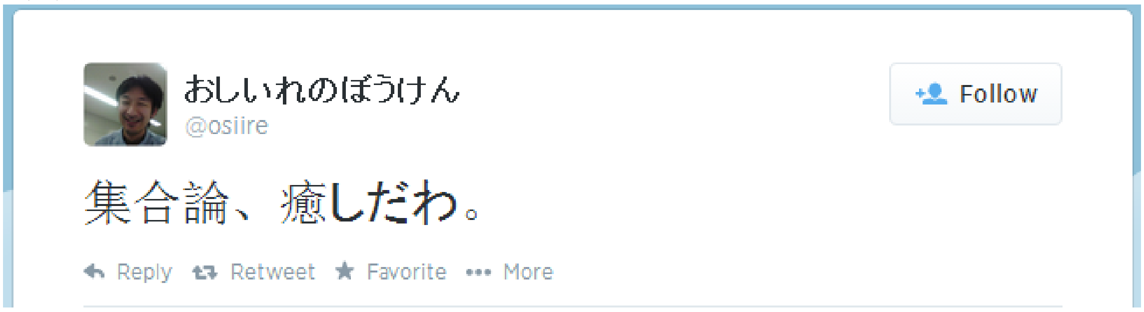
ZFC などの強力な理論を存分に用いてメタ理論を扱うことは, 対象となる理論を分析しやすくし, 「数学者が普段, 対象となる理論（ここでは ZFC）で何をやっているのか」ということを理解するのには良い手段を提供しますが, もうすこし基礎論的な, 「数学者が普段, 対象となる理論でやっていることはどのくらい正当化できるのか」などといった, 健全性を真剣に考えるための手段としては不向きです. その点, Kunen 本の議論は tight であるというか, 細心さを感じさせるものがあります.

先の節で述べたクラスという語の定義にしても, 論理式というメタレベルの物をすぐに持ってこようとしないのは, この細心さによるものなのでしょう.

4.7 Reflectio…ん？

さあいよいよ absoluteness の詳細と reflection theorem だ, と語り進めるべきところなのでしょうが, 我々の勉強会はまだそこまで進んではいないのでした. 従って本ノートもここで一時停止です. 最初に挙げた急所リストの内, 今年後半で幾つをこなせるかは未知数ですが, ノートは今年中に完成させたいと思っています. 読者の方に, いずれ完成版を目にして頂く機会があれば幸いです.

勉強会では



といった声も聞こえてきています. 集合論は実のある楽しい理論ですし, Kunen 本が語る集合論は軽快ですので, 未体験であればお試しになることをお勧め致します.

参考文献

[1] キューネン, ケネス./藤田博司 訳. 集合論—独立性証明への案内. 日本評論社. 2008.

[2] Kunen, Kenneth. Set Theory : An Introduction to Independence Proofs. Elsevier North-Holland. 1980.

[3] Shoenfield, J. R. Mathematical Logic. A K Peters. 2001.

第 5 章

数学短歌 666

良き石を求め昨日の枝を刈る原点至り縦ほこも無し

淡中　圏

あとがき

淡中　圏

「あとがき」と言いながら, 実はまだ完成しているわけではなく, 目下「あがき」の最中なのですが, 大体本ができる算段がついたので, これを書いています*1. 私があとがきを書いているのは, 前回これを書いてくれた才川さんが, 今も本文の執筆に忙しいからです. きっと皆様に届けられた本では, 才川さんの「スタート集合論ノート」が収録されているでしょうから, 安心してお読みください.

今回も当同人誌は, VPS 上にソフトウェア開発のツール群を使って構築した環境で製作されています.

で今回の我々の環境は,

原稿　LaTeX
原稿の管理　git
issue tracking　redmine
commit 後の自動コンパイル　git の hooks
各種ログと連絡　メーリングリスト (google groups)

という構成でした.

今回も前回に引き続き, 才川さんに環境構築をしてもらって, 非常に快適に執筆することができました. メンバー全員を代表して感謝の意を表します.

前回との大きな違いは, redmine の導入です. 前回は issue tracking してくれるソフトがなかったので, 終盤に残り作業の優先順位が分かりにくくなって非常に苦労しました. 今回は redmine のおかげで, 今何の作業が進行中なのか, いつまでにそれは終わらなくてはいけないのかがとても分かりやすく, 特にレビューとその反映などのような複数の人間が関わる作業では, 作業の重複をなくし, 情報の往復のサイクルも早くすることができました. なにより, 作業の進捗が目に見える形になるというのは, モチベーションがとても上がりますしね. 「チケットを切る」という作業も直感的に分かりやすくて好感度高し.

また前回に引き続き, git の contribution に入っている multimail の python スクリプトを gmail に接続できるように書き足したものを使って, git を push するとログが自動的にメンバーに流れるようになっていました. これも, スマホがブルブル言い続けるのが, みんなが頑張っていることが体感できるようで, とても面白く感じました.

そして今回も相変わらず, 様々なジャンルの執筆陣から原稿が集まり, 雑誌をヴァラエ

*1 「とがなくてしす」にならなくて済んだ.

ティ豊かなものにできたことに感動すら覚えます.

新しいメンバーである鈴木佑京さんの「可術算術の世界」は, 強い哲学的モチベーションから出発して, 数学の知識の漸進性をどうとらえるか, どう形式化するかに面白い視点を提供しています.

可術性などの「概念の安全さ」にこだわる姿勢や, 「あえて弱い立場で数学をする」という方針は, どうしても数学のメインストリームからは受け入れられにくいきらいがあります. しかし, そこでも面白いことは確実に起きているので, それを発信してくれる人は, とても貴重なのです. これからの活躍に期待したいです.

足立真訓さんの「特異点を与えて正則関数を作る」は非常に丁寧な記述で, 初学者にはギャップが感じられがちな 1 変数複素関数論と多変数複素関数論の橋渡しをしてくれています. 歴史的には, 1 変数複素関数論の美しい定理群を多変数で実現するために, 層やコホモロジー論などの理論整備がなされてきました. しかしそれを学ぶ者はその長い呻吟の歴史をすっ飛ばして, 比較的分かりやすい 1 変数の場合の直後に, いきなり層やコホモロジーの話が出てきて面食らうわけです. そこで, まず 1 変数の美しい定理群の中の一つ, ミッタクレフラーの定理を層のコホモロジー論の言葉に書き直すと, どれほど簡潔になるかを見せつけてくれています. 足立さんはいずれ数学セミナーに連載をもつお方だと思っていますので, その時にはきっとこの続きが読めるものと信じています.

才川隆文さんの「スタート集合論ノート」は, 現代的な集合論に入門したいという, 世間 (!?) に存在する隠れた需要に確実に応えるでしょう. 多分.

私の「線形代数の哲学」は, 線形代数に関する考え方や応用を雑多に詰め込んだ鵺のような代物ですが, 鵺のようなのが作風なのでお許しください.

「数学短歌６６６」は要はなぞなぞ. ６６６は, サハロン・シェラハの真似をして

「ここに謎がある. 知恵あるものは獣の数字を解くがよい. ……（中略）……その数字は６６６」

という『ヨハネ黙示録』の有名な句に依っただけです. 深い意味はありません. 自分の作品の解説をするのは無粋なので, ここら辺にしておきますが, 一つだけヒントを与えるとしたら「証明論」です.

さて, 去年の夏コミにはじめて数学で同人誌を出した時には, 次の年にもまだやっているとはあまり想像していませんでしたが, それでもこれで三冊目. 大学院を卒業してしまったメンバーや名古屋から離れてしまったメンバーとも縁が切れず, 同人誌執筆メンバーにも, 数学・計算機科学・物理学・論理学・哲学を巻き込んだ圏論勉強会のメンバーにも新しい人が入り続けています.

ここまで来たからには, 行けるところまで行きたくなってしまうのが人情というもの.

コミケの数学島の名物サークルになって, git の hook ではビルドの管理ができないくらい原稿を集めて才川さんを困らせ, 強制的にスキルアップさせてしまいましょう.

つまりジェネリック拡大, 才川 $[G]$ ですね[*2], 分かります.

とオチがついたところで今回は終わり.

次回は（抽選に受かれば）冬コミです. また読者の皆様にお会いできることを心から期待しています.

[*2] git の頭文字なのだろうか? Jenkins は J だしなあ.

倉永 崇 「あなたは何をしている人ですか？」と問われるとたいてい答えに困窮するのだが, 確実に言えることは, バンド活動においては作曲とドラムを担当している, ということくらいだろうか. なるほど, 観測のしかたによっては, 何もしていないのとホモトピックなのかもしれない.

淡中 圏 本名：田中健策　科学技術の発達が文化全体にどう影響を与えるかを考えている. もう少し具体的には小説の書き方とか. ヒュー・ケナーという人が『機械という名の詩神―メカニック・ミューズ』(上智大学出版) で, 20 世紀初頭の文学について, 新聞等の印刷技術やタイプライターがどう影響を与えたのか分析している. 影響を与えているに決まっているのに, 忘れられがちだからね. 最近だと, 漢字変換ソフトが小説家の文章にどう影響を与えているのか, 定量的に分析している人はいないのかな. 小説書くためにチューニングされた変換ソフトがあってもいいとおもう. まず, いきなり第一候補に変換するのではなく, 最初にリストが出る仕様にすべきだとおもう. git だって小説の書き方に影響を与えるだろう. それとは別に, もし大多数が git ライクなヴァージョン管理ソフトを使うようになれば, 文学研究も様変わりするのではなかろうか. 文学理論の中でもいわゆる「生成論」と呼ばれる分野は発展するのか, それとも無意味なものとして消滅するのか. 他にも例えば Excel やパワポで小説を書く馬鹿が生まれてもいいと思う. とりあえず私は, TeX/LaTeX の能力をフルに活かした小説が一度書いてみたいな. pLaTeX は縦組みもできるのに, まともに使ったことない（使えるようにまだなっていない）からなあ. 小説執筆用の IDE の誕生が求められる. この長話が数学と何の関係があるのか疑問に思い始めた向きもあろうが, それを説明すると同じくらいの長話が始まるので割愛する. まあ, 数学も当然文化の一部だってことよ.

よく分からないブログ　`http://blog.livedoor.jp/kensaku_gokuraku/`

鈴木 佑京 　東大大学院総合文化研究科修士一年鈴木佑京（@ otb_btb) です. ツイッターで宮崎さんに誘われて今回コミケ（出す側）童貞を捨てることになりました. どこの馬の骨ともわからない奴の原稿を掲載していただき感謝の気持ちで溢れております. 　修士ではヒルベルトを研究するんだ, 堅実な歴史研究をするんだぞと固く誓ったつもりが, いつのまにか指数関数がなぜ止まるんだろうかと真剣に考えている日々です. 修論どうなるのかな.

才川 隆文 今回は`.git/hooks/*`さんが安定して仕事してくれてたので, 主に Redmine のチケットを見たり見なかったりする役をやっていました. 次はこの役目も自動化したいです.

宮崎 達也 次回は巴マミとして生まれ変わります.

足立 真訓 いわゆるポスドクです. レビ平坦面と呼ばれる特殊な部分多様体を題材に，複素解析幾何学の手法で研究をしています. 空間の性質とその上の関数たちの関係を論じるモース理論の視点が好きです. 正則関数というカタイ対象を，幾何学で宥めながらどうやわらかく論じるか，この種の均衡の在り様に面白みを感じています.

発行者 ： The dark side of Forcing

連絡先 ： http://proofcafe.org/forcing/

発行日 ： 2014 年 8 月 17 日