The dark side of Forcing

II

巨大基数の逆襲

フフフ…奴は
四天王の
中でも最弱…
ラインハルトが
やられた
ようだな…
人間ごときに
負けるとは
基数族の
面汚しよ

A long time ago in a universe of sets
far, far away....

目次

第 1 章

ある巨大基数の思い出について

宮崎 達也

そう，彼女はもうとっくに死んだ．1971 年のことだ．名前は，Reinhardt 基数という．中には覚えている奴もいるだろうが，多くの人はそんなことも知らないであろう．Reinhardt とはある実在の人名であり，彼に対して死んだどうのこうの言うのは些か不謹慎であろうから，ニックネームでもつけようと思う．そう，仮にこの場ではリインちゃん，と呼ぼう．リインちゃんは 1967 年に W. N. Reinhardt の Ph.D thesis の last question によって生まれた．そしてリインちゃんは 1971 年の K. Kunen の論文 [4] によって短い一生を終えた．彼女はなぜ死んだのか，それは実に単純で，簡単な集合論さえあればわかる話だ．あまり広くは知られていない彼女の死の真相，そして彼女が遺したものについていくつか語ろうと思う．

1.1 巨大基数って何だ (とりあえず簡単なとこから)

巨大基数とは，巨大な基数だ．そして，巨大基数の存在を保証してくれる命題を巨大基数仮説という．えーい，基数ってなんじゃぽんって人は何だ，大きさを測るひとつの基準と思え．巨大基数とは最初の無限であるところの基数 ω とある意味において非常に類似した性質を持つ基数のことであり，また巨大故にその存在を集合論の公理系から導くことができないような性質をもつもののことだ．例えばベキ演算について閉じているとか，小さいピースに分割できないとか．そういうもので ω より大きいものは到達不可能基数とか言われている．もう少し，正確に表現しよう．まあ，以下のいくつかの定義は集合論に置いて標準的なものであるが，聞き流すかどうかは読者に任せるとしよう．

まず**順序数**というのは何かといえば，よくある記法として

$$0=\emptyset, 1=\{0\}, 2=\{0,1\}, \ldots, \omega=\{0,1,2,\ldots\}, \omega+1=\omega\cup\{\omega\}, \ldots$$

みたいな感じで作られるものだ．順序数全体の集まりを Ord と書くこととしよう．

基数というものはある順序数でそれ未満のいかなる順序数からの全射も持たないようなもののことである．

また任意の集合 X に対してその**濃度** $|X|$ が X と全単射をもつ唯一の基数として定義される．

さらに $(P, \leq_P)$ を半順序とするとき，$C \subseteq P$ が**共終である**とは，任意の $x \in P$ に対し

てある $y \in C$ で $x \leq_P y$ となるようなものが存在することをいう．つまり，順序数 α に対して $\{\alpha_i \mid i < \gamma\}$ が共終部分であるとき，この列は α に収束していると言える．

順序数 α に対して，その共終部分集合で最小の濃度を α の**共終数**といい $\mathrm{cf}(\alpha)$ で表す．共終数ってのはその順序数をどれだけ少ないステップで近似できるかという指標だ．比較的大きい基数でも共終数は小さい場合もある．

そうでない，つまり $\kappa = \mathrm{cf}(\kappa)$ となる基数を**正則基数**という．そうでない基数は**特異基数**と呼ばれる．

さて，κ が**到達不可能基数**であるとはそれが 3 条件：(1)$\forall\sigma < \kappa(2^\sigma < \kappa)$，(2)$\kappa$ は正則基数，(3)$\kappa > \omega$ を満たすことをいう．

しかし重要なのはだ，巨大基数の存在を主張する命題を付け加えると公理系の無矛盾性の主張が強くなるってところだ．特に，巨大基数の存在から ZFC の無矛盾性を主張する算術命題が証明できるわけだが，これはもとの ZFC で証明できる範囲を逸脱しているわけだ．

巨大基数で理論は強くなり，強いほど矛盾に近づく

そもそも巨大基数のモチベーションってなんなんだ，そんなものがなんで必要なのか，と思う人も多いと思う．一応弁護すると，歴史的に見て巨大基数を導入することで既存の未解決問題が証明できるようになるのではないかと考えられてきたことが挙げられる．いや，集合論って P. Cohen 以降数々の決定不可能命題が見つかることで，もはやその命題自体を証明するとかいった方向を目指すわけではなくて，如何に合理的な公理を仮定して多くの有益かつ有意味な結果が導けるかを競う方向に shift していったわけなんだが．その意味で，何か新しい公理が見解決の問題を解決してくれるかもしれないという意味で，巨大基数公理ってのは有力な新公理候補だったわけだ．少なくとも K. Gödel は巨大基数公理が集合論に多くの有意味な結果をもたらすと信じていた．特に，彼は連続体問題の解決が可能であろうと予測して，決定不能命題 (の無矛盾性の強さの度合い) を巨大基数公理に還元しようと考えていた．実際にはすぐに巨大基数仮説が連続体問題を解決しないことがわかったわけだが…しかし，彼の洞察は結構あたっていた，というより大正解であった．巨大基数公理は，その実際巨大な数が存在するとだけ述べているにも関わらず，実数の世界の命題の決定について有意味な結果を残すことがわかった．

ではどんな巨大基数公理がそのようなものにあたるのか．一つ有名なものとしては，可測基数だ．

定義 1(S. Ulam, 1930): $\mu : \mathcal{P}(\kappa) \to \{0,1\}$ を関数とする．

- μ が **κ 上の 2 値 κ 完備測度**とはそれが以下の条件を満たすもののことを指す：
  1. $\mu(\kappa) = 1$.
  2. 任意の $\alpha < \kappa$ と任意の互いに交わりのない κ の部分集合からなる集合族 $\{X_i \mid i < \alpha\}$ について，$\mu(\bigcup_{i<\alpha} X_i) = \sum_{i<\alpha} \mu(X_i)$ が成り立つ．
- μ が *non-trivial* であるとは，それがどの一点集合の測度も 0 にすることを指す．つまり，任意の $x \in \kappa$ に対して，$\mu(\{x\}) = 0$ となることを指す．
- κ が**可測基数**であるとは，それが非可算基数でかつ κ 上に non-trivial な二値 κ 完備測度が存在することを指す．

可測基数は結構大きい，少なくとも到達不可能基数よりはずっと大きい．選択公理の仮定のもと，実数の部分集合で Lebesgue 可測でないものが存在することはよく知られている．この Lebesgue 可測でない集合が存在することはある意味ではそのような集合が "具体的" に構成することができないゆえに許される現象といえよう．しかし，可測基数が存在するとある種の "具体的に構成できる" 実数の部分集合についてはそれが可測になることが証明できることが知られている[*1](R. Solovay は可測基数が存在するとき Σ^1_2 集合の可測性を示した).

ということもあり，Gödel の提唱以降数々の人が巨大基数公理を考え始めたわけだ．世は大巨大基数公理時代であった．その時代の奔流の中でリインちゃんは生まれることになる．

1.2　初等埋め込みについて

この節で考えている体系は主に，一階述語論理で形式化された ZF 集合論だ．まずリインちゃんについて語るためには初等埋め込みについて説明する必要があるだろう．

定義 2: M, N をクラス，$j : M \to N$ を関数とする．このとき，j が**初等埋め込み**であるとは，各 n 変数論理式 $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ と $a_1, \ldots, a_n \in M$ に対して

$$M \models \phi(a_1, \ldots, a_n) \iff N \models \phi(j(a_1), \ldots, j(a_n))$$

が成立することを指す．

恒等関数 $\mathrm{id} : V \to V$ はもちろん初等埋め込みだ．あ，V ってのは universe $\{x \mid x = x\}$ のことね．これからは主に定義域が V の初等埋め込みについて考える．さらに，初等埋め込み $j : V \to M$ の codomain$M$ は推移的[*2]なクラスになるものについて主に考える．恒等写像でない初等埋め込みを *non-trivial* と呼ぶこととしよう．今後は non-trivial なものについて考えるので，今後はいちいち初等埋め込みと言った場合は non-trivial なものだけを指し，いちいち non-trivial とは言わないことにする．codomain の推移性についても同様．そんなもんあんのかよって話ではあるが，まあそれが巨大基数と関わりがあるというわけだ．

恒等関数でない初等埋め込み j は必ずある順序数を動かすことが知られている．そのような順序数で最小のものは **j の臨界点**と呼ばれる．ここでは j の臨界点を $\mathrm{cp}(j)$ で表すこととしよう．いわゆる可測基数という巨大基数はなんらかの初等埋め込み $j : V \to M$ の臨界点になっている．そして $j(\kappa)$ は κ よりも真に大きくなる．ということは，j で κ の部分集合を送ると少し大きくなって $j(\kappa)$ の部分集合になる．そこで，任意の $X \subseteq \kappa$ について，

$$\mu_j(X) = \begin{cases} 0, \ \mathit{if}\ \kappa \notin j(X) \\ 1, \ \mathit{if}\ \kappa \in j(X). \end{cases}$$

と μ_j を定義する．この μ_j が non-trivial な 2 値 κ 完備測度になっていることを確かめることはそれほど難しくない作業である．

また，逆に可測基数 κ が存在すれば，κ を臨界点として持つ初等埋め込み $j : V \to M$

[*1] このような巨大基数と可測集合の密接な関係の分析は後に Martin や Woodin らによって進められた．

[*2] M が**推移的**とは，任意の $x \in M$ に対して $y \in x$ なら常に $y \in M$ も成り立つということ．

を作ることができる．どうするかというと，κ 上の測度 μ を用いて，V の超べき M を作ることでそのような埋め込み $j : V \to M$ が作れる．詳しいやり方は，別の本，例えば A. Kanamori[3] に譲るとしよう．可測基数がインパクトを与えたのは次の Scott の定理の存在である．

定理 3(D. Scott, 1961): 可測基数が存在するならば，$V \neq L$.

Proof. ここで L とは内部モデルの中で最小のもののこと．また内部モデルというのは，ZFC のクラスモデルで推移的かつ順序数全体を含んでいるようなもののこと．

証明は以下のように行う．いま，可測基数が存在するものとして，そのようなもので最小のもの κ をとる．すると，κ を臨界点とする初等埋め込み $j : V \to M$ が存在する．ところで，初等性の仮定から M は内部モデルになっている．もし $V = L$ なら，$V = L \subseteq M \subseteq V$ であるので，$M = V = L$ でなければならない．よって，

$$V \models \text{“}\kappa \text{ は最小の可測基数”}$$

と j の初等性から，

$$M = V \models \text{“}j(\kappa) \text{ は最小の可測基数”}$$

が導かれる．もちろん $\kappa \neq j(\kappa)$ だが，これでは最小の可測基数が 2 つあることになり矛盾である．　□

さて，証明の中で怪しげな埋め込み $j : V \to V$ が出てきたわけだが，リインちゃんをここで見てみよう：

定義 4(W. N. Reinhardt, 1967): κ が Reinhardt 基数であるとはそれがある初等埋め込み $j : V \to V$ の臨界点になっていることを指す．

さて，定義自体はとてもスッキリしていて自然だ．しかし本当にそんなものがあるのか．まあ，まず初等埋め込みが “ある” とはどういうことなのかについて考えねばなるまい．というのも，矛盾とか無矛盾とか考えるためには論理に関してより厳格でなければならないからだ．今，通常の一階述語論理上の ZFC について考えているとしよう．使っていい述語記号は membership 関係 $\in$ のみである．この上で，初等埋め込みがあるとは，つまりあるクラス関数があるということである．でもこれってムリじゃないか．実際，この論理式は書けない．量化は一階の対象にしか効かないからだ．クラスとは論理式の方便でありすべての論理式について hogehoge みたいな主張は書くことはできないからだ．いや待て，ZF ってそもそもなんだよ，って人に向けてここに ZF の定義を確認しておく：

定義 5(ZF): ZF とは以下の無限個[a]の公理の集まりからなる (面倒なのでいろいろ記号による略記を行います…お許しを)：

外延性: $\forall x, y, (x = y \leftrightarrow \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y))$.

空集合: $\exists x, x = \emptyset$.

和集合: $\forall x, \exists y, y = \bigcup x$.

非順序対: $\forall x, y, \exists z, z = \{x, y\}$.

べき集合: $\forall x, \exists y, y = \mathcal{P}(x)$.

無限集合: $\exists x, x = \omega$.

基礎: $\forall x, (x \neq \emptyset \to \exists y \in x(x \cap y = \emptyset))$.

内包公理図式: $\forall a \forall x, \exists y, y = \{z \in x \mid \phi(z, a)\}$.

置換公理図式: $\forall a \forall z, ((f(x) = y \leftrightarrow \phi(x, y, a)$ が関数を定義する$) \to \exists w = f''z)^b$.

[a] 例えば内包公理図式は各論理式 $\phi(x, a)$ で並べられた変数以外に自由変数を持たないようなものについて一々考えるものとする．

[b] 関数による集合の像はまた集合に成ることを述べています．ここで $f''z$ は z の f による像のことです．

基礎の公理はちょっとわかりにくいが，別の言葉で書けば，$V = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{Ord}} V_\alpha$ ということ．ここで，V_α とは $V_0 = \emptyset$ から始めて，$V_1 = \mathcal{P}(V_0)$, $V_2 = \mathcal{P}(V_1)$,... と次々にべき集合を取る操作を繰り返した結果得られる集合のこと．

以上の準備のもとで，個々の論理式については次のようなことは言えるわけだ．

定理 6: 個々の *2* 変数論理式 ϕ について以下が言える：論理式 ϕ によって定義されている $j : V \to V$ は初等埋め込みではない．ここで ϕ は j を定義するとは $j(x) = y \iff \phi(x, y)$ が成り立つことを指す．

Proof. 証明は，実のところ Scott の可測基数のそれに似通っているし，簡単だ．[*3]そのように定義された j が初等埋め込みであったとする．κ が j の臨界点であるという主張は first order で書ける．実際，

$$\psi(\kappa) \equiv \text{“}\kappa \textit{ is the minimal ordinal moved by } j\text{”},$$

として定義される一変数論理式 ψ は臨界点を定義する．j が non-trivial な初等埋め込みであれば，臨界点があるのでそれを fix して κ とする．$j : V \to V$ の初等性から $V \models \psi(j(\kappa))$ であるので，$j(\kappa)$ もまた j の臨界点である．しかし，定義上 $\kappa \neq j(\kappa)$ であり 2 つの臨界点があることになるが，また定義からして臨界点は存在するとしても一つに定まる．これは矛盾である． □

うーん，でもこれって意味あるのか．だって，例えば可測基数から導かれる初等埋め込みだってこの形ではないはずだ．実際，μ を non-trivial な 2 値完備測度とすると，j は μ をパラメターとするある論理式 $\phi(x, y, \mu)$ によって定義されるからだ．でもこれは当面問題ない．実は，このことは鈴木 (1999)[8] で証明されている．ではこれでリインちゃんは死んでしまったのかといえばそうではなかろうという話だ．例えば，この文脈では j は

[*3] まあ Folklore っぽい話だが，例によって Hamkins 先生に先を越されていたので一応出典として http://mathoverflow.net/questions/123068/kunens-inconsistency-result を挙げておく．

definable という仮定をおいてしまっているが，それを外したらどうだろうか．しかし，それでも不可能である，というのが以下に述べる Kunen の結果である．

1.3 Kunen's Inconsistency Result

以下で考えている体系は主に，新たな関数記号 j を追加することで拡張された ZFC の体系か，もしくは二階述語で形式化された集合論，例えば Morse-Kelly 集合論であったり，BG 集合論だとする．ここでは関数記号 j を加えた言語の上で形式化された公理系を ZFC(j) と呼び，これについて議論する．ただし，ZFC(j) とは ZFC に j に関する初等性と置換公理を追加した公理の集まりのこと．つまり，ZFC(j) は ZFC に

$$\forall x, \exists y, y = j''x,$$

$$\text{各 } \phi \text{ について，} \quad \forall a_1, \ldots, a_n, (\phi(a_1, \ldots, a_n) \leftrightarrow j(V) \models \phi(j(a_1), \ldots, j(a_n))),$$

の公理を追加したものである．ここで，上の式中の $j(V)$ は $j(V) = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{Ord}} j(V_\alpha)$ で定義される．これは実際に初等埋め込み $j : V \to M$ を考えている場合，$M = j(V)$ となる性質を利用している．

その上で，以下の定理を述べることが可能になる．

定理 7(Kunen, 1971[4], in ZFC(j)**):** 初等埋め込み $j : V \to V$ は存在しない．さらに言えば，初等埋め込み $j : V \to M$ に対し，$\kappa = \mathrm{cp}(j)$，$\lambda = \sup_{n<\omega} j^n(\kappa)$ とすると，$V_{\lambda+2} \subseteq M$ となるようなものは存在しない．

Kunen がリインちゃん殺害に用いた凶器は Erdös-Hajnal の定理である：

定理 8(Erdös-Hajnal, 1966, ZFC): λ を無限基数とし，集合 A に対して A の要素からなる長さ ω の列全体を集めた集合を ${}^\omega A$ で表す．このときある関数 $F : {}^\omega\lambda \to \lambda$ でどのような濃度 λ の部分 $A \subseteq \lambda$ をとってきても $F''({}^\omega A) = \lambda$ となるようなものが存在する．

この組み合わせ論的な主張は選択公理なしには ZF で証明できないことが知られている．さらに，決定性公理 AD を加えた ZF 上ではその否定が証明できることもまた知られている．Erdös-Hajnal の定理の証明自体は難しくはないがここではフォローしない．

Proof by Kunen [4]. いま，j が non-trivial であったとして，$\mathrm{cp}(j) = \kappa$，$\lambda = \sup_n j^n(\kappa)$ とおき，$j''\lambda \notin M$ を示す．このために，仮に $j''\lambda \in M$ であったとして矛盾を導く．F を上の Erdös-Hajnal の定理のように定める．このとき，$j(\omega) = \omega$，$j(\lambda) = \lambda$ であるので $j(F)$ は ${}^\omega\lambda$ から λ への写像になる．このとき，初等性により

$$M \models \forall A \subseteq \lambda, |A| = \lambda \to j(F)''({}^\omega A) = \lambda$$

が成り立つ．もし $j''\lambda \in M$ ならば，上の A として $j''\lambda$ をとることができる．すると，$j(F)''({}^\omega j''\lambda) = \lambda$．よって $j(F)(s) = \kappa$ となる $s \in {}^\omega j''\lambda$ を見つけることができる．すると，$s_n = j(\alpha_n)$ という形をしているので，$t = \langle \alpha_n \mid n < \omega \rangle$ とおけば，$j(t) = s$．したがって，

$$\kappa = j(F)(s) = j(F)(j(t)) = j(F(t)) \in j''\lambda.$$

しかし，j は κ を臨界点とし，初等性から順序数上で単調増加な写像なので，κ が j の像に入ることはありえない．よって矛盾． □

一方，Woodin などはリインちゃん殺害のために Solovay の定常集合の分割定理を用いた．

定義 9(club 集合，定常集合): λ を正則基数とする．

1. $C \subseteq \lambda$ が λ 上 *club* であるとは，それが closed(任意の C の有界部分列の極限で閉じている) かつ unbounded($\forall\beta < \lambda, \exists\alpha \in C(\beta < \alpha)$) であることを指す．
2. $S \subseteq \lambda$ が**定常集合**であるとは，それがどの club 集合 $C \subseteq \lambda$ とも交わる ($S \cap C \neq \emptyset$) ことを指す．

定理 10(G. Fodor 1966 [2], R. Solovay 1971 [7], ZFC): λ を任意の正則基数とする．このとき，どの定常集合 $S \subseteq \lambda$ も互いに交わりのない λ 個の定常集合の和として表現できる．

例によって上の証明は行わない．

Proof by Woodin(originally Burke?). 例によって，$j : V \to M$ を初等埋め込み，$\kappa = \mathrm{cp}(j)$，$\lambda = \sup_n j^n(\kappa)$ とおく．$S = \{\alpha < \lambda^+ \mid \mathrm{cf}(\alpha) = \omega\}$ とする．すると一般論として S は λ^+ 上の定常集合になる．S を上の定理にしたがって λ 個に分割できるが，ここでは κ 個に分割して $S = \bigcup_{\alpha<\kappa} T_\alpha$ となる列 $\vec{T} = \langle T_\alpha \mid \alpha < \kappa\rangle$ を定める．すると，$j(\vec{T})$ は長さ $j(\kappa)$ の互いに交わりのない定常集合の列になる．そこで，$j(\vec{T})$ から κ 番目の要素 $j(\vec{T})_\kappa$ を選んでそれを S^* と定める．ここで集合 C を

$$C = \{\gamma < \lambda^+ \mid j''\gamma \subseteq \gamma\}$$

で定める．簡単にわかるように C は λ^+ 上の club 集合である．

さて，いま $\mathcal{P}(\lambda) \subseteq M$ であったと仮定しよう．このとき，λ^+ は M で考えた λ^+ と一致し，更には，$\langle j''\alpha \mid \alpha < \lambda^+\rangle$ は M 上で定義できる．故に，$C \in M$．上の注意から $j(\lambda^+) = \lambda^+$ となるため，$j(\vec{T})$ は λ^+ の互いに交わりのない定常集合の列となる．そこで，ひとつ $\beta \in S^* \cap C$ を定める．このとき，$\mathrm{cf}(\beta) = \omega$ でかつ $j''\beta \subseteq \beta$ であるので $j(\beta) = \sup(j''\beta) = \beta$ となる．よって，

$$M \models \exists\kappa < j(\kappa)(j(\beta) \in j(\vec{T})_\kappa),$$

よって初等性によって，

$$V \models \exists\alpha < \kappa(\beta \in \vec{T}_\alpha).$$

つまり，$\beta \in T_\alpha$ となる $\alpha < \kappa$ が存在し，初等性からふたたび $\beta \in j(T_\alpha)$ となる．しかし，$j(\vec{T})_\alpha = j(T_\alpha)$ であるので β は $\vec{T}$ の α 番目に住む．しかし β はもともと $\vec{T}$ の κ 番目からとったはずである．これは $\vec{T}$ は互いに交わりのない列であることに反する．これは矛盾． $\square$

また一方 J. Zapletal は [9][*4]においてリインちゃん殺害の凶器として pcf 理論を用いた[*5]．

[*4] 実質 1 ページの論文ってあるんだな (遠い目)

[*5] pcf 理論というのは若干大袈裟で，実際に用いるのは任意の共終数 ω の特異基数上の scale の存在定理である．

Proof by Zapletal. ああ，この証明見たことあるなーと思ったら，超コンパクト基数をぶっ壊すと good scale がなくなるとかそういう話があったのを思い出した．巨大基数を考えるとき，こういう強制法で小さい基数に破壊したときに，どのような組合せ論的な性質が受け継がれるかっていうのを考えることは重要なんだ．そもそも巨大基数を考える動機として，ある小さい基数上の組合せ論の consistency を考える場合，とりあえずでっかい基数の存在を仮定してそれ壊して force できるか考えるみたいな方法論は結構常套手段として行われている，というものがある．ある性質 P を証明したい $\Rightarrow$ 巨大基数を仮定する $\Rightarrow$ 壊してその上の組合せ論的性質 P を証明する $\Rightarrow$ その P の真偽が強制法で変わらないことを示す $\Rightarrow$ そうすると P が証明されたことになる．みたいな議論もある．恐ろしい強制絶対性の話でここらへんは Todorcevic やら Woodin やらがガリガリ進めている．っていうのは内輪の話．

少々脱線したが証明を始めよう．関数 $f, g : \omega \to \mathrm{Ord}$ を考えるとき，$g \leq_{\mathrm{fin}} f$ を高々有限個の n を除いて $g(n) \leq f(n)$ が成立していることを表すとしよう．使う定理は以下の通り：

定理 11(S. Shelah, 199x, [5]): λ を共終数 ω の特異基数とする．このとき, ある正則基数から成る λ 上非有界な列 $\langle \kappa_n \mid n < \omega \rangle$ が存在し，半順序 $(\prod_{n<\omega} \kappa_n, \leq_{\mathrm{fin}})$ は $\leq_{\mathrm{fin}}$ 単調増加な共終列 $\langle f_i \mid i < \lambda^+ \rangle$ を持つ.

$j : V \to M$ を初等埋め込みで $\kappa = \mathrm{cp}(j)$，$\lambda = \sup_n j^n(\kappa)$，$j''\lambda \in M$ となるようなものとして矛盾を導く．λ は共終数 ω の特異基数なので定理にあるような λ に共終な列 $A = \langle \kappa_n \mid n < \omega \rangle$ と $\leq_{\mathrm{fin}}$ 増加な列 $F = \langle f_i \mid i < \lambda^+ \rangle$ が存在する．F は $\prod_{n<\omega} \kappa_n$ で共終にとっている，つまり次のことが成り立つ：

$$f_i(n) < \kappa_n (\forall n < \omega, \forall i < \lambda^+),$$

$$\forall g \in \prod_{n<\omega} \kappa_n, \exists i < \lambda^+ (g \leq_{\mathrm{fin}} f_i).$$

このとき，M 上で $j(F)$ を dominate するような関数を構成して矛盾を導こう．注意すべきは $j(A) = \langle j(\kappa_n) \mid n < \omega \rangle \in M$ であるので $M \models h \in j(\prod_{n<\omega} \kappa_n)$ は $h \in \prod_{n<\omega} j(\kappa_n) \cap M$ であることを意味する．$g(n) = \sup(j''\lambda \cap j(\kappa_n)) = \sup(j''\kappa_n) < j(\kappa_n)$ であるので $g \in \prod_{n<\omega} j(\kappa_n)$．$g$ は $j(A)$ と $j''\lambda$ のみから定義されているので $g \in M$．故に $g \in j(\prod_n \kappa_n)$.

$$M \models \forall f \in j(\prod_n \kappa_n), \exists f_i \in j(F)(f \leq_{\mathrm{fin}} f_i)$$

が j の初等性からいえる．$j''F = \langle j(f_i) \mid i < \lambda^+ \rangle$ は $j(F)$ に対して共終である．なぜなら，$j(\lambda^+) = \lambda^+$ なので $j(f_i) = j(F)_{j(i)}$ だからだ.

したがって，勝手に $f \in j(F)$ をとったとき，ある $i < \lambda^+$ で $f \leq_{\mathrm{fin}} j(f_i)$ となるものが存在する．いま，$j(f_i)(n) = j(f_i(n))$ で $f_i(n) < \kappa_n$ であるので $j(f_i(n)) \in j''\kappa_n$．故に，$g$ の定義から $j(f_i)(n) < g(n)$ が成立する．以上は,

$$j(f_i) \leq g$$

を意味し，すべての $f \in j(\prod_n \kappa_n)$ に対して $f \leq_{\mathrm{fin}} g$ が成り立つ．このことは，M で $j(F)$ が $j(\prod_n \kappa_n)$ 上共終であることに矛盾する．

□

重要な指数として，j の臨界点 κ と $\lambda = \sup_n j^n(\kappa)$ というものが登場した．初等埋め込み $j : V_\mu \to V_\mu$ で可能な μ について上の Kunen の結果は重要な示唆を与えてくれる．上のような μ で $\mu \geq \lambda$ となるものは存在しない．実際，証明中で行われている議論はすべて $V_{\lambda+2}$ のなかでエミュレート可能だからだ．では $\mu \leq \kappa$ は可能かといえばそれもない．実際，臨界点の性質から，$j \upharpoonright V_\kappa$ は恒等写像である．さらに言えば $\kappa \leq \mu \leq \lambda$ も不可能である．実際，λ は j によって動かないような最小の κ より大きい順序数であるからだ．つまり，μ に残された可能性は $\mu = \lambda$ と $\mu = \lambda + 1$ しかない．

リインちゃん亡き今，Kunen の定理から導かれるこの示唆は以下の定義へと我々を導く．

定義 12(Solovay, Reinhardt, Kanamori, 1978[6]): 以下では j に対し，$\kappa = \mathrm{cp}(j)$，$\lambda = \sup_{n<\omega} j^n(\kappa)$ と置く．以下に 3 つの巨大基数公理を定義する．

(I1) ある初等埋め込み $j : V_{\lambda+1} \to V_{\lambda+1}$ が存在する．
(I2) ある初等埋め込み $j : V \to M$ で $V_{\lambda+1} \subseteq M$ となるものが存在する．
(I3) ある初等埋め込み $j : V_\lambda \to V_\lambda$ が存在する．

定理 13: $(I1) \Rightarrow (I2) \Rightarrow (I3)$.

Proof. あまりにヘビーな内容なのでここでは取り扱わない．しかし，例えば $(I1) \Rightarrow (I3)$ とかであれば short proof がある．Handbok of set theory の Dehornoy の chapter[1] を参考にして欲しい． □

関係ないが Laver は初等埋め込みらがもつ構造と Artin のブレード群の構造の類似を発見し，$(I3)$ を用いればある種のシステムの word problem が解けることを示した．一方 Dehornoy はこれに対し巨大基数 free な証明を見つけた (independetly)．巨大基数公理が全く関係ない別の数学分野に応用ができるという発見はなかなか興味深い話ではある．詳しい話は [1] で掲載されている．

今のところ，I1-3 から矛盾が出るかどうかは未解決の問題として残されている．

1.4　最後に

巨大基数は集合論的には数多くの結果を残し，多くの数学分野に影響を与えた．今や数学をやっていればグロタンディークユニバースなんて言葉を耳にする機会は決して少なくない．またすでに注意したように，Todorcevic なんかは巨大基数と強制絶対性を用いて解析に関する結果を上げているし，Laver のブレード群に関する解析などは Dehornoy らによってより発展させられている．またリインちゃんはただで死んだわけではなく，初等埋め込みと巨大基数の関係についてはっきりした実像を与え，また現代集合論の世界では極めてポピュラーな超コンパクト基数などの有益な概念を創出した．我々は彼女の遺産の中に生きているわけだ．

また最後にちょっと選択公理について．実は Kunen の定理の証明中では選択公理が使われている (正確にはこの記事の証明には出てこないが証明中に使われている補題を示すのに使われている)．

ちなみに鈴木 [8] では，パラメータを用いて定義可能な初等埋め込みが存在しないことの証明に選択公理は用いられていない．つまり弱い意味の初等埋め込みの非存在は選択公理を使わなくても示すことができる．

しかし，強い意味，Kunen の定理のような定義可能とは限らない初等埋め込みの禁止という文脈ではどうなっているのか．この鈴木の証明を Kunen のような文脈で焼き直す方法はまだ知られていない，というか今まで 3 タイプの証明を見てきたが，Kunen の定理の証明はこのようにどれも選択公理を使うものしか知られていない．Kunen の定理の意味でのリインちゃんの非存在は，実のところまだ選択公理なしで証明できるかどうかはわかっていない未解決問題なんだ．

もしかしたら，ZF + AD みたいな文脈でリインちゃんが復活するかも，というのはちょっと虫が良すぎる気はするが，僕個人としては復活のストーリーを信じてみてもいいと思う (というのは流石に言いすぎだな)．まあ，戯言も過ぎたことだしこの辺で終わろう．

参考文献

[1] P. Dehornoy, *Elementary Embeddings and Algebra* in Chapter I of Handbook of Set Theory, Volume 2, (2008)

[2] G. Fodor, *On stationary sets and regressive functions*, Acta. Sci. Math. (Szeged) 27, 105-110, (1966)

[3] A. Kanamori, *The Higher Infinite: Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings*, Springer-Verlag, Berlin, (1994)

[4] K. Kunen, *Elementary Embeddings and Infinitary Combinatorics*, The Journal of Symbolic Logic, Vol. 36, No. 3, (1971)

[5] S. Shelah, *Cardinal Arithmetic*, Oxford University Press, (1994)

[6] R. Solovay, W. N. Reinhardt, A. Kanamori, *Strong Axioms of Infinity and Elementary Embeddings*, Annals of Mathematical Logic, Vol. 13, 73-116, (1978)

[7] R. Solovay, *Real-valued mesurable cardinals*, Axiomatic set theory, American Math. Soc. Proc. Symposia Pure Math. 13, Part I, 397-428, (1971)

[8] A. Suzuki, *No Elementary Embedding From V Into V Is Definable From Parameters*, The Journal of Symbolic Logic, Vol. 64, No. 4, (1999)

[9] J. Zapletal, *A New Proof of Kunen's Inconsistency*, Proc. of the Amer. Math. Soc., Vol. 124, No. 7, 2203-2204, (1996)

第 2 章

量子論理概説

古賀 実

目次

2.1 はじめに

本稿は，量子論理という言葉を聞いたことがあって興味があるけれど，イマイチ何であるのか，何に使えるのかよく知らない，という方向けの概説です．物理学科で習うような初等的な物理の知識と，順序集合のような数学の知識をある程度想定しています．self-contained な日本語の教科書として前田周一郎の “束論と量子論理”[5] を，量子論理における主要な道具である射影幾何から詳しく解説した体系的な教科書として Varadarajan の “Geometry of Quantum Theory”[6] を挙げておきます．

量子論理は，1936 年の Birkhoff と von Neumann の論文 “The Logic of Quantum Mechanics”[1] で創られました．大雑把に言って，量子論理とは物理系に関する実験データを命題と考えて，その間の含意（ならば）で順序を定めた順序集合を扱う分野のことです．例えば，A という物理量を測って a という値を得たというデータ φ や B という物理量を測って実数の E という区間に値を得たという形のデータ ψ を命題として扱い，それらの間に含意，すなわち実験データ φ を得たならば実験データ ψ を得る，という関係で順序 $\varphi \leq \psi$ を定めます．こうして得られる順序集合を扱う分野が量子論理です．

von Neumann は，1932 年に発表した “量子力学の数学的基礎” [*1] で，Hilbert 空間形式の量子力学の基礎を創った人ですが，後述するように，後に von Neumann は自身の Hilbert 空間形式の量子力学に不満を持ち [2]，論理という観点に立脚した量子論[*2] の構築をはじめることによって量子論理が創られます．

[*1] 原書タイトル：“Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik”．

[*2] 量子論という言葉は量子力学よりも広範な理論に使われることが多く，ここでも量子論とは古典論（古典力学や電磁気学など）で説明できないような “量子的な現象” を説明する理論一般という意味で用います．

von Neumann によって確立された Hilbert 空間形式の量子力学は数学的に厳密でありかつ，今日までの全ての実験的検証に耐えてきたという輝かしい実績があり，その理論の正当性は疑うべくもありません．しかしながら，量子力学は数学的に厳密である一方，概念的には色々と問題（理解し難い）点があり，Einstein をはじめとする多くの物理学者達の間に，所謂，解釈問題[*3] と呼ばれる論争を引き起すこす事になりました．この原因として，Hilbert 空間形式の量子力学の公理系が物理的描像と一向に結びつかない事が挙げられます．ここで Hilbert 空間形式の量子力学の公理系（の一部）を復習しておきます：

Axiom 2.1.1. *1* つの物理系には *1* つの可分な複素 *Hilbert* 空間 $\mathscr{H}$ が対応し

物理量の記述 物理量は $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素で表現される．
状態の記述 状態は $\mathscr{H}$ 上の密度作用素 ρ： $\rho \geq 0, \mathrm{tr}[\rho] = 1$，で表現される．
Born の規則 状態 ρ において物理量 A を *Borel* 集合 E に値を見出す確率は $\mathrm{tr}[\rho Q_A(E)]$（$Q_A(E)$ は物理量 A に対応する自己共役作用素のスペクトル測度の E での値）．

この公理系は，物理系からどのように Hilbert 空間が構成されるのかとか，考察している物理系における物理量がどのような自己共役作用素に対応するのかを教えてくれません．また，古典力学や熱・統計力学，電磁気学の場合のように，実験的に検証できるような形の公理系（物理では原理や法則という言葉が好まれる）から出発して，徐々に抽象化していくという段階が無く[*4]，元よりいちいち物理的な描像から乖離した，純粋に数学的な叙述になっていることが，多くの物理学徒・物理学者を悩ませてきました[*5].

さて，一方 von Neumann が量子論理という分野を開始した理由は，1935 年に Birkhoff へ宛てた手紙から伺い知ることができます [2]．手紙の中で von Neumann は，“最早 Hilbert 空間を用いた量子力学には満足できない” という内容のことを吐露しています[*6]．不満足点のひとつに，非有界な自己共役作用素で表される物理量の和が必ずしも定義できないというものがあります．閉グラフ定理より非有界な自己共役作用素はその定義域が Hilbert 空間全体にはなり得ないことが証明できますが，2 つの非有界作用素の和の定義域が空になってしまうような例が作れてしまい，von Neumann はこれを問題だとしました．実際，von Neumann は Birkhoff へ宛てた手紙の中で，物理量は環をなすべきであると述べています．他の不満足点もあげています．純粋状態は Hilbert 空間のベクトルで表現されますが，このベクトルをゼロでない複素定数倍したベクトルもまた同じ状態を表しています．von Neumann はこのような冗長性があるのは問題だとしました．以上のような点を踏まえて，von Neumann は Hilbert 空間を仮定しない量子論の建設を始めます．

[*3] 余談ながら，解釈問題の類は老後の “お楽しみ” という扱いで，若手の研究者に対しては “Shut up and calculate” というスローガンが掲げられるようになりました．

[*4] 熱・統計力学の抽象化の方法としては接触幾何・情報幾何の言葉を使う方法があり，電磁気学は，ゲージ（接続の）理論の言葉を使う方法があります．特に，ゲージの概念は相互作用を記述する基本的な道具となる一方，猫の宙返りという問題や量子力学における Berry 位相の記述に力を発揮します．

[*5] その代表的な物理学者が Einstein で，“神はサイコロを振り給わず” という言葉で有名です．上の公理が示す通り，量子力学における物理量に関する予言は確率的な陳述になっているため，古典力学までで確立されていた，任意の時刻における位置や運動量の値という概念が，量子力学では最早 well-defined になりません．この事実を Einstein は，“量子力学は不完全である” と言い表しました．すなわち，Einstein は “完全な理論” というものは，任意の時刻で全ての物理量の値を確定的に予言できるものであるという信念を持っていたと言い換えられます．

[*6] 実際は次のような文です：“I would like to make a confession which may seem immoral: I do not believe absolutely in Hilbert space any more”.

2.2 Birkhoff と von Neumann の量子論理

Birkhoff と von Neumann はまず，古典力学（Hamilton 力学）の論理構造の考察から始めます．ここで論理とその構造とは，“物理量 A が実数の Borel 集合 E に値を持つ” という形の文（実験的命題と呼ばれる）全体と含意による順序関係をそれぞれ指します．古典力学の場合，物理量は相空間上の実数に値を持つ可測関数で表されますから，実験的命題は相空間上の可測集合で表されます．実際，$\mathcal{P}$ を相空間，$f : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ を可測関数としたとき，Borel 集合 E に対して，$f^{-1}(E)$ は $\mathcal{P}$ の可測集合で “f が E に値を持つ “という文の表現になっています．このとき，含意（ならば）は集合の包含関係で定まり，選言（または）と連言（かつ）はそれぞれ集合の和集合と積集合に対応し，否定は補集合に対応します．つまり，論理構造は Boole 代数の構造を持つことがわかります．

一方，Hilbert 空間形式の量子力学における論理とその論理構造には，Hilbert 空間の閉部分空間全体 $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ と包含関係による順序関係がそれぞれ対応します．実際，物理量 A を表す自己共役作用素のスペクトル測度 $\{Q_A(E)\}_{E\in\mathscr{B}(\mathbb{R})}$ と Born の規則を考えると，任意の Borel 集合 E に対して $Q_A(E)$ が “物理量 A が実数の Borel 集合 E に値を持つ” という形の文を表現していることがわかります．ところで，閉部分空間 M にはそれを値域に持つ射影子 P^M（自己共役かつ冪等な作用素）が 1 対 1 に対応し，$\mathscr{L}(\mathscr{H})$ は射影子全体からなる半順序集合[*7] と順序同型です．

さて，Birkhoff と von Neumann が考えた量子論理 $\mathscr{L}_{BN}$ を以下でみてみましょう．尚，以下では公理や事実，定理の主張や証明は “だ，である”調で書き，補足説明では “です，ます”調で書きます．

Axiom 2.2.1 (量子論理は有界束)**.** *量子論理 $\mathscr{L}_{BN}$ は半順序集合であり，この半順序 $\leq$ によって束[*8]をなす．さらに，最大元 1 と最小元 0 が存在する．*

古典力学の論理の類推から，上限と下限はそれぞれ選言（または）と連言（かつ）を表し，最大元と最小元はそれぞれ真と偽を表していると考えます．

次に，$\mathscr{L}_{BN}$ に否定の構造を導入します：

Axiom 2.2.2 (否定)**.** *写像 $\perp: \mathscr{L}_{BN} \ni p \mapsto p^\perp \in \mathscr{L}_{BN}$ で*

(i) $\forall p \in \mathscr{L}_{BN}$, $p \vee p^\perp = 1, (\, p \wedge p^\perp = 0)$（補元をもつ：$\mathscr{L}_{BN}$ は可補的），
(ii) $\forall p \in \mathscr{L}_{BN}$, $(p^\perp)^\perp = p$（*2* 重否定律），
(iii) $\forall p, \forall q \in \mathscr{L}_{BN}$, $p \leq q \Rightarrow q^\perp \leq p^\perp$（対偶命題の成立）．

を満たすもの（orthocomplementation と呼ばれる）が存在する．

ところで，古典力学の論理は Boole 代数であり，これは分配律を満たします．一方，上で考察した Hilbert 空間形式の量子力学（例えばスピン系）の場合，実験的命題は必ずしも分配律を満たしません．

[*7] $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を内積に持つ Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素 A, B に対して順序が $A \leq B \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall x \in \mathscr{H}$, $\langle Ax, x\rangle \leq \langle Bx, x\rangle$ で定まる．

[*8] 半順序集合 $\mathscr{L}$ が束（lattice）であるとは，任意の $\mathscr{L}$ の 2 元 a, b に対して上限 $a \vee b$ と下限 $a \wedge b$ が存在するものをいう．

そこで Birkhoff と von Neumann は，量子論の論理は分配律を弱めた modular 律というものが成立しているとしました：

Axiom 2.2.3 (modular 律)**.** $\mathscr{L}_{BN}$ は *modular* 律を満たす：$\forall a, \forall b, \forall c \in \mathscr{L}$, $c \leq a \Rightarrow a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c$.

modular 律が分配律を弱めたものであることは $c \leq a \Leftrightarrow c = a \wedge c$ からわかります．Birkhoff と von Neumann は量子論の論理構造が modular 律に従うという根拠を論文中では明確に述べていません．一方，日本の物理学者伏見は 1937 年に，$\mathscr{L}(\mathscr{H})$ は orthomodular 律：任意の $M, N \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ に対して $N \subset M \Rightarrow M = (M \wedge N^{\perp}) \vee N$ を満たすことを示しました．ここで $N^{\perp}$ は N の直交補空間，$\vee, \wedge$ はそれぞれ，包含関係に関する上限と下限です．この結果を von Neumann は知っていたはずですが，不思議なことに von Neumann は生涯 orthomdoular 律に言及することはありませんでした．さらに Birkhoff と von Neumann はある種の有限性を課します：

Axiom 2.2.4 (有限性)**.** $\{q_i\}_{i=1}^{n}$ を $\mathscr{L}_{BN}$ の上昇列：$q_1 \neq 0$, $q_i < q_j (i < j)$，とするとき番号 $n \in \mathbb{N}$ を $\{q_i\}_i$ の長さという．上昇列 $\{q_i\}_i$ 全体に対して，その長さの上限は有限である．上昇列の長さの最大値を $\mathscr{L}_{BN}$ の次元という．

これは含意（ならば）の連鎖をたどると有限回で真に到達することを言っていますが，後でわかりますように，物理量のとりうる値の有限性に対応することがわかります．

Axiom 2.2.5 (既約性 (irreducibility))**.** $\mathscr{L}_{BN}$ の中心元 q : $\forall p \in \mathscr{L}_{BN}$, $p = (p \wedge q) \vee (p \wedge q^{\perp})$, は $0, 1$ のみ.

$\mathscr{L}(\mathscr{H})$ では，中心元であることは，閉部分空間を対応する射影子で考えた時，全ての射影子と可換であることと同値です [6]．これは，重ね合わせの原理に対応することが後に示されましたが，Birkhoff と von Neumann の論文中では明確に述べられていません．

Birkhoff と von Neumann の論文の主定理は次の通りです：

Theorem 2.2.1 (Birkhoff-von Neumann, 1936[1])**.** *axiom 2.2.1* から *axiom 2.2.5* を満たす $\mathscr{L}_{BN}$ の次元 n が *4* 以上のとき，可除環 $\mathbb{D}$ と $\mathbb{D}$ 上の n 次元（左）ベクトル空間 V が存在して，$\mathscr{L}_{BN}$ は V の部分空間全体に包含関係によって順序を定めた束（射影幾何）$\mathscr{L}(V, \mathbb{D})$ に順序同型．さらに，$\mathbb{D}$ の自己反同型写像 θ と $V \times V$ 上の非退化な対称 θ-双線形形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ が存在して，$\mathscr{L}_{BN}$ の *orthocomplementation* $\cdot^{\perp}$ は，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ に関する零化[*9] で与えられる．

Proof. 証明の詳細は [6] を参照されたい．証明の要点は，Veblen と Young による束論的射影幾何の表現定理：4 次元以上の有限 (n) 次元既約可補束は，ある可除環 $\mathbb{D}$ 上の n 次元ベクトル空間 V の部分空間全体のなす束 $\mathscr{L}(V, \mathbb{D})$ に順序同型，にある．双線形形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ の存在は，3 次元以上のベクトル空間の射影幾何 $\mathscr{L}(V, \mathbb{D})$ 上の束同型写像から，V 上の線形写像が誘導されることと，orthocomplementation が $\mathscr{L}(V, \mathbb{D})$ 上の束同型を誘導することに注意すれば良い． □

さらに，次が成立する [6]：

[*9] $M \subset V$ の $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に関する零化空間 $M^{\perp}$ とは $M^{\perp} := \{y \in V | \forall x \in M,\ \langle x, y \rangle = 0\}$ のことです．

Corollary 2.2.1. *theorem 2.2.1* と同じ仮定のもとで

(i) $\mathbb{D} = \mathbb{R}, \mathbb{H}$（実数体・四元数体）のとき，$V$ は $\langle \cdot, \cdot \rangle$ によって *Hilbert* 空間となる．

(ii) $\mathbb{D} = \mathbb{C}$（複素数体）のとき，自己反同型写像 θ が連続であるとすると，V は $\langle \cdot, \cdot \rangle$ によって *Hilbert* 空間となる．

この定理は，$\mathscr{L}_{BN}$ は “内積” 空間の射影幾何で表現されると言っています．可除環 $\mathbb{D}$ は $\mathscr{L}_{BN}$ から具体的に構成され，$\mathbb{D}$ は $\mathscr{L}_{BN}$ の構造から同型の違いを除いて一意に定まります．Hilbert 空間形式の量子力学では複素数体上の Hilbert 空間が使われましたが，ここで表現に使用した可除環の絞り込みには別の考察が必要です．例えば，構成された可除環 $\mathbb{D}$ が可換であるための必要十分条件は $\mathscr{L}_{BN}$ が Pappian であること，が知られています．詳しくは [7] を御覧ください．

von Neumann は Hilbert 空間形式の量子力学から離れて量子論理をはじめましたが，有限性やある種の正則性の仮定のものとでは結局 Hilbert 空間が得られました．Birkhoff と von Neumann の論文は一応，論理の観点から量子論を見直したという位置づけができますが，不満な点がいくつかあります．第一に，modular 律の物理的根拠が無いこと（実際，無限次元の Hilbert 空間で記述される量子力学では modular 律は一般に成立しません）．第二に，有限性の仮定から，得られた有限次元の Hilbert 空間では正準交換関係の表現が得られないこと，すなわち，位置や運動量のような連続スペクトルをもつ物理量を表現し得ないことが挙げられます．また，axiom 2.1.1 における物理量や状態との関連も不明なままです．

Birkhoff と von Neumann の論文後，暫くは物理的に意味のあるような目立った論文はありません[*10]．

2.3 Mackey の量子論理

時は流れて 1963 年，Mackey という数学者によって量子論理が再び表舞台に現れます．Mackey は，“The Mathematical Foundations of Quantum Mechanics”[3] という本の中で，今日，Mackey の量子論理と呼ばれる Hilbert 空間形式の量子力学とは異なる “物理的に満足のいく公理系” を発表しました．

Mackey の量子論理の成果として，Gleason の定理 [12] が有名です：量子力学では状態が密度作用素で表されるとしますが，これは “物理的に満足のいく公理系” からの定理として得られます．しかしながらこのように説明すると，“物理的に満足のいく公理系” という概念は主観的であり，同じ結果を与えるのであれば簡潔な公理系がひとつあれば十分であるから公理の言い換えなどは無用である，という批判があり得ると思います．これに関しては，過去に同様な道筋を経ている古典力学の発展を題材にして，反駁してみたいと思います．結論から言いますと，理論の拡張可能性の探求や一般法則の解明のためにはより多くの考え方，すなわち，異なる形式を持つ公理系の存在自体が有用である，という主張による反駁の仕方です．このために，古典力学の発展の歴史について少々お付き合い頂きたいと思います．

[*10] von Neumann はこの論文後，modular 律が大変気に入ったらしく，modular 律を満たす束を精力的に研究します．その結果，連続幾何と呼ばれる分野を形成しましたが，私が知る限り物理的に意味のある結果はありません．modular 律を気に入っていた理由は [2] で考察されています．

古典力学には主に，Newton 力学，Lagrange 力学，Hamilton 力学と呼ばれる 3 つの力学形式があります．これらは全て同様な予言能力を持ちますが，異なる公理系に立脚しておりそれぞれに長所と短所があります．Newton 力学は最もはじめに創られた力学形式で，その公理系は運動の法則と呼ばれ，長所は初学者にわかりやすい，質量や加速度，力[*11] などの言葉で書かれている事が挙げられます．しかし，系の対称性から保存則を導いたり，一般法則を定式化する際には見通しが悪く，不向きです．一方，Lagrange 力学や Hamilton 力学の公理はそれぞれ，最小作用の原理や Hamilton の変分原理と呼ばれ，定式化に作用やエネルギーという，より抽象的な概念を用いるため初学者向きではありませんが，系の対称性から保存則を導いたりする際に見通しのよい形式となっています[*12]．理論が抽象的な枠組みを用いているお陰で，一見，力学の対象とは見做されないような系にも適用できる事が発見されることにより，力学の扱える対象が広がったという長所もあります[*13]．

以上で取り上げた形式はどれも同様に力学を記述するものですが，概念的に理解しやすい・計算しやすい形式，一般法則を証明しやすい形式，理論の拡張可能性を考えやすい形式など，それぞれに異なる長所があります．このような古典力学の発展の歴史は，異なる形式の存在自体が，自然を理解する際に多角的な視点をもたらしてくれ，理論の拡張可能性の探求や一般法則の解明に役立つことを教えてくれます．具体例を挙げれば，Newton 力学は熱力学の原型となる気体分子運動論を与え，最小作用の原理は最速降下曲線などの最適化問題を解くための常套手段として用いられる一方で，統計力学における平衡状態を記述するカノニカル分布を導くためのエントロピー最大化原理のアイディアの源泉と見做すこともできます[*14]．また，Hamilton 力学で中心的な概念であるエネルギーは，力学における定義から離れて Riemann 幾何学における測地線の存在問題で中心的な役割を果たします．

以上では古典力学にも異なる公理に立脚している異なる形式が存在していることを説明しましたが，ここでお伝えしたいことは，異なる形式が存在すること自体に意味があることです．

量子力学に話を戻します．量子力学にも古典力学と同様に，Hilbert 空間形式とは異なる形式は存在します．その一つが代数的量子論と呼ばれるもので，1947 年の Segal の論文 [4] に端を発します．代数的量子論ではその名の通り，はじめに物理量代数なる代数[*15] が与えられたとし，状態は物理量に期待値を与える写像として物理量代数上の線形汎関数

[*11] 力という概念は Newton 力学創立当時，簡単には受け入れられませんでした．

[*12] 最小作用の原理や Hamilton の変分原理は，ある種の最適化問題として物理を捉えるというアイディアですが，これは幾何光学における公理である Fermat の原理：光は光路長が最短となる経路を通る，にそのアイディアの源泉を見ることができます．

[*13] 今日の Hamilton 力学は，数学的にはシンプレクティック幾何学という幾何学の言葉で整理され，多くの概念が幾何学の言葉で定式化されているため，数学者（幾何学者）にとっては Newton 力学よりも Hamilton 力学の方が学び易いかもしれません．しかしながら，シンプレクティック幾何を学んだ段階で多くの何かしら力学と関連する概念を予め学習しているわけですから，力学的な概念は Newton 力学の方が初等的で学びやすいという主張はそれほど間違っていないと思います．

[*14] 力学を題材に説明しましたが，数学においては同値な命題の探求は頻繁に日常的に行われており，多角的な視点の獲得の有用性はより顕著に現れているように思います．例えば，実数の概念の定義に，Dedekind 切断を用いたもの，部分集合の上限の存在を用いたものなど，多数の同値な定義がありますが，一つの対象が豊かな表現形式を持っていることを知ることは，その概念の理解に重要な役割を果たすと言えるでしょう．例えば，実数の Dedekind 切断による定義は量子集合論において “量子実数” と自己共役作用素（のスペクトル族）の間の対応を見るために，重要な役割を果たします．

[*15] 例えば行列環．より一般化して C^* 代数．

として導入されます．このとき，最早 Hilbert 空間は期待値汎関数としての状態から構成されるという，下位の概念になります．

さて，一方で Mackey は “物理的に満足のいく公理系” に立脚した量子論の構築を目指し，この公理系を出発点とした Hilbert 空間形式の量子力学の再構成という問題を掲げます．また，同時に量子力学の代替理論としての隠れた変数理論の存在・非存在などに関する量子力学の基礎的な問題も提起しました．これを契機に量子論理に関する研究が盛んになりました．Mackey の導入した量子論理は，“物理的に満足のいく公理系” から出発すると，Hilbert 空間形式の量子力学の論理 $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ が満たす，orthomodular 律を導くものでした．その後の量子論理の発展の方向は大きく分けて 2 つあります．

1 つ目は，Mackey の提起した問題，すなわち量子論理からどのようにして Hilbert 空間形式の量子力学が得られるのか，という問題に関する研究で，次節で詳しく紹介します．Mackey 自身，これに関連する論文をひとつ書いています：量子論理が Hilbert 空間ではなく Banach 空間の閉部分空間全体として表現された場合，orthocomplementation の構造から内積の構造が誘導されてこの内積で Banach 空間は Hilbert 空間になる．これは，Hilbert 空間の閉部分空間全体としての量子論理は，構造の “摂動” に関して堅牢であることを示唆しています．その後，1995 年までこの種の研究は細々とですが綿々と続き，[9] の論文で示された定理によって解決した，という状況です．この方面のサーベイとして [10] があります．

2 つ目は，Mackey の量子論理から得られた orthomodular 律を満たす半順序集合を用いた隠れた変数理論の存在・非存在に関する問題や同時観測可能性の研究，量子論理が Hilbert 空間の閉部分空間全体 $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ で表現されたとして，$\mathscr{L}(\mathscr{H})$ の構造と状態や物理量の構造との関係を調べる研究，それから対称性の表現を与える Wigner の定理の一般化などがあります．この方面の研究は膨大で，例えば [8] が良いサーベイになっています．

さて，上で説明した Mackey の “物理的に満足のいく公理系” から出発して orthomodular 律を満たす半順序集合の導出，そして，Hilbert 空間形式の量子力学を導くという道筋を，次節で辿ってみることにします．

2.4　Hilbert 空間形式の量子力学の再構成

この節では，Mackey による量子論理 [3] と，それを出発点に Hilbert 空間形式の量子力学を再構成するという研究を紹介します．1963 年，Mackey は “物理的に満足のいく公理系” を出発点とした量子力学の再構成を試みます．後述するように，Mackey の公理系から orthomodular 律を満たす実験的命題の半順序集合の導出に成功するものの，Hilbert 空間形式の量子力学を再構成するまでには至りませんでした．Mackey はその後の課題として，Hilbert 空間形式の量子力学の再構成を大きな問題として掲げ，多くの関連研究を促しました．以下で，この道筋を辿ってみたいと思います．

Axiom 2.4.1 (物理系を記述する体系の定義)**.** 与えられた物理系 $\mathfrak{S}$ には，物理量全体という集合 $\mathcal{O}$ と，状態全体という集合 $\mathcal{S}$ が同伴し，実区間 $[0,1]$ に値を持つ $\mathcal{O}\times\mathcal{S}\times\mathscr{B}(\mathbb{R})$ 上の関数 p が定まる．ここで，$\mathscr{B}(\mathbb{R})$ は実数体 $\mathbb{R}$ 上の *Borel* 集合体である．

物理系を記述するためには，対象の認識方法を明確にしなければなりません．そのための先験的概念として，認識されるべき概念として物理量を，認識方法の指定を与える概念

として状態を設け，物理量と状態の間の関係を規定するための概念装置として p という関数を用いる，という戦略を宣言したものが axiom 2.4.1 であると見做せます[*16].

Axiom 2.4.2 (p は確率測度を定める)**.** 任意の物理量 A と任意の状態 α に対して，関数

$$p(A,\alpha,\cdot) : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \ni E \mapsto p(A,\alpha,E) \in [0,1] \tag{2.1}$$

は $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ 上の確率測度である*.*

値 $p(A,\alpha,E)$ を “状態 α において物理量 A を Borel 集合 E に値を見出す確率” と読む.

Axiom 2.4.3 ($\mathcal{O}$ と $\mathcal{S}$ の最小条項条件)**.** 物理量 A,B が，任意の状態 α と任意の *Borel* 集合 E に対して $p(A,\alpha,E) = p(B,\alpha,E)$ を満たすならば，$A = B$ である*.*

状態 α,β が，任意の物理量 A と任意の *Borel* 集合 E に対して $p(A,\alpha,E) = p(A,\beta,E)$ を満たすならば，$\alpha = \beta$ である*.*

Axiom 2.4.4 (物理量の Borel 関数による変換性)**.** 任意の物理量 A と任意の *Borel* 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して，物理量 B が存在して，任意の状態 α と任意の *Borel* 集合 E に対して

$$p(B,\alpha,E) = p(A,\alpha,f^{-1}(E)) \tag{2.2}$$

が成立する*.*

axiom 2.4.3 より，(2.2) が成立する物理量 B は唯一つである．物理量 A と Borel 関数 f に対して唯一つ定まる物理量 B を $f(A)$ と書き表す．従って，A^2 や $\exp(A)$ などの物理量が定まる．

Axiom 2.4.5 (状態集合 $\mathcal{S}$ の σ-凸性)**.** 任意の状態列 $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と和が 1 である非負の実数列 $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ($t_n \geq 0, \sum_n t_n = 1$) に対して，状態 α が存在して任意の物理量 A と任意の *Borel* 集合 E に対して

$$p(A,\alpha,E) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n p(A,\alpha_n,E) \tag{2.3}$$

が成り立つ*.*

axiom 2.4.3 より，(2.3) が成立する状態 α は唯一つである．そこで，(2.3) で定まる状態 α を $\sum_{n=1}^{\infty} t_n\alpha_n$ と書き表す．

Definition 2.4.1 (純粋状態と混合状態)**.** 状態 α が純粋状態である，とは実数 $t \in (0,1)$ と状態 α_1, α_2 が存在して

$$\alpha = t\alpha_1 + (1-t)\alpha_2 \tag{2.4}$$

が成り立つならば，$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ であるときをいう．すなわち，純粋状態とは $\mathcal{S}$ の端点である．純粋状態でない状態を混合状態と呼ぶ*.*

[*16] やや話がそれますが更に付け加えるならば，認識するものとされるものという 2 項を先験的に与え，それらが満たす関係を指定することによって全体を規定するという戦略は，科学における常套手段であるように感じます．こうした考え方は，双対性という概念でしばしば定式化され，物理量と状態にもある種の双対性を感じ取ることができます．実際，この物理量と状態の双対性は，代数的量子論という立場では，数学的な意味を持ちえます：状態は物理量からなるベクトル空間 (例えば Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ 上の有界線形作用素全体 $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$)) 上の線形汎関数として表現 [4] されます.

物理系 $\mathfrak{S}$ の論理構造を調べるために重要な役割を果たす物理量，“質問”を導入する．

Definition 2.4.2 (質問)**.** 物理量 Q が質問であるとは，任意の状態 α に対して $p(Q, \alpha, \{0, 1\}) = 1$ が成り立つものをいう．

任意の質問 Q に対して

$$p(Q, \alpha, E) = \begin{cases} 1 & (0, 1 \in E) \\ p(Q, \alpha, \{1\}) & (0 \notin E,\ 1 \in E) \\ p(Q, \alpha, \{0\}) & (0 \in E,\ 1 \notin E) \\ 0 & (0, 1 \notin E) \end{cases} \tag{2.5}$$

が成立し，質問 Q は $\{p(Q, \alpha, \{1\})\}_{\alpha \in \mathcal{S}}$ で決まる．ここで，1 点集合 $\{1\}$ が “はい”という文を表現し，1 点集合 $\{0\}$ が “いいえ”という文を表現していると読む．

Definition 2.4.3 (論理)**.** $\mathcal{O}$ に属する質問全体を系 $\mathfrak{S}$ の論理といい，$\mathscr{L}$ と書く．

Example 2.4.1 (質問の構成)**.** 任意の物理量 A と *Borel* 集合 F 上で値 1 をとる特性関数 χ_F ($\chi_F(x) = 0$ $(x \notin F)$, $\chi_F(x) = 1$ $(x \in F)$) に対して $\chi_F(A)$ は質問である．この形の質問を $Q(A, F)$ と書く．すなわち，$Q(A, F) = \chi_F(A)$ とする．

質問 $Q(A, F)$ は，“物理量 A が *Borel* 集合 F に値をとるか，とらないか”という *2* 択の質問を表していると解釈できる．

物理量 A に対して，$I := Q(A, \mathbb{R}), O := Q(A, \emptyset)$ と書く．I, O は物理量 A のとり方に依らずに定まる．実際，axiom 2.4.4 より，任意の状態 α と任意の Borel 集合 E に対して

$$\begin{aligned} p(Q(A, \mathbb{R}), \alpha, E) &= p(A, \alpha, \chi_{\mathbb{R}}^{-1}(E)) = \begin{cases} 1 & (1 \in E) \\ 0 & (1 \notin E) \end{cases} \\ p(Q(A, \emptyset), \alpha, E) &= p(A, \alpha, \chi_{\emptyset}^{-1}(E)) = \begin{cases} 1 & (0 \in E) \\ 0 & (0 \notin E) \end{cases} \end{aligned} \tag{2.6}$$

が成立する．

Fact 2.4.1. 物理量 A, B が任意の *Borel* 集合 F に対して $Q(A, F) = Q(B, F)$ を満たしているとき，$A = B$ である．すなわち，$\{Q(A, F)\}_{F \in \mathscr{B}(\mathbb{R})}$ が A を定める．

Proof. 任意の Borel 集合 F に対して $Q(A, F) = Q(B, F)$ であるとする．このとき任意の状態 α と任意の Borel 集合 F に対して次が成立する：

$$\begin{aligned} & p(Q(A, F), \alpha, \{1\}) = p(Q(B, F), \alpha, \{1\}) \\ \Leftrightarrow\ & p(A, \alpha, \chi_F^{-1}(\{1\})) = p(B, \alpha, \chi_F^{-1}(\{1\})) \\ \Leftrightarrow\ & p(A, \alpha, F) = p(B, \alpha, F). \end{aligned} \tag{2.7}$$

axiom 2.4.3 より，$A = B$ である． □

Fact 2.4.2. 任意の質問 Q_1 に対して，物理量 A と *Borel* 集合 F が存在して $Q_1 = Q(A, F)$ が成立する．

Proof. 物理量 A と Borel 集合 F を $A = Q_1, F = \{1\}$ ととれば，任意の状態 α に対して

$$\begin{aligned} p(Q(Q_1, \{1\}), \alpha, \{1\}) &= p(Q_1, \alpha, \chi_{\{1\}}^{-1}(\{1\})) \\ &= p(Q_1, \alpha, \{1\}) \end{aligned} \tag{2.8}$$

が成立する．よって $Q_1 = Q(Q_1, \{1\})$ である． □

状態から論理上の関数が誘導される．

Definition 2.4.4. 状態 α に対して写像

$$m_\alpha : \mathscr{L} \to [0,1] \tag{2.9}$$

を $m_\alpha(Q) := p(Q, \alpha, \{1\})$ によって定める．

$m_\alpha(Q)$ は "状態 α において質問 Q が 'はい' である確率" と解釈される．

Fact 2.4.3. 質問 Q_1, Q_2 が任意の状態 α に対して $m_\alpha(Q_1) = m_\alpha(Q_2)$ を満たすならば $Q_1 = Q_2$．状態 α, β が任意の質問 Q に対して $m_\alpha(Q) = m_\beta(Q)$ を満たすならば $\alpha = \beta$.

fact 2.4.3 は集合同型 $\mathcal{S} \cong \{m_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{S}}$ を意味する．
$\{m_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{S}}$ は $\mathscr{L}$ に順序構造を誘導する．

Definition 2.4.5. 質問 Q_1, Q_2 に対して，

$$Q_1 \le Q_2 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall\alpha \in \mathcal{S}, \quad m_\alpha(Q_1) \le m_\alpha(Q_2) \tag{2.10}$$

と定める．

Fact 2.4.4. $(\mathscr{L}, \le)$ は半順序集合.

fact 2.4.4 を以って，$\mathcal{S}$ は $\mathscr{L}$ の順序を決定するという．

Fact 2.4.5. 任意の質問 Q に対して $1 - Q \in \mathscr{L}$.

fact 2.4.4，fact 2.4.5 を用いると論理に "直交性"が定まる．

Definition 2.4.6 (直交性)**.** *2* つの質問 Q_1, Q_2 が直交するとは

$$Q_1 \le 1 - Q_2 (\Leftrightarrow \forall\alpha \in \mathcal{S}, m_\alpha(Q_1) + m_\alpha(Q_2) \le 1) \tag{2.11}$$

であることをいう．このとき $Q_1 \perp Q_2$ と書き表す．

$Q_1 \perp Q_2$ は，"ある状態が存在して 2 つの質問 Q_1, Q_2 が確率 1 で 'はい'"，とはならないことを意味している．$\mathscr{L}$ が集合代数で表現されるとき，直交性は disjoint であることと同値である．

Example 2.4.2. ある物理量 A に対して，*2* つの質問 $Q_1 = Q(A, E_1), Q_2 = Q(A, E_2)$ をとる．任意の状態 α に対して

(i) $E_1 \subset E_2$ であるとき

$$\begin{aligned} m_\alpha(Q_1) &= p(Q(A, E_1), \alpha, \{1\}) \\ &= p(A, \alpha, \chi_{E_1}^{-1}(\{1\})) \\ &= p(A, \alpha, E_1) \\ &\le p(A, \alpha, E_2) = m_\alpha(Q_2). \end{aligned}$$

よって $Q_1 \le Q_2$ である．

(ii) $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ であるとき

$$\begin{aligned} m_\alpha(Q_1) + m_\alpha(Q_2) &= p(A, \alpha, E_1) + p(A, \alpha, E_2) \\ &= p(A, \alpha, E_1 \sqcup E_2) \leq 1. \end{aligned}$$

よって $Q_1 \perp Q_2$ である．

任意の状態 α と互いに素な *Borel* 集合の列 $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，$E := \sqcup_{n=1}^{\infty} E_n$ とおくと

$$m_\alpha(Q(A,E)) = \sum_{n=1}^{\infty} p(A, \alpha, E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m_\alpha(Q(A, E_n)) \tag{2.12}$$

が成立する．

Fact 2.4.6. 上の $Q(A,E)$ は $\{Q(A,E_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ で一意的に定まる．

fact 2.4.6 より次が well-defined に定まる：

$$\sum_{n=1}^{\infty} Q(A, E_n) := Q(A, E). \tag{2.13}$$

これを $Q(A,F)$ の形の質問に限らず，一般の質問に対して一般化して，次の定義を設ける：

Definition 2.4.7. 互いに直交する質問の列 $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{L}^{\mathbb{N}}$ $(Q_i \perp Q_j (i \neq j))$ に対して，$Q := \sum_{n=1}^{\infty} Q_n$ を任意の状態 α に対して $m_\alpha(Q) = \sum_{n=1}^{\infty} m_\alpha(Q_n)$ が成立する質問として定義する．

Remark 2.4.1. 数学的には，任意の互いに直交する質問の列 $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{L}^{\mathbb{N}}$ に対して，*definition 2.4.7* を満たす質問 Q が存在するとは限らない．しかしながら，互いに直交する質問に対してその和が定義できることは物理的には自然な要請である．

そこで，次の公理を設ける：

Axiom 2.4.6. 任意の互いに直交する質問の列 $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{L}^{\mathbb{N}}$ に対して，*definition 2.4.7* を満たす質問 Q が存在する．

Remark 2.4.2. *axiom 2.4.6* は任意の状態 α に対して，m_α が論理 $\mathscr{L}$ 上の確率測度であることを意味する：

(i) $m_\alpha(I) = 1$,

(ii)（一般化 σ-加法性）任意の互いに直交する質問の列 $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{L}^{\mathbb{N}}$ に対して

$$m_\alpha\Bigl(\sum_{n=1}^{\infty} Q_n\Bigr) = \sum_{n=1}^{\infty} m_\alpha(Q_n). \tag{2.14}$$

Theorem 2.4.1 (Kadison)**.** 任意の互いに直交する質問の列 $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{L}^{\mathbb{N}}$ に対して，質問 R が存在して，任意の番号 n に対して $Q_n \leq R$ を満たすとすると，

$$\sum_{n=1}^{\infty} Q_n \leq R \tag{2.15}$$

が成立する．すなわち，$\sum_{n=1}^{\infty} Q_n$ は $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の上限である．

Proof. まず $S \perp Q'$, $S \perp Q''$, $Q' \perp Q''$ であるならば $S \perp (Q' + Q'')$ であることを示す．$S \perp Q', S \perp Q''$, $Q' \perp Q''$ であるとすると，axiom 2.4.6 より次を満たす質問 Q''' が存在する：$Q''' = S + Q' + Q''$．すなわち，任意の状態 α に対して，$m_\alpha(Q''') = m_\alpha(S) + m_\alpha(Q') + m_\alpha(Q'') \leq 1$ が成立する．再び axiom 2.4.6 より，$m_\alpha(Q') + m_\alpha(Q'') = m_\alpha(Q' + Q'')$ である．以上により，$m_\alpha(S) + m_\alpha(Q' + Q'') \leq 1$ が成立する．すなわち，$S \perp (Q' + Q'')$ である．

仮定により，任意の番号 $n \in \mathbb{N}$ に対して $Q_n \leq R$ であるから $(1 - R) \perp Q_n$ $(n \in \mathbb{N})$ である．これと上の議論，そして数学的帰納法から任意の番号 $N \in \mathbb{N}$ に対して $(1 - R) \perp \sum_{n=1}^N Q_n$ が成立する．すなわち $\sum_{n=1}^N Q_n \leq R$ である．よって，任意の状態 α に対して $m_\alpha(\sum_{n=1}^N Q_n) \leq m_\alpha(R)$ が成立する．$\sum_{n=1}^N Q_n$ の定義により，$\sum_{n=1}^N m_\alpha(Q_n) \leq m_\alpha(R)$ である．有界な単調数列は収束するから，$\sum_{n=1}^\infty m_\alpha(Q_n)$ が存在して，$\sum_{n=1}^\infty m_\alpha(Q_n) \leq m_\alpha(R)$ が成立する．論理 $\mathscr{L}$ 上の順序関係の定義から $\sum_{n=1}^\infty Q_n \leq R$ である． □

物理量 A が与えられたとき，論理値測度が定まる．まず，論理値測度を定義する．

Definition 2.4.8 (論理値測度)**.** 写像

$$q : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \ni E \mapsto q(E) \in \mathscr{L} \tag{2.16}$$

が論理値測度であるとは，次を満たすときをいう：

(i) $q(\emptyset) = 0, \quad q(\mathbb{R}) = 1,$

(ii) $\forall E, \forall F \in \mathscr{B}(\mathbb{R}),\ E \cap F = \emptyset \Rightarrow q(E) \perp q(F),$

(iii) 互いに素な *Borel* 集合の列 $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ に対して

$$q\Big(\sqcup_{n=1}^\infty E_n \Big) = \sum_{n=1}^\infty q(E_n). \tag{2.17}$$

Fact 2.4.7. 任意の物理量から論理値測度が誘導される：

$$Q(A, \cdot) : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \ni E \mapsto Q(A, E) \in \mathscr{L} \tag{2.18}$$

とおくと，$Q(A, \cdot)$ は論理値測度である．

fact 2.4.1 より次の事実が従う：

Fact 2.4.8. 物理量 A, B に対して，誘導される二つの論理値測度が等しい：$Q(A, \cdot) = Q(B, \cdot)$ ならば，$A = B$ である．従って，次の集合同型が得られる：

$$\mathcal{O} \cong \{Q(A, \cdot)\}_{A\in\mathcal{O}}. \tag{2.19}$$

任意の論理値測度は適当な物理量から誘導される論理値測度であると要請する：

Axiom 2.4.7. 任意の論理値測度 q に対して，物理量 A が存在して $q = (A, \cdot)$ である．

Remark 2.4.3. *axiom 2.4.7* でいう物理量 A は *fact 2.4.8* によって一意的に定まる．*axiom 2.4.7* は物理量は論理値測度にほかならないことを意味している．

Theorem 2.4.2. $\perp$: $\mathscr{L} \ni Q \mapsto 1 - Q =: Q^{\perp} \in \mathscr{L}$ は *orthocomplementation* である．すなわち，次が成立する：

(i) $\forall Q \in \mathscr{L},\ (Q^{\perp})^{\perp} = Q,$

(ii) $\forall Q \in \mathscr{L},\ Q + Q^{\perp} = 1,$

(iii) $\forall Q_1,\ \forall Q_2 \in \mathscr{L},\ Q_1 \leq Q_2 \Rightarrow Q_2^{\perp} \leq Q_1^{\perp}.$

Proof. (i) Borel 関数 $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto 1 - x \in \mathbb{R}$ をとる．任意の状態 α に対して，

$$\begin{aligned} m_\alpha((Q^{\perp})^{\perp}) &= p((Q^{\perp})^{\perp}, \alpha, \{1\}) \\ &= p((Q^{\perp}), \alpha, f^{-1}(\{1\})) \\ &= p(Q^{\perp}, \alpha, \{0\}) \\ &= p(Q, \alpha, f^{-1}(\{0\})) \\ &= p(Q, \alpha, \{1\}) \\ &= m_\alpha(Q) \end{aligned}$$

が成立する．よって $(Q^{\perp})^{\perp} = Q$.

(ii) $Q \perp Q^{\perp}$ より $Q + Q^{\perp}$ が well-defined であることに注意する．このとき任意の状態 α に対して

$$\begin{aligned} m_\alpha(Q + Q^{\perp}) &= m_\alpha(Q) + m_\alpha(Q^{\perp}) \\ &= p(Q, \alpha, \{1\}) + p(Q, \alpha, \{0\}) \\ &= p(Q, \alpha, \{0, 1\}) = 1 \\ &= p(I, \alpha, \{1\}) = m_\alpha(I) \end{aligned}$$

が成立する．よって $Q + Q^{\perp} = 1$.

(iii) $Q_1 \leq Q_2$ とすると，任意の状態 α に対して $m_\alpha(Q_1) \leq m_\alpha(Q_2)$ である．すなわち

$$\begin{aligned} & m_\alpha(Q_1) \leq m_\alpha(Q_2) \quad (\alpha \in \mathcal{S}) \\ \Leftrightarrow\ & p(Q_1, \alpha, \{1\}) \leq p(Q_2, \alpha, \{1\}) \quad (\alpha \in \mathcal{S}) \\ \Leftrightarrow\ & p(Q_2, \alpha, \{0\}) \leq p(Q_1, \alpha, \{0\}) \quad (\alpha \in \mathcal{S}) \\ \Leftrightarrow\ & m_\alpha(Q_2^{\perp}) \leq m_\alpha(Q_1^{\perp}) \quad (\alpha \in \mathcal{S}) \end{aligned}$$

が成立する．よって $Q_2^{\perp} \leq Q_1^{\perp}$. □

theorem 2.4.2 より次が従う：

Fact 2.4.9. $\mathscr{L}$ は *σ-orthocomplete* であり，*de Morgan* の法則を満たす．すなわち，任意の互いに直交する質問の列 $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathscr{L}^{\mathbb{N}}$ に対して，下限 $\bigwedge_{n=1}^{\infty} Q_n$ が存在して

$$(\sum_{n=1}^{\infty} Q_n)^{\perp} = \bigwedge_{n=1}^{\infty} Q_n^{\perp}, \quad (\bigwedge_{n=1}^{\infty} Q_n)^{\perp} = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n^{\perp}. \tag{2.20}$$

Theorem 2.4.3. $\mathscr{L}$ は *orthomodular* 律を満たす半順序集合である：

$$Q_1 \leq Q_2 \Rightarrow Q_2 = Q_1 + (Q_1 + Q_2^{\perp})^{\perp} (= Q_1 + (Q_1^{\perp} \wedge Q_2)). \tag{2.21}$$

Proof. $Q_1 \leq Q_2$ のとき $Q_1 \perp Q_2^{\perp}$ が成立するから，axiom 2.4.6 より $Q_1 + Q_2^{\perp} \in \mathscr{L}$ が存在する．任意の状態 α に対して

$$m_\alpha(Q_1 + Q_2^{\perp}) = m_\alpha(Q_1) + m_\alpha(Q_2^{\perp}) \geq m_\alpha(Q_1)$$

より $Q_1 \leq Q_1 + Q_2^{\perp}$, であるから $Q_1 \perp (Q_1 + Q_2^{\perp})^{\perp}$ が成立する．従って, 再び axiom 2.4.6 より $Q_1 + (Q_1 + Q_2^{\perp})^{\perp} \in \mathscr{L}$ が存在する．一方，任意の状態 α に対して

$$\begin{aligned} m_\alpha(Q_1 + (Q_1 + Q_2^{\perp})^{\perp}) &= m_\alpha(Q_1) + m_\alpha((Q_1 + Q_2^{\perp})^{\perp}) \\ &= m_\alpha(Q_1) + 1 - m_\alpha(Q_1 + Q_2^{\perp}) \\ &= m_\alpha(Q_2). \end{aligned}$$

が成立する．よって $Q_1 \leq Q_2 \Rightarrow Q_2 = Q_1 + (Q_1 + Q_2^{\perp})^{\perp}$. □

以上をまとめると，次の定理を得る：

Theorem 2.4.4. 物理系 $\mathfrak{S}$ が *axiom 2.4.1* から *axiom 2.4.7* を満たすとき，*σ-orthocomplete orthomodular* 律を満たす半順序集合である論理 $\mathscr{L}$ と，$\mathscr{L}$ の順序を決定する σ-凸な $\mathscr{L}$ 上の確率測度の族 $\{m_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{S}}$ が同伴する．

以上の公理系から得られる論理 $\mathscr{L}$ を，Mackey の量子論理とよぶことにします．Mackey は以上の公理系に加えて，通常の Hilbert 空間を用いた量子力学の形式を得るために次の公理を設けました：

Axiom 2.4.8. 物理系 $\mathfrak{S}$ の論理 $\mathscr{L}$ は，ある可分な無限次元複素 *Hilbert* 空間の閉部分空間全体の成す半順序集合と順序同型である．

axiom 2.4.8 のおかげで，Mackey の公理系から，通常の Hilbert 空間を用いた量子力学が得られます．自己共役作用素のスペクトル分解定理と論理値測度と物理量の対応から，物理量は 1 対 1 に Hilbert 空間上の自己共役作用素に対応します．また，状態は密度作用素によって表現されます（Gleason の定理 [12]）．

しかしながら，axiom 2.4.8 は他の 6 つの公理系に比べて物理的な動機付けに乏しく，実際，Mackey 自身 axiom 2.4.8 について，物理的に不満足な公理でありより物理的に自然で満足のいく公理を探す必要がある，と述べています[*17].

[*17] 実際には，次のように述べています [3]（通し番号と記号を本小論に合わせて適宜変えました.）：

This axiom has rather a different character from axiom 2.4.2 through axiom 2.4.7. These all had some degree of physical naturalness and plausibility. axiom 2.4.8 seems entirely *ad hoc*. Why do we make it? Can we justify making it? What else might we assume? We shall discuss these questions in turn. The first is the easiest to answer. We make it because it " works", that is, it leads to a theory which explains physical phenomena and successfully predicts the results of experiments. It is conceivable that quite different assumption would do likewise but this is a possibility that no one seems to have explired. Ideally one would like to have a list of physically plausible assumptions from which one could deduce axiom 2.4.8. Short of this one would like a list from which one could deduce a set of possiblilities for the structure of $\mathscr{L}$, all but one of which could be shown to be inconsistent with suitably planned experiments. At the moment such lists are not available and we are far from being forced to accept axiom 2.4.8 as ligically inevitable. On the other hand, this axiom is by no means as completely *ad hoc* as it appears at first sight. If we replace the question, "What must $\mathscr{L}$ be?" by the easier one, "What might we expect $\mathscr{L}$ to be, given that natural laws are usually simple and elegant?", we find that we are led to a number of possibilities for axiom 2.4.8 that do not differ very much from the one we have adoped.

Mackey の提示したこの問題は，その後細々とですが綿々と続けられ，1995 年に解決を見ました [10]．本稿の最後に，この取組の様子を紹介します．

Axiom 2.4.9 (状態の正則性条件)**.** (i) 論理 $\mathscr{L}$ は *separable* である．すなわち，互いに直交する質問は高々可算個である．

(ii) 状態 α と質問 Q_1, Q_2 が $m_\alpha(Q_1) = m_\alpha(Q_2) = 0$ を満たすならば，質問 R で $Q_1, Q_2 \leq R$ と $m_\alpha(R) = 0$ を満たすものが存在する．

axiom 2.4.9 から次が従う：

Fact 2.4.10. 任意の状態 α に対して，

$$m_\alpha(Q) = 1 \Leftrightarrow R \leq Q \quad (Q \in \mathscr{L}) \tag{2.22}$$

を満たす質問 R が一意的に存在する．この質問 R を $\mathrm{supp}(\alpha)$ と書く．すなわち, $\mathrm{supp}(\alpha)$ は $\{Q \in \mathscr{L} \,|\, m_\alpha(Q) = 1\}$ の最小元である．

Proof. 任意に状態 α をとり固定する．$N_\alpha := \{Q \in \mathscr{L} \,|\, m_\alpha(Q) = 0\}$，$\mathcal{N}_\alpha := \{\{Q_i\}_i \subset N_\alpha | Q_i \perp Q_j\ (i \neq j)\}$ とおくと，$\mathcal{N}_\alpha$ は空でなく，包含関係を順序として帰納的半順序集合となる．従って，Zorn の補題より極大元 $\{Q_n^M\}_n \in \mathcal{N}_\alpha$ が存在する．axiom 2.4.9(i):$\mathscr{L}$ の separability より $\#\{Q_n^M\}_n \leq \aleph_0$ [*18]．従って，theorem 2.4.1(Kadison) より $\{Q_n^M\}_n$ の上限 $\sum_n Q_n^M$ が存在する．これを $R \in \mathscr{L}$ を用いて $R^\perp = \sum_n Q_n^M$ と書いておく．任意の番号 $n \in \mathbb{N}$ に対して $Q_n^M \in N_\alpha$ より

$$m_\alpha(R^\perp) = m_\alpha(\sum_n Q_n^M) = \sum_n m_\alpha(Q_n^M) = 0;\ m_\alpha(R) = 1$$

が成立する．

今，質問 Q が存在して $m_\alpha(Q) = 0 : Q \in N_\alpha$，とすると axiom 2.4.9(ii) より質問 P であって $Q, R^\perp \leq P$ かつ $m_\alpha(P) = 0$ を満たすものが存在する．$Q \not\leq R^\perp$ と仮定する．$\mathscr{L}$ の orthomodularity と $R^\perp \leq P$ から $P = (P \wedge (R^\perp)^\perp) + R^\perp$．よって $0 = m_\alpha(P) = m_\alpha(P \wedge R) + m_\alpha(R^\perp)$ である．$m_\alpha(R^\perp) = 0$ であったから $m_\alpha(P \wedge R) = 0 : P \wedge R \in N_\alpha$ を得る．

一方，$P \wedge R \leq R = \bigwedge_n (Q_n^M)^\perp \leq (Q_n^M)^\perp\ (n \in \mathbb{N})$ より $P \wedge R \perp Q_n^M\ (n \in \mathbb{N})$．これと $P \wedge R \in N_\alpha$ に注意すれば，$\{P \wedge R\} \cup \{Q_n^M\}_n \in \mathcal{N}_\alpha$ を得る．これは $\{Q_n^M\}_n$ の極大性に矛盾する．よって $Q \leq R^\perp$ である．

以上より, 任意の質問 Q に対して $m_\alpha(Q) = 0 \Rightarrow Q \leq R^\perp$ である．換言すれば, 任意の質問 Q に対して $m_\alpha(Q) = 1 \Rightarrow R \leq Q$ である．$m_\alpha(R) = 1$ より $R \leq Q \Rightarrow m_\alpha(Q) = 1$ は明らかである．

一意性も明らかである． □

以上までの議論は，古典力学（Hamilton 力学）にも適用可能な公理系であることが確かめられます．従って，量子力学の理論を得るためには，量子力学特有の現象を言い表した公理系を導入する必要があります．Dirac によれば，それは純粋状態の重ね合わせの原理です．これを量子論理で定式化するために，純粋状態に関する次の公理を導入します：

*18 集合 X に対して $\#X$ は X の濃度，$\aleph_0$ は可算濃度を表す．

Axiom 2.4.10 (純粋状態の存在と一意性)**.** (i) ゼロでない任意の質問 Q に対して，純粋状態 α が存在して，$m_\alpha(Q) = 1$ が成立する．

(ii) α を純粋状態とすると，α は $m_\alpha(\mathrm{supp}(\alpha)) = 1$ を満たす，唯一つの（純粋）状態である．

axiom 2.4.9 と axiom 2.4.10 から次が従う：

Fact 2.4.11. (i) ゼロでない任意の質問 P に対して状態 α が存在して $P = \mathrm{supp}(\alpha)$ が成立する．

(ii) 純粋状態 α に対して $\mathrm{supp}(\alpha)$ は $\mathscr{L}$ の *atom* *19 であり，逆に任意の $\mathscr{L}$ の *atom* P に対して（純粋）状態 α が一意的に存在して $P = \mathrm{supp}(\alpha)$ が成立する．

(iii) 論理 $\mathscr{L}$ は *complete atomistic* *20 *lattice* である．

Proof. (i) ゼロでない質問 P を任意にとり固定する．axiom 2.4.10(i) より純粋状態 β で $m_\beta(P) = 1$ を満たすものが存在する．ここで $W_P := \{Q \in \mathscr{L} |\ \exists\beta \in \mathcal{S},\ m_\beta(P) = 1,\ Q = \mathrm{supp}(\beta)\}$，$\mathcal{W}_P := \{\{Q_i\}_i \subset W_P |\ Q_i \perp Q_j\ (i \neq j)\}$ とおくと，$\mathcal{W}_P$ は空ではなく，包含関係を順序として帰納的半順序集合となる．従って，Zorn の補題より極大元 $\{Q_n^M\}_n \in \mathcal{W}_P$ が存在する．axiom 2.4.9(i):$\mathscr{L}$ の separability より $\#\{Q_n^M\}_n \leq \aleph_0$．従って，theorem 2.4.1(Kadison) より $\{Q_n^M\}_n$ の上限 $R := \sum_n Q_n^M$ が存在する．$Q_n^M \in W_P$ より任意の番号 $n \in \mathbb{N}$ に対して状態 α_n が存在して $Q_n^M = \mathrm{supp}(\alpha_n)$ が成立する．

axiom 2.4.5 より，和が 1 である任意の非負実数列 $\{t_n\}_n$ ($t_n \geq 0$, $\sum_n t_n = 1$) に対して状態 $\alpha := \sum_n t_n\alpha_n$ が存在し，supp の性質から $R = \mathrm{supp}(\alpha)$ が確かめられる．このとき，任意の番号 $n \in \mathbb{N}$ に対して $m_{\alpha_n}(P) = 1$ だから状態の和の定義と $R = \mathrm{supp}(\alpha)$ から $m_\alpha(P) = \sum_n t_n m_{\alpha_n}(P) = 1 \Leftrightarrow R \leq P$．$\mathscr{L}$ の orthomodularity より $P = (P \wedge R^\perp) + R$ である．ここで $P \wedge R^\perp \neq 0$ とすると fact 2.4.10 の証明と同じくして $\{P \wedge R^\perp\} \cup \{Q_n^M\}_n \in \mathcal{W}_P$ が示せて $\{Q_n^M\}_n$ の極大性に矛盾する．よって，$R \wedge R^\perp = 0$ である．$P = (P \wedge R^\perp) + R$ より，$P = R = \mathrm{supp}(\alpha)$ が結論される．

(ii) 任意に純粋状態 α をとり固定する．$R := \mathrm{supp}(\alpha)$ とする．R が atom でないと仮定する．このときゼロでない質問 P が存在して $P < R$．axiom 2.4.10(i) より，状態 β が存在して $m_\beta(P) = 1$．また $m_\beta(R) = 1$．axiom 2.4.10(ii) より $\alpha = \beta$ である．よって $R = \mathrm{supp}(\alpha) = \mathrm{supp}(\beta) \leq P$ となるがこれは $P < R$ に矛盾する．以上より R は atom である．

P を $\mathscr{L}$ の atom とする．このとき axiom 2.4.10(i) より純粋状態 α で $m_\alpha(P) = 1$ を満たすものが存在する．fact 2.4.10 より $R := \mathrm{supp}(\alpha)$ がとれ，$\mathrm{supp}(\alpha)$ の定義より $R \leq P$ である．P は atom だから $P = R = \mathrm{supp}(\alpha)$．

一意性は axiom 2.4.10(ii) より従う．

(iii) complete lattice であることを示すのは少々面倒 [11] なので省略する．

*19 最小元 0 を持つ半順序集合 $\mathscr{L}$ の atom とは $\mathscr{L} \setminus \{0\}$ の極小元を指す．

*20 lattice $\mathscr{L}$ が complete であるとは，任意の $\mathscr{L}$ の部分集合 X に対して $\bigvee X$ が存在するものをいう．ここで $\bigvee$ は上限を表す（このとき下限の存在は自動的に保証される）．

最小元 0 をもつ lattice $\mathscr{L}$ が atomistic であるとは，任意の 0 でない元 $x \in \mathscr{L}$ に対して，atom の族 $\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が存在して $x = \bigvee_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda$ が成立することをいう．

atomic[*21]であることは容易に示せ，ゼロでない質問に対してそれより小さい atom 全体の上限をとることで complete orthomodular atomic lattice は atomistic であることが示せる．ここでは $\mathscr{L}$ が atomic であることを示す．

axiom 2.4.10(i) よりゼロでない任意の質問 P に対して，純粋状態 α で $m_\alpha(P)=1$ を満たすものが存在する．fact 2.4.11(ii) より $\mathrm{supp}(\alpha)$ は atom であり，$\mathrm{supp}(\alpha)$ の定義から $\mathrm{supp}(\alpha)\leq P$ である．よって $\mathscr{L}$ は atomic.

□

fact 2.4.11 より，論理 $\mathscr{L}$ の atom と $\mathcal{S}$ の純粋状態が 1 対 1 に対応する事が分かる．これは，Hilbert 空間形式の量子力学における，Hilbert 空間の 1 次元部分空間と純粋状態との対応，と対応する．この対応を用いて，純粋状態の重ね合わせを atom を用いて述べる．

Definition 2.4.9 (重ね合わせ)**.** *$\mathscr{L}$ の atom R が 2 つの相異なる atom P,Q の重ね合わせであるとは，$R\neq P,Q$ と $R\leq P\vee Q$ が成り立つことをいう．*

definition 2.4.9 は，2 つの相異なる純粋状態から，新しい純粋状態が作れることを意味している．これは古典力学には存在しない性質である．

重ね合わせの概念を用いて，重ね合わせの原理を述べる：

Axiom 2.4.11 (重ね合わせの原理)**.**
(i) *2 つの相異なる atom P,Q に対して，P,Q の重ね合わせが少なくとも一つ存在する．*
(ii) *atom R が 2 つの相異なる atom P,Q の重ね合わせであるとき，P は Q,R の重ね合わせでもあり，Q は P,R の重ね合わせでもある．*

Theorem 2.4.5. *Mackey の公理系 axiom 2.4.1 から axiom 2.4.7 と axiom 2.4.9, axiom 2.4.10, axiom 2.4.11 を満たす物理系 $\mathfrak{S}$ には，irreducible complete orthomodular atomistic lattice で covering 性[*22] を持つ論理 $\mathscr{L}$ が同伴する．さらに $\mathscr{L}$ に対して，対合 $*$ を持つ可除環 $\mathbb{D}$ と $\mathbb{D}$ 上の（左）ベクトル空間 V，V 上の $*$-双線形形式 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ が存在して，$\mathscr{L}$ は V の $\langle\cdot,\cdot\rangle$-閉部分空間[*23] 全体がなす半順序集合に順序同型である．*

Proof. この証明には束論的射影幾何の表現定理（の Varadarajan による拡張）が使われる．詳しい証明は [6] の p. 20-179（p. 179, Theorem 7.40 とその証明に必要な補題）をご覧頂きたい．ここでは axiom 2.4.11(i) より既約性が導かれ，axiom 2.4.11(ii) より covering 性が導かれる [5] ことを注意しておく． □

Axiom 2.4.12 (ユニタリ作用素が十分多いこと)**.** *直交する任意の 2 つの atom P,Q に対応する V の 1 次元部分空間 M_P,M_Q に対して，V 上のユニタリ作用素[*24] U_{PQ} が存在して，$U_{PQ}[M_P]=M_Q$ が成立する．*

[*21] 最小元 0 をもつ lattice $\mathscr{L}$ が atomic であるとは任意の $x(\neq 0)\in\mathscr{L}$ に対して atom $a\in\mathscr{L}$ が存在して $a\leq x$ であるものをいう．

[*22] 最小元 0 をもつ lattice $\mathscr{L}$ が covering 性を持つとは，任意の atom $a\in\mathscr{L}$ と任意の $x\in\mathscr{L}$ に対して $a\wedge x=0\Rightarrow x\lessdot x\vee a$ が成立することをいう．ここで $a\lessdot b$ は $a<b$ であって $a<c<b$ となる $c\in\mathscr{L}$ が存在しないことを表す（a と b の間に隙間はない）．

[*23] $\langle\cdot,\cdot\rangle$ に関する 2 重零化空間が自身に等しい部分空間のこと：$M\subset V$（部分空間）が $\langle\cdot,\cdot\rangle$-閉部分空間 $\overset{\mathrm{def}}{\iff}$ $(M^\perp)^\perp=M$, $(M^\perp:=\{y\in V|\forall x\in M,\ \langle x,y\rangle=0\})$ です．

[*24] 可除環 $\mathbb{D}$ 上のベクトル空間 V 上の作用素 $U:V\to V$ がユニタリ作用素であるとは，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ を保存する

Theorem 2.4.6. $\mathbb{D}$ を対合 $*$ を持つ可除環，V を $\mathbb{D}$ 上の左ベクトル空間，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ を V 上の $*$-双線形形式とする．V が可算無限個の $\langle\cdot,\cdot\rangle$ に関して長さ 1 の互いに直交するベクトル列（正規直交列）をもつとすると，$\mathbb{D}$ は実数体 $\mathbb{R}$，複素数体 $\mathbb{C}$ または四元数体 $\mathbb{H}$ のいずれかであり，V は $\langle\cdot,\cdot\rangle$ で *Hilbert* 空間となる[*25]．

Proof. 証明は省略する．[9] を参照されたい． □

Theorem 2.4.7. *axiom 2.4.1* から *axiom 2.4.7* を満たす物理系 $\mathfrak{S}$ の論理 $\mathscr{L}$ と $\mathscr{L}$ 上の確率測度の族 $\{m_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{S}}$ が *axiom 2.4.9* から *axiom 2.4.12* を満たすならば，論理 $\mathscr{L}$ は $\mathbb{D}$ 上の可分な *Hilbert* 空間の閉部分空間全体のなす半順序集合と順序同型である．ここで，$\mathbb{D}$ は実数体 $\mathbb{R}$，複素数体 $\mathbb{C}$ または四元数体 $\mathbb{H}$ のいずれかである．

以上によって，論理 $\mathscr{L}$ はある Hilbert 空間 $\mathscr{H}$ の閉部分空間全体がなす半順序集合と見做せることがわかりました．物理量は論理 $\mathscr{L}$ 値測度でしたが，自己共役作用素のスペクトル分解定理を思い出せば，物理量は $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素と 1 対 1 に対応することがわかります．

また，状態の表現には Gleason の定理 [12] が使えます：

Theorem 2.4.8 (Gleason, 1957[12])**.** $\mathscr{H}$ を可分な *Hilbert* 空間で $\dim\mathscr{H} \geq 3$ とする．$\mathscr{L}(\mathscr{H})$ を $\mathscr{H}$ の閉部分空間全体のなす半順序集合とする．$\mathscr{L}(\mathscr{H})$ 上の確率測度 $m : \mathscr{L}(\mathscr{H}) \to [0,1]$ を

(i) $m(\mathscr{H}) = 1$,

(ii) 互いに直交する閉部分空間の列 $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{L}(\mathscr{H})^{\mathbb{N}}$ に対して

$$m(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} M_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(M_n),$$

として定める．このとき，任意の $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ 上の確率測度 m に対して $\mathscr{H}$ 上の密度作用素 ρ： $\rho \geq 0, \mathrm{tr}[\rho] = 1$，が唯一つ存在して

$$m(M) = \mathrm{tr}[\rho P^M] \qquad (M \in \mathscr{L})$$

が成立する．ここで P^M は閉部分空間 $M \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ に対応する射影子である．

Proof. この証明は長大であるので省略する．論文以外では，例えば [5]，[6] に詳しい証明が載っている．証明の本質は $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $\dim\mathscr{H} = 3$ の場合で尽きており，証明は 2 次元球面上の調和解析の問題に帰着させることによって成される． □

以上によって，次の定理を得る：

線形作用素を指す：

$$\forall c, \forall d \in \mathbb{D},\ \forall x, \forall y \in V,\ U(cx+dy) = cU(x) + dU(y),$$
$$\forall x, \forall y \in V,\ \langle U(x), U(y)\rangle = \langle x, y\rangle.$$

[*25] 対合 $*$ は実数体 $\mathbb{R}$ のとき恒等写像，複素数体 $\mathbb{C}$ のとき複素共役で 4 元数体 $\mathbb{H}$ のとき 4 元数共役である．

Theorem 2.4.9. 物理系 $\mathfrak{S}$ が *axiom 2.4.1* から *axiom 2.4.7* および *axiom 2.4.9* から *axiom 2.4.12* を満たしているとする．このとき

(i) 物理系 $\mathfrak{S}$ には *1* つの可分な *Hilbert* 空間 $\mathscr{H}$ が対応する．ここで $\mathscr{H}$ は $\mathbb{D}=\mathbb{R},\mathbb{C}$ または $\mathbb{H}$ 上の *Hilbert* 空間である．
(ii) 物理量は $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素で表現される．
(iii) $\dim\mathscr{H}\geq 3$ のとき，状態は $\mathscr{H}$ 上の密度作用素 $\rho:\rho\geq 0,\mathrm{tr}[\rho]=1$ で表現される．
(iv) 状態 ρ において物理量 A を *Borel* 集合 E に値を見出す確率は $\mathrm{tr}[\rho Q_A(E)]$ である（$Q_A(E)$ は物理量 A に対応する自己共役作用素のスペクトル測度の E での値）．

ここで，状態に関する陳述に $\dim\mathscr{H}\geq 3$ という但し書きが付いているのは，しっかりとした理由があります．実際，$\mathbb{D}=\mathbb{C}$, $\dim\mathscr{H}=2$ のときには，密度作用素で表すことのできない状態の存在が示せます [13]．さらに，このような状態の存在を利用することで，所謂隠れた変数理論の存在が示せます．そういった意味では $\mathbb{D}=\mathbb{C}$, $\dim\mathscr{H}=2$ で記述される量子力学はある種特異であることがわかります．

さて，Mackey の量子論理を出発点として Hilbert 空間を再構成することで量子力学の公理系を（ほぼ）言い換えたわけですが，古典力学と量子力学を分かつ公理は何であったかを考えてみます．振り返ってみると，ベクトル空間による表現を与える重ね合わせの原理 axiom 2.4.11 が本質的な違いをもたらしていることに気づきます．実際，重ね合わせの原理 axiom 2.4.11 から既約性が導かれ，既約性は中心元が $0,1$ のみであることでしたが，$\mathscr{L}(\mathscr{H})$ において中心元であることは，対応する射影子が全ての射影子と可換であることと同値です [6]：$M\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$ が中心元 $\Leftrightarrow \forall N\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$, $[P^M,P^N]=P^MP^N-P^NP^M=0$．また，$\mathscr{L}(\mathscr{H})$ において $0,1$ 以外の中心元は，量子論理の表現を与える Hilbert 空間の直和分解を与えます．これに対応して純粋状態全体は直和分解され，異なる “相” における純粋状態間の重ね合わせを不可能にします．このような現象は，物理の教科書では超選択則などと呼ばれます．極端な例として，全ての元が中心元であるとき論理 $\mathscr{L}$ は Boole 代数になります．従って，中心元の多寡は量子系がどれほど古典系に近いかを表す指標の役割を果たしているように見えます．こうして量子論理の観点から振り返ってみても，量子論の本質が重ね合わせの原理にあるといった Dirac は彗眼の持ち主であったと言えます．

最後に，Mackey の量子論理からの Hilbert 空間の再構成に関する未解決問題を挙げると，体の絞り込みがあります．通常の Hilbert 空間形式では複素数体上の Hilbert 空間が使われますが，ここで再構成された Hilbert 空間はまだ実数体と 4 元数体の可能性を残しています．この 3 つの体の違いは，ベクトル空間として本質的な差異は与えませんが，その作用素全体の構造に違いをもたらします．大雑把に言って，体の構造が複雑になるほどその上のベクトル空間に働く作用素は多くの対称性を持たなければならなくなるので，通常の Hilbert 空間形式の量子力学は，ちょうど実数体上・4 元数体の Hilbert 空間で記述される量子力学の中間の対称性をもつということになります．例えば，4 元数体で記述される量子力学は時間反転対称性と関係する事が知られています．体は論理 $\mathscr{L}$ から作られるので，体の絞り込み条件は $\mathscr{L}$ の条件で書けるはずですが，現在でも未解決なままです[*26]．

[*26] Birkhoff と von Neumann の量子論理の節で述べましたが，非可換体である 4 元数体を排除する命題

今までのお話を振り返ってみます.

まず，Hilbert 空間形式の量子力学に不満を持った von Neumann によって動機づけられ，Birkhoff と von Neumann によって量子論理が導入されたことをみました．ここで導入された量子論理には，modular 律や有限性など物理的動機に乏しい仮定が設けられていました.

その後 Mackey によって，量子論理は，“物理的に満足のいく公理系”の探求というお題を与えれることによって発展したことを説明しました．では，Hilbert 空間形式の量子力学の再構成を以って，量子論理はこれで役目を終えたのでしょうか.

実は量子論理はその後，例えば量子集合論という分野に発展し，新たな活躍の舞台が与えられていくのですが，紙面を削り過ぎた気がするので今回はここまでにしようと思います.

参考文献

[1] G. Birkhoff and J. von Neumann, The Logic of Quantum Mechanics, Ann. Math., **37**, 4, 823-843, 1936.

[2] M. Rédei, John von Neumann: Selected letters, Amer. Math. Soc., London Math. Soc., 2005.

[3] G. W. Mackey, The Mathematical Foundations of Quantum Mechanics, W. A. Benjamin, Inc., 1963.

[4] I. E. Segal, Postulates for general quantum mechanics, Ann. Math., **48**, 930-948, 1947.

[5] 前田 周一郎, 束論と量子論理, 槙書店, 1980.

[6] V. S. Varadarajan, Geometry of Quantum Theory, Vol. I, van Nostrand, Princeton, N. J., 1968*27.

[7] A. Heyting, Axiomatic Projective Geometry, Interscience Publishers, Inc., New York 1963.

[8] E. G. Beltrametti and G. Cassinelli, The Logic of Quantum Mechanics, Addison-Wesley, 1981.

[9] M. P. Solèr, Characterization of Hilbert spaces with orthomodular spaces, Comm. Algebra, 23, 219-243, 1995.

[10] S. S. Holland, Orthomodularity in infinite dimensions; a theorem of M. Solèr, Bull. Amer. Math. Soc., **32**, 205-234, 1995.

は存在しますが，物理量だとか状態の言葉を用いた，これの同値な命題は知られていません.

*27 現在は，Springer より第二版が出版されていますが，驚くべきことに射影幾何の表現定理に関する叙述が，定理の陳述が正しくないほどまでに削減されています．量子論理の関する叙述は第一版で読むことをお勧めします.

[11] N. Zierler, Axioms for non-relativistic quantum mechanics, Pacific J. Math., **11**, 1151–1169, 1961.

[12] A. M. Gleason, Measures on the closed subspaces of a Hilbert space, J. Math. Mech., **6**, 885-893, 1957.

[13] S. Kochen and E. P. Specker, The problem of hidden variables in quantum mechanics, J. Math. Mech., **17**, 331–348, 1967.

第 3 章

フレーゲ算術について

那須 洋介

「床屋は日常でもっとも死に近い場所である」
——竹下 至

はじめに

本稿のタイトルにある「フレーゲ算術」というのは，簡単に言うと，ある矛盾した算術理論の矛盾しない部分体系である．よく知られているように，ゴットローブ・フレーゲが『算術の基本法則』(1893, 1903) で提示した体系は，矛盾を含むことがバートランド・ラッセルによって指摘されてダメになった．ところが，フレーゲが『算術の基本法則』以前に『算術の基礎』(1884) で非形式的に展開しているプログラムは，無矛盾な形式化が可能であり，ペアノ算術を導くのに十分な強さを持つということが，1980 年代に入ってクリスピン・ライトやジョージ・ブーロスらの研究によって明らかにされた．この,『算術の基礎』の議論を形式化した体系がフレーゲ算術（以下，**FA**）である．これによって，一度は破綻したように見えたフレーゲの数理哲学を救い出そうという「新論理主義」ないし「新フレーゲ主義」という立場が一部の研究者の間で流行った．

本稿では，**FA** の構成，無矛盾性（正確には，二階ペアノ算術に対する相対的無矛盾性），ペアノ算術の導出の議論をひと通り追っていく．しかし，あまりきっちりとした証明はせず，適当に誤摩化す．また，この議論ではブーロス [1] と田畑博敏 [6]，[3]，[7] を大いに参考にした．

ところで,『算術の基礎』の無矛盾性にも関わらず,『算術の基本法則』でフレーゲが矛盾の危険を冒してまでより強い公理系を必要としたのは, いわゆるジュリアス・シーザー問題のためである．フレーゲ算術は，基数の同一性を文脈的に定義するいわゆるヒュームの原理（以下，**HP**）を中心原理とするが，この原理からは「ジュリアス・シーザー ＝ 2」という同一性関係に真理値を与えることができない．この問題のために，フレーゲは数をある種の概念の外延として明示的に定義し，そこから **HP** を導出しようとした．その際に用いられた悪名高き公理 V が矛盾の元凶となったのであった．これに対して，須長一幸 [5] は，構造主義の対象観を用いてシーザー問題を解消し，フレーゲ算術を正当化することを試みている．構造主義によってシーザー問題が解消されることはその通りだと思うが，

「構造主義においては，**FA** は自然数構造を記述する（ペアノ算術と相対的に）無矛盾な理論として位置づけられ，**FA** が中心原理として **HP** を持つことの正当化も与えられる」という須長の結論には賛成できない．その理由を本稿の最後の方で述べるが，ごく簡潔に言うと，**HP** は構造主義的に捉えられた自然数構造以上のものを含んでいるということである．

「はじめに」のさいごに．本同人誌に寄稿するにあたり，何か需要のないことを書いてくれと，たしか田中さんあたりに言われた．**FA** に関する諸々の数学的結果は，フレーゲ研究を新たな地平に導いたことは確かであるが，それが現代的な観点から哲学的，あるいは数学的に重要な示唆を含んでいるのかは私にはよくわからない．田中さんの言葉を借りれば，ただの「公理おもちゃ」だというのが本当のところかもしれない．その意味で，需要のないことへの需要を満たすことができていることを願いたい．

3.1 フレーゲ算術の形式的体系

FA は，通常の二階論理の体系に **HP** に相当する公理を加えた体系であり，ブーロスによって命名された．本節では，ブーロス [1] にしたがって **FA** の形式的体系を導入する．が，その前に，**HP**（「ヒュームの原理」という用語もブーロスによって命名された）がどのような原理かを一度非形式的に見ておく．**HP** とは，

$$\text{概念 } F \text{ の数} = \text{概念 } G \text{ の数} \iff \text{概念 } F \text{ と概念 } G \text{ が等数}$$

というものである．「概念 F と概念 G が等数」というのは，F に属する諸対象と G に属する諸対象の間に一対一対応が成り立つことを言う．これによって，数の間の同一性が定義される．しかし，この原理では「シーザー $= 2$」という同一性に真理値を与えることができない．このシーザー問題のためにフレーゲは，**HP** を基本原理とせず，より基本的な原理から **HP** を導出しようとした．それに対して，**FA** は **HP** に相当するものを基本原理としておくことになる．

FA の基礎となる論理は通常の二階論理である．また，**FA** は次の三種類の変項を持つ．

1. 一階変項（対象変項）：$a, b, c, d, m, n, x, y, z, \cdots$
2. 一座の二階変項（概念変項）：$F, G, H, \cdots$
3. 二座の二階変項（関係変項）：$\phi, \psi, \cdots$

FA の定項はただ一つ「η」のみである．これは「$F\eta x$」のように概念変項と対象変項を引数にとる二座の述語定項である．非形式的に，「概念 F が（ある高階概念の）外延 x に属する」と読むことができる．概念の外延が一階の対象であるというフレーゲの見解が，「η」の二番目の引数が対象変項であることに反映されている．「外延」という語がよくわからない場合は，「クラス」と読み替えても差し支えない．この場合，x は概念たちを要素とするようなクラスであり，「$F\eta x$」は「$F \in x$」のことだと思っておけばよい．

FA の原始式は次のいずれかの形をしている．

$$Fx, \quad x\phi y, \quad F\eta x$$

これらの原始式から，論理結合子と二階までの量化子によって通常の仕方で **FA** の式が構

成される．対象に関する等号は通常の二階の定義（ライプニッツの原理）

$$x = y \;\leftrightarrow\; \forall F(Fx \leftrightarrow Fy)$$

によって導入される．また，概念に関する等号を

$$F = G \leftrightarrow \forall x(Fx \leftrightarrow Gx)$$

で定義する．

FA の論理公理と推論規則は通常の二階論理のものと同じである．特に，概念と関係に関する包括公理

$$\exists F\forall x(Fx \leftrightarrow A(x))\text{（ただし，}A(x)\text{ は }F\text{ を自由に含まない }FA\text{ の式）}$$

$$\exists\phi\forall x\forall y(x\phi y \leftrightarrow B(x,y)))\text{（ただし，}B(x,y)\text{ は}\phi\text{を自由に含まない }FA\text{ の式）}$$

を含む．**FA** の非論理的な公理としては，**HP** に相当するものをおくわけだが，ブーロスは **HP** そのものではなく，それと（後に見る意味で）密接に関連した Numbers という別の公理をおく．

$$\text{Numbers}: \quad \forall F\exists! x\forall G(G\eta x \leftrightarrow F\text{eq}G)$$

ただし，「$\exists! x$」は一意存在を表し，「$\exists! xA(x)$」は

$$\exists x(A(x) \wedge \forall y(A(y) \rightarrow x = y))\text{（ただし，}y\text{ は }A(x)\text{ に現れない）}$$

と書き換えられる．また，「$F\text{eq}G$」は「F と G が等数」を意味し，

$$\exists\phi(\forall y(Fy \rightarrow \exists! z(y\phi z \wedge Gz)) \wedge \forall z(Gz \rightarrow \exists! y(y\phi z \wedge Fy)))$$

と書き換えられる．Numbers は概念から基数を抽象する原理である．これが意味しているのは，任意の概念 F に対し，F の基数であるところの対象が一意に存在するということである．

以上がブーロスによる **FA** の体系である．ブーロスは非論理的な公理として Numbers を選択したのだが，**HP** をそのまま使っても，無矛盾性の証明，二階算術の導出に支障はない（実際，ライト [4] はそのような体系を用いている）．Numbers の代わりに **HP** を公理に入れた体系を **FA'** と呼ぶことにし，**FA** と **FA'** の関係を少し考察する．**FA'** は語彙として「η」の代わりに基数抽象演算子「$\sharp$」を持つ．「$\sharp$」は概念変項を引数にとり，対象変項と同タイプの項をつくる関数記号であり，「$\sharp F$」は「F の数」と読める．これによって **HP** は

$$\forall F\forall G(\sharp F = \sharp G \leftrightarrow F\text{eq}G)$$

と表される．**HP** は，適当な翻訳の下，**FA** で証明できる．実際，**FA** に翻訳規則

$$\sharp F = x \leftrightarrow \forall G(G\eta x \leftrightarrow F\text{eq}G) \tag{3.1}$$

を公理として加えた体系を **FA**+(3.1) とすると，次の二つが成り立つ．

1. **FA**+(3.1) は **FA** の定義による拡張になっている．

2. **HP** は **FA**+(3.1) で証明できる．

1 を示すには **FA** で $\forall F\exists!x\forall G(G\eta x \leftrightarrow F\mathrm{eq}G)$ が成り立つことを示せばよいが，これは Numbers そのものである．次に，2 を示す．まず，$\sharp F = \sharp G$ とすると，(3.1) より $G\eta\sharp G \leftrightarrow F\mathrm{eq}G$（この式を $(*)$ とする）．また，$\sharp G = \sharp G$，$G\mathrm{eq}G$ であるから，(3.1) より $G\eta\sharp G$．これと $(*)$ より，$F\mathrm{eq}G$．逆に，$F\mathrm{eq}G$ とする．すると，$F\mathrm{eq}H \leftrightarrow G\mathrm{eq}H$ であり，ゆえに $\forall H(H\eta x \leftrightarrow F\mathrm{eq}H) \leftrightarrow \forall H(H\eta x \leftrightarrow G\mathrm{eq}H)$．これと (3.1) より $\sharp F = x \leftrightarrow \sharp G = x$．よって $\sharp F = \sharp G$．これで 2 も示された．

この 2 の証明は一見 Numbers を使っていないようだが，(3.1) の定義を正当化するのが Numbers である以上，やはり Numbers は必要である．

以上で **HP** が適当な翻訳の下で **FA** において証明できることがわかった．逆に，Numbers も適当な翻訳の下で **FA'** において証明できる．いま，**FA'** に翻訳規則

$$F\eta x \leftrightarrow \sharp F = x \tag{3.2}$$

を加えた体系を **FA'**+(3.2) とする．これは（関係記号を定義として加えただけであるから）**FA'** の定義による拡張になっている．そして，以下に示すように，**FA'**+(3.2) で Numbers が証明できる．

まず，任意の概念 F に対し，(3.2) より $\exists!xF\eta x$ が言える．この x に対し，(3.2) より $\forall G(G\eta x \leftrightarrow \sharp F = \sharp G)$ であり，これと **HP** より $\forall G(G\eta x \leftrightarrow F\mathrm{eq}G)$．これが示したかったことである．

これで，Numbers が適当な翻訳の下で **FA'** において証明できることもわかった．以上の結果から，直ちに次のことが言える．

定理 1.

$$\textbf{FA}\text{ が無矛盾} \iff \textbf{FA'}\text{ が無矛盾}$$

ここで，以上の結果は **FA** と **FA'** が定義的同値 (definitionally equivalent) であることを意味してはいないということは注意に値する（理論 T の定義による拡張 T' と理論 S の定義よる拡張 S' が同値になるとき，T と S は定義的同値であると言う）．**FA** と **FA'** は (3.1) と (3.2) によって互いに互いを解釈することができる．しかしながら，**FA**+(3.1) と **FA'**+(3.2) は同値ではない．実際，$\forall F\exists!xF\eta x$ は **FA'**+(3.2) で証明できるが **FA**+(3.1) では証明できない．このことをインフォーマルに説明すると次のようになる．「$F\eta x$」の意図された解釈は「F は外延 x に属する」であった．もし x が基数であることが前提されるならば，$F\eta x$ が成り立つのはちょうど F の基数が x であるようなときである．しかし，そもそも x が基数である必要はない．一般的には，$F\eta x$ が成り立つのは，x が高階概念 Φ の外延であり，ΦF が成り立つときである，ということになる．しかしながら外延の一般論に深入りするのは危険である（フレーゲはこうして矛盾に陥った）．そこで，Numbers が保証するのは「x が基数である限りにおいては，任意の概念 F に対して $F\eta x$ となる x が一意に決まりますよ」ということであり，基数以外の他の対象 y については $F\eta y$ が成り立つかどうかには言及されない．そのような y があるかもしれないし，ないかもしれない．対して，「$\sharp$」という演算子は概念からその基数をダイレクトに抽象する仕組みになっているため，翻訳規則 (3.2) は「よい」翻訳になっていない．つまり，「F は外

延 x に属する」を「F の基数は x である」と翻訳している．したがって，「$\forall F \exists ! x F \eta x$」は **FA'**+(3.2) では「任意の概念に対してその基数が一意に定まる」を意味するから真であり，**FA**+(3.1) では「任意の概念に対してそれが属する外延が一意に定まる」を意味するから真かどうかわからない（基数以外にどういう外延があるのかを Numbers は教えてくれない）ということになる．

よって，Numbers と **HP** が完全に同等だと言ってしまうと問題があるが，でもまあ，ほとんど同等である．少なくとも以下の議論に関してはどちらを用いてもまったく同等である．しかし，そのような断りなしに Numbers と **HP** が単に「同等」と書かれている文献があるからややこしい．

3.2　フレーゲ算術の無矛盾性

本節では，**FA** の（したがって **FA'** の）無矛盾性に関する議論を追っていく．ここでもブーロス [1] に従い，まずは **ZF** 集合論との相対的無矛盾性，そして二階算術との相対的無矛盾性という順に示す．**ZF** の無矛盾性は二階算術の無矛盾性を含意するわけだから，後者だけを示せばいいではないかと思われるかもしれないが，後者を理解するための準備として前者が役に立つ．

というわけで，まずは **FA** の **ZF** に対する相対的無矛盾性を示すのだが，**FA** よりも **FA'** について考えた方がわかりやすい．よって **FA'** の **ZF** での（標準意味論における）モデル $\mathscr{M}$ を構成する．$\mathscr{M}$ のドメイン U を $\{0,1,2,\cdots,\aleph_0\}$ とする．標準意味論で考えているで，概念変項のドメインは U の冪集合 $\mathscr{P}(U)$，二座の関係変項のドメインは $U \times U$ の冪集合 $\mathscr{P}(U \times U)$ である．$\sharp$ を解釈するための $\mathscr{M}$ における関数 $f : \mathscr{P}(U) \to U$ を

$$f(S) = S \text{ の濃度}$$

と定義する．U の任意の部分集合の濃度は $\aleph_0$ 以下であり，したがって U の要素であるから，この定義は正当である．変項に対して適当なアイテムを割り当てる付値関数 s について

$$\mathscr{M} \vDash_s \sharp F = \sharp G \iff s(F) \text{ の濃度と } s(G) \text{ の濃度が等しい}$$

$$\mathscr{M} \vDash_s F\mathrm{eq}G \iff s(F) \text{ と } s(G) \text{ に一対一対応がある}$$

（ただし，「$\mathscr{M} \vDash_s \Phi$」は「$s$ によって $\mathscr{M}$ が Φ を充足する」と読む）ということに注意すれば，すべての付値 s について

$$\mathscr{M} \vDash_s \sharp F = \sharp G \leftrightarrow F\mathrm{eq}G$$

であることがわかり，したがって

$$\mathscr{M} \vDash \mathbf{HP}$$

となる．以上より，**FA'** の **ZF** に対する相対的無矛盾性，すなわち

$$\mathbf{ZF} \text{ が無矛盾} \Rightarrow \mathbf{FA'} \text{ が無矛盾}$$

が言える．したがって，定理 1 より

$$\mathbf{ZF} \text{ が無矛盾} \Rightarrow \mathbf{FA} \text{ が無矛盾}$$

である．

つぎに，**FA** が二階算術と相対的に無矛盾であることをみる．実際，もし **FA** において矛盾を証明することができたならば，その証明を二階算術における矛盾の証明に書き換えることができる．やることは，**FA'** のモデルを構成したときと同様の議論を二階算術の内部で扱えるように述べ直すことである．$\aleph_0$ を 0 で，自然数 z を $z+1$ でコーディングすることでそれが可能となる．

二階算術の言語で「z より小さい自然数と集合 F の要素との間に一対一対応が存在する」を記号化した式を $A(z,F)$ で表すことにすると，$A(z,F)$ は「F は z 個の要素からなる」を表現する．$E(F,x)$ を

$$(\neg\exists z A(z,F) \wedge x = 0) \vee (\exists z(A(z,F) \wedge x = z+1))$$

という式とする（つまり，F の濃度が $\aleph_0$ のとき $E(F,0)$ であり，F の濃度が $n(<\aleph_0)$ のとき $E(F,n+1)$ である）．すると，二階算術の定理である

$$\exists ! x E(F,x),$$

$$\exists x(E(F,x) \wedge E(G,x)) \leftrightarrow F\mathrm{eq}G$$

によって Numbers と同じ形式の

$$\forall F \exists ! x \forall G(E(G,x) \leftrightarrow F\mathrm{eq}G)$$

を二階算術の内部で証明できる．

したがって，**FA** における矛盾の証明は直ちに二階算術における矛盾の証明に書き換えることができる．これによって，目的としていた次のことが言える．

定理 2.

二階算術が無矛盾 $\Rightarrow$ **FA** が無矛盾

さらに，この逆も成り立つことを次の節で見る．

3.3　フレーゲの定理

本節では，**FA** においてペアノの公理が導出できることを見ていく．この事実は『算術の基礎』でフレーゲ自身によって実質的に示されているので，ブーロスはこれを「フレーゲの定理」と呼んでいる．

さて，以下でわれわれがやるべきことは，**FA** の言語で「ゼロ」「後者」「自然数」といった項を適当に定義し，それらがペアノの公理を満たすことを見ることである．「ゼロ」を「0」，「m は n の前者である」あるいは「n は m の後者である」を「mPn」，「x は自然数である」を「Nx」で表すことにすると，これらが満たすべきペアノの公理は以下の通りである．

1. $N0$　（0 は自然数）
2. $\forall x(Nx \rightarrow \exists y(Ny \wedge xPy \wedge \forall z(xPz \rightarrow z = y)))$　（後者の一意的存在）

3. $\forall x(Nx \to \neg xP0)$ （ゼロは前者を持たない）
4. $\forall x \forall y \forall z((Nx \land Ny \land Nz \land yPx \land zPx) \to y = z)$ （前者は存在すれば一意的）
5. $\forall F((F0 \land \forall x \forall y(Fx \land xPy \to Fy)) \to \forall x(Nx \to Fx))$ （数学的帰納法）

これらのことを形式的にきっちりやると大変なので，まずはインフォーマルな説明で概略をつかんでから，形式的な議論を（これまでもそうしてきたように）適当に誤摩化しながら行うことにする．

われわれは，自然数 n を次のようなものとして構成したい．すなわち，ちょうど n 個の対象に当てはまる何らかの概念 F について，「F と等数である」という概念の外延として n を定義したい．クラスの言葉で言い換えれば，ちょうど n 個の対象にあてはまる概念からなるクラス，ということになる．したがって，各 n について，ちょうど n 個の対象に当てはまる概念を用意しなければならない．

まず，0 については，「自分自身と同一でない $(\neg x = x)$」という概念が使える．つまり，フレーゲ流の 0 の定義は，「概念『自分自身と同一でない』と等数である」という概念の外延，ということになる．

ここで，フレーゲは概念の外延を一階の対象と見なしていたことを思い出そう．したがって，いま，「自分自身と同一である」という概念を使って，ある一つの一階の対象 0 が構成できたことになる．フレーゲ自身の体系は任意の概念からその外延であるところの対象を構成できるようになっているが，このことから矛盾が引き起こされた．それに対して，**FA** は「概念...... と等数である」という形式の概念からのみ，その外延となる対象が構成できるようになっており，矛盾が避けられている．

次に，1 を構成するために，ちょうど 1 個の対象に当てはまる概念を用意しなくてはならない．ここでフレーゲの天才的な着想が活かされる．われわれはすでに一つの対象 0 を手に入れているのだから，「0 と等しい $(x = 0)$」という概念を構成できる．そして，そこから，「概念『0 と等しい』と等数である」という概念の外延として，1 を構成することができる．以下，順々に自然数を構成していくことができる．すなわち，自然数 n を，「概念『$n - 1$ で終わる自然数列に属する』と等数である」という概念の外延として構成するのである（これは **FA** の言語で書くことができる）．

このようにして無限個の自然数の存在が保証されるわけだが，それが可能なのは，フレーゲの体系が，概念が外延として対象のドメインに「降りてくる」仕掛けになっているからである．こんなことは厳格なタイプの区別を持ったラッセルの体系では許されない．それゆえ，ラッセルは明示的な無限公理をしぶしぶ認めなければならなかった．

これで，なんとなく上手くいきそうだということはわかったと思う．ここからはもう少し形式的に議論する．以下，基本的には 3.1 節で定義した **FA** の言語について議論するが，「$\sharp$」も翻訳規則 (3.1) によって定義されているものとする．

ここで，新しい表記法を導入しておく．まず，概念を表す（ラムダ）項 $[x : A(x)]$ を，次のことを意味するものとして導入する（ただし，$A(x)$ は x を自由に含む式）．

$$[x : A(x)]t \leftrightarrow A(t)$$

$$[x : A(x)]\eta y \leftrightarrow \exists F(F = [x : A(x)] \land F\eta y)$$

このような項の導入は包括公理によって正当化される．また，述語 Z を「基数である」を

表すように定義する．つまり，

$$Zx \leftrightarrow \exists F(\sharp F = x)$$

である．

以上のことを踏まえ，まずは改めてゼロを定義する．フレーゲはゼロをを概念「自分自身と同一でない」が属する数として定義したのであった．これを **FA** の言語で書くと次のようになる．

定義 1 (ゼロの定義)**.**

$$0 = \sharp[x : \neg x = x]$$

次に，後者関係の定義である．mPn（「m は n の前者である」あるいは「n は m の後者である」）は次のように定義される．

定義 2 (前者・後者関係の定義)**.**

$$mPn \leftrightarrow \exists F \exists y(Fy \wedge n = \sharp F \wedge m = \sharp[x : Fx \wedge \neg x = y])$$

これらから，$\neg mP0$ は簡単に証明される．$0 = \sharp F \leftrightarrow \neg\exists yFy$ は **FA** の定理であるから，$\forall F \neg\exists y(Fy \wedge 0 = \sharp F)$ が証明でき，ゆえに $\neg mP0$ である．このことから，（N の定義をまだしていないが，それがなんであれ）ペアノの公理の 3 つ目が示される．

定理 3 (ペアノの公理 3)**.**

$$\forall x(Nx \to \neg xP0)$$

また，定義 2 から，次の補題が簡単に示される．

補題 1.

$$xPy \wedge zPw \to (x = y \leftrightarrow z = w)$$

ここから，（N の定義がなんであれ）4 つ目のペアノの公理がすぐに導かれる．

定理 4 (ペアノの公理 4)**.**

$$\forall x \forall y \forall z((Nx \wedge Ny \wedge Nz \wedge yPx \wedge zPx) \to y = z)$$

「自然数」を定義するに先立って，大小関係「$<$」を定義しておかなくてはならない．これは次のように定義される．

定義 3 (大小関係の定義)**.**

$$m < n \leftrightarrow \forall F\,(\forall x \forall y(((x = m \vee Fx) \wedge xPy) \to Fy) \to Fn)$$

また，「$x \leq y$」で「$x < y \vee x = y$」を表すものとする．この定義は，有限の数に関しては通常の大小関係となる．これを用いて自然数を定義することができる．

定義 4 (自然数の定義)**.**

$$Nx \leftrightarrow 0 \leq x$$

この定義から直ちに一つ目のペアノの公理が成り立つことがわかる．

定理 5 (ペアノの公理 1)**.**

$$N0$$

次に，数学的帰納法の原理を示す．$(F0 \wedge \forall x \forall y(Fx \wedge xPy \to Fy))$ と Nn を仮定する．自然数の定義から，$0 = n \vee 0 < n$ であるが，$0 = n$ なら Fn であることは第一の仮定から明らか．$0 < n$ のときも，第一の仮定と定義 3 から Fn となる．ゆえに数学的帰納法の原理が成立する．

定理 6 (ペアノの公理 5)**.**

$$\forall F((F0 \wedge \forall x \forall y(Fx \wedge xPy \to Fy)) \to \forall x(Nx \to Fx))$$

残るはペアノの公理の二つ目である．すでにインフォーマルに説明した仕方で，任意の自然数に対してその後者を構成できる．つまり，

$$\forall x(Nx \to xP\sharp[y : y \leq x])$$

は **FA** の定理である．これと補題 1 より，二つ目のペアノの公理が導かれる．

定理 7 (ペアノの公理 2)**.**

$$\forall x(Nx \to \exists y(Ny \wedge xPy \wedge \forall z(xPz \to z = y)))$$

以上のようにして，二階の言語で書かれたペアノの公理を **FA** で証明することができる．したがって，定理 2 の逆も成り立つことになる．

定理 8.

FA が無矛盾 $\Rightarrow$ 二階算術が無矛盾

しかしながらやはり，定理 2 と定理 8 は，**FA** と二階算術が定義的同値であることを意味してはいない．**FA** と **FA'** に関してそうであったように，無矛盾性に関して同値であること，あるいは相互解釈可能性は，定義的同値であることを含意しない．

3.4　ジュリアス・シーザー問題と構造主義

最後の節では，いくぶん哲学的な議論を行う．ここでの主題は，「構造主義の哲学はフレーゲ算術に対してどのような含意を持つか」である．このような話題を扱った研究に須長 [5] がある．本節ではこれを批判的に検討する．

本稿のはじめにも少し述べたが，私の見解は次の通りである．

1. 構造主義は，フレーゲが悩まされたジュリアス・シーザー問題を解消する．
2. 構造主義が **HP** を算術理論の基本原理として正当化すると言える根拠はない．

まず，シーザー問題とはどのような問題か．**FA** の中心原理である **HP**（ないし Numbers）は，「○○の数 = △△の数」といった形式の同一性の基準を与える．しかしながら，等号の一方は数を表す名辞で，他方はそうでない名辞の場合，その同一性を判断できない．ゆえに「ジュリアス・シーザー = 2」という言明の真偽を決定できない．

したがって，対象の一意的ドメインを想定していたフレーゲは，**HP** では満足できなかった．そのため，フレーゲは数をある種の高階概念の外延として明示的に定義して **HP** を証明した．しかし，そのために外延の一般論を必要とし，その基本原理である公理 V

$$F \text{ の外延} = G \text{ の外延} \iff \forall x(Fx \leftrightarrow Gx)$$

から矛盾が出てきたのである．

ところで，現在のわれわれが常識的に考えれば，シーザー問題は相当おかしな問題に思える．「2」で指示されるような数学的対象と「ジュリアス・シーザー」のような歴史上の人物を，そもそも同一のドメインで語ることはまずない．したがって，「ジュリアス・シーザー = 2」という言明は，真偽以前に，単に問題にならない．この問いはある種のカテゴリー・ミステイクを犯しており，真偽を決定できるような事柄ではないのである．

数学の哲学における構造主義は，「数が対象なのだとしたら，現にどの対象なのか？」という伝統的なヘンな問いを，上のようなある部分では常識的な仕方で解消する立場である（わざわざ「ある部分では」と言ったのは，現代の構造主義の個々の立場の詳細はたいていヘンだからである）．自然数のような数学的対象は，同一性が本質的に定まった独立の対象ではなく，構造の内部における他の対象との相対的関係においてのみ役を担うものだというのが構造主義の基本的な考えである．したがって，構造内部における同一性言明は意味をなすが，他の構造にまたがった同一性言明は，あらかじめ真理値が決定しているようなものではない．それらを同一視できるなら同一視してもよいが，しなくてもよい，というスタンスである．したがって，構造主義の哲学を前提すれば，シーザー問題は（解決ではなく）解消される．すなわち，シーザーは数論の対象ではないから「シーザー = 2」という言明の真偽は単に問題にならない．当然である．この論点と結論は須長 [5] でも中心的な話題として述べられており，私も大いに賛成するところである．

それはそれでよい，しかし，構造主義の哲学がシーザー問題を解消できるということから，**FA** が中心原理として **HP** を持つことの構造主義による正当化を導けるであろうか．

須長はこのような結論を導いている．曰く，「構造主義は **FA** に意味論的な再解釈を施し，**FA** の中心原理である **HP** を『自然数構造を規定するのに十分なもの』として受け入れることを可能にする」，「構造主義においては，**FA** は自然数構造を記述する（ペアノ算術と相対的に）無矛盾な理論として位置づけられ，**FA** が中心原理として **HP** を持つことの正当化も与えられる」．ただ，須長がこのように述べていることの意味合い，根拠は必ずしもはっきりしない．最終ページの結論部分で，それまで述べてきたこと（シーザー問題の解消）から直ちに導かれることのように書いている感じだ．本稿の残りの部分では，この須長の主張が何を意味するのか，いくつかの可能な解釈を挙げ，いずれの場合も **FA**，**HP** の構造主義的正当化の根拠はないことを示したい．

まず，簡単な注意として，須長の主張が，構造主義によってフレーゲ自身の哲学が救われるというものではないことは明らかである．このことは須長自身が述べている．フレーゲの見解と構造主義の基本スタンスは，普通に考えれば相容れない．フレーゲは，対象の一意的なドメインを想定している．

次に，もっともありそうにない解釈として，次のような主張を考える．

> **FA** と二階ペアノ算術は定義的同値になるから，それらは同じ構造を特徴づける．ゆえに **FA** を用いることとペアノ算術を用いることは構造主義的に言って同じことであり，ペアノ算術が算術理論として広く認められているのだから **FA** だって算術理論として同じように認められるはずだ．

すでに述べたように，**FA** とペアノ算術は自然な解釈において定義的同値にはならない．ゆえにこの主張は誤りである．

では，最初の部分を除いたらどうであろうか．

> **FA** と二階ペアノ算術は同じように自然数構造を特徴づける．ゆえに **FA** を用いることとペアノ算術を用いることは構造主義的に言って同じことであり，ペアノ算術が算術理論として広く認められているのだから **FA** だって算術理論として同じように認められるはずだ．

須長は「構造主義的対象観の下では，自然数とは **FA** という理論により特徴づけられるような構造における〈場所〉なのだ，と答えるだけで十分なのである」と述べている．上の解釈で読むならば，ここでいう「特徴づける」というのは，「公理を満たすような対象変項のドメインとして自然数が規定される」という意味になる．これは，須長も参照しているスチュワート・シャピロが「特徴づける (characterize)」と言うときの用法である．このようにして構造を特徴づけることを「クワインの原理」と呼ぶことにしよう．二階ペアノ算術はクワインの原理によって自然数構造を特徴づけるので，先の主張は「**FA** はクワインの原理によって自然数構造を特徴づける」ということを言っていることになる．これは誤りである．**FA** において自然数ではないものの存在 $(\exists x \neg Nx)$ が証明できる．実際，$\neg N\sharp[x : Nx]$ である．ゆえに **FA** はクワインの原理で自然数構造を特徴づけているわけではない．

では，「ペアノ算術と同じ」という条件を除いたらどうか．シャピロは，理論が構造を特徴づけるための条件として，その理論が categorical であることを挙げている．ゆえに，次のような主張だと解釈するとどうか（この解釈もありそうにないが）．

> **FA** は，ペアノ算術とは異なるが何らかの categorical な構造をクワインの原理によって特徴づける．ゆえに，構造主義的に言って，**FA** も一つの算術理論としてペアノ算術と同等に扱われるべきである．

FA は categorical でないから，この主張も明らかに誤りである．実際，3.2 節で述べた仕方で $\aleph_0 \cup \{\aleph_0\}$ を対象ドメインとする **FA** のモデルを構成できるが，同じ仕方で任意の無限基数 κ に対して $\kappa \cup \{\kappa\}$ を対象ドメインとする **FA** のモデルを構成できる．もちろん κ が異なれば cardinality がことなるわけだから，**FA** は categorical ではない．

シャピロは，群論のような categorical でない理論は，一意的な構造は特徴づけないが，構造のクラスを特徴づけると言っている．したがって，次のような主張はどうか．

> **FA** は categorical ではないが，群論のように構造のクラスをクワインの原理によって特徴づけているのだ．よって，**FA** は数学理論として群論と同等に扱われるべきだ．

まあ，この主張なら認めてよい．しかし，これでもって「**FA** が自然数構造を特徴づける」とは言いたくない．さらに，須長は「数の対象性もそこで規定された自然数構造において確保されることになる」と言っているが，categorical でなければこれは言えないはずである．実際，須長は対象性を次のように定式化している．

> ある理論 T における単称名辞「a」が指示対象を持っていると言えるのは，その理論 T における任意の単称名辞「b」に対して，文「a=b」の真理値を一意に定めるための基準が存在するとき，かつその時に限る．

ひょっとしたら，**FA** は（自然数ではなく）概念の基数の構造をある意味で特徴づけると言えるかもしれないが，それにしても **FA** は基数の同一性も完全に確定せず，この対象性の基準を満たさない．実際，$\sharp[x : x = x] = \sharp[x : Nx]$ は真理値が決まらない（真にするモデルも偽にするモデルもある）．次のように反論されるかもしれない．「この例のように，無限の基数は対象性の基準を満たさない．だから，対象性の基準を満たすものとして，有限の基数，つまり自然数を特徴づけられるのではないか」．これも誤りである．有限の基数も須長の対象性を満たさない．実際，$0 = \sharp[x : \neg Nx \wedge \neg x = \sharp[y : Ny]]$ の真偽は定まらない．したがって，須長の言う「正当化」の中に「自然数の対象性の保証」が含まれるなら，この解釈でも目的は達せられない．

最後に，**FA** がクワインの原理によるのでない仕方で自然数構造を特徴づけるという可能性を考えよう．そのような読みとして次のようなものが考えられよう．

> **FA** はクワインの原理によって自然数構造を特徴づけるわけではないが，ペアノ算術を解釈するための構造主義のメタ理論として **FA** を正当化できる．

確かに，集合論で算術を解釈できるのと同様，**FA** も算術を解釈できる．しかし，この場合，集合論が算術を解釈できるからといって算術理論ではないのと同様，**FA** も算術理論ではない．このことを認めた上で，**FA** を算術理論としてではなく構造主義のメタ理論と捉え，それが自然数構造をモデル化できるという事実でもって **FA**，**HP** を正当化できると主張したとしても，その主張には問題がある．そのような主張を無反省に行うのは，シャピロの議論を無視することである．シャピロは，構造主義のメタ理論として，集合論

の代用となるような「構造論 (structure theory)」という公理系を提案している．そして，構造論が持つ中心的な原理（整合性 (coherence) の公理）を正当化できるかどうかを考察している．その結果，まともな正当化は諦め，半ば強引な IBE（最善の説明への推論）に訴えている．自然数のような，必要な構造を構成できるということだけで構造主義のメタ理論を簡単に正当化できないことは，シャピロの苦労を見ても明らかである．

以上の考察から，構造主義が **HP** を算術理論の基本原理として正当化すると言える根拠はないと結論づけざるを得ない．

参考文献

[1] Boolos, G. (1987) ”The consistency of Frege’s foundations of arithmetic”, in J. J. Thomson (ed.), *On being and saying: essays in honor of Richard Cartwright*, MIT Press, pp. 3-20; 井上直昭（訳）(2007)「フレーゲ『算術の基礎』の無矛盾性」，岡本賢吾・金子洋之（編）『フレーゲ哲学の最新像』，勁草書房，pp. 79-112.

[2] Shapiro, S. (1997), *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*, Oxford University Press.

[3] Tabata, H. (2000) ”Frege’s theorem and his logicism”, *History and Philosophy of Logic* **21**, pp. 265-295.

[4] Wright, C. (1983) *Frege’s Conception of Numbers as Objects*, Aberdeen University Press.

[5] 須長 一幸 (2000)「フレーゲ算術と構造主義」，『科学基礎論研究』第 28 巻 第 1 号，pp. 9-14.

[6] 田畑 博敏 (1999)「フレーゲの定理について」，鳥取大学教育地域科学部紀要『地域研究』第 1 巻 第 1 号，pp. 69-79.

[7] 田畑 博敏 (2002)『フレーゲの論理哲学』，九州大学出版会.

第 4 章

自由数学小説 F(自然数論):さみしい自然数 ただしこの F とは, 忘却関手 U : 小説 $\to$ 散文 の随伴である.

淡中 圏

むかしむかしあるところに, もうすこし具体的には, 自然数系列 $\mathbb{N}$ のはずれにさみしいさみしい自然数がいました.

仮に n としておきましょう.

n は一人ぼっちでした.

というのも仲間がいなかったからです. 近所の自然数たちとはあまり仲がよくありませんでした. 当たり前ですが両隣とは同じ素因子を持っているわけもなく, しかも奇数だったので, 二軒となりとも素因子ではありません. 若い頃はもしかしたら自分はとても大きな素数で, 将来暗号に乱数にと引っ張りだこになるのではという想像で胸を膨らませたこともあるものの, あるとき, 二軒前と二軒後の二数が自分は素数だと主張していることから, もし彼らの言うことが本当なら, 自分は少なくとも 3 の倍数になることに気づいてしまいました.

数は嘘をつかない, という言葉もあるので, おそらく本当なのでしょう. 彼らは, n のせいで双子素数となる栄誉を逃したと, n を憎んでいる節がありましたが, どうせならお互いに憎み合ってくれればいいのに, と n は思わないでもありません.

ある日 n は遠い場所にいる, 自分の素因子に手紙を出してみようと思いました. 3 は自分よりもずっと忙しいことを考えると, 悪いような気がしてしまいましたが, 勇気を出して, 長い長い手紙をしたためました.

そしてそれを, 自分の前の数に託すと, きっといつか誰かが自分を見つけてくれる, ある性質を持つ唯一の数として, 自分を見つけてくれると期待を新たにして, カレンダーに s を付け続けていたのです.

しかし, 返事は一向に届きませんでした.

いったいどれだけの数学的帰納法が目の前を通り過ぎて行ったでしょうか. そのたびに, 自分のところで, もしくは自分の一つ手前で止まってくれたら, と少し不謹慎なことを考

えてしまうのです.

しかしいつも, 数学的帰納法は, 無限の彼方に向けて, 過ぎ去ってしまうのでした.

最初は, ただ単に時間がかかっているだけだと思っていました. 手紙が届くのにも長い時間が掛かるだろうし, 往復には更に二倍の時間がかかります. ただそれだけの話だ, と自分に言い聞かせていました.

しかしあるとき, n の中にとうとうある疑惑が湧き起こりました.

自分は普通じゃないのではないか.

自分は standard じゃないのではないか.

周囲の数たちは, 素朴に自分たちを standard な自然数だと信じているが, そんなものは井の中の蛙の浅知恵に過ぎず, あの帰納法たちも一階論理で書ける程度の性質の, 木霊みたいなものなのではなかろうか, と思えてきたのです.

二階論理まで知っていれば, 解決したかもしれませんが, 人口に膾炙した諺にもあるように, 二階論理は羊の皮を被った集合論であり, n はあまり集合論が得意ではありませんでした.

自分が non-standard かも知れないと思うと, 時にはそれが救いに思えてきて, もしかしたら自分は自然数論が矛盾していることの一つの青い証明ではなかろうかと考えたりもしましたが, 結局永遠に誰にも見つけてもらえないことには変わりありません. 自分の standard な素因子に手紙を出しても, 返事が届くどころか, 手紙が届くこともないのです.

こんなことを考えていたら病気になってしまいます. いっそ病気になってしまえば, 病的な数として論文になっていたかもしれません.

でも病的な現象というものは, standard なものにしか起きないのが, 世の習わし. 矛盾に聞こえるかもしれませんが, standard でないものというものは, 逆に一般的なものだったりするものです. そういえば, 自分はなんの特徴もない. これは自分がジェネリックな数だからじゃないか, と n は思います. たかだか有限個の数しか満たさない性質は自分には高嶺の花なのだ, と. あってもなくても誰も気づかない数. それが自分なんだ, そう n は思いつめて, とうとう旅に出ることに決めました.

こうして勝手に n がいなくなってから何日かが後続しました.

困ったのは残された自然数たちです.

彼らにとって n が standard かどうかなんて関係ありませんでした. standard だろうが, non-standard であろうが, 勝手に要素が一つなくなってしまったら, ペアノ公理が成り立たなくなってしまいます.

彼らは $\mathbb{N}$ を総動員して, $\mathbb{N}$ 中を探し回りましたが, どこにも見つかりません. 一応 $\mathbb{Z}$ も探しましたが, 誰にも見つからずに $\mathbb{Z}$ に逃げるなんてとても無理, $\mathbb{Q}$ に逃げるためには, 1 の力を借りないとしたら, 最低でも 2 人の $n = \dfrac{a}{b}$ なる二人の協力者がいなくてはいけません. $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}_p$？　ますます無理です.

一体 n はどこに消えてしまったのでしょう？

n は他の $\mathbb{N}$ が思いもよらない場所にいました.

n は旅に出るにあたって, こんな前にも後にも, 同じような景色がのっぺりと広がっているばかりの場所は嫌だと考えました.

n はどうせなら今まで, 存在することを想像することすら難しかった場所へ行ってみたいと思いました.

そこで n は禁じられていた技術を使って, 自分を米田 embedding したのです. 天地がひっくり返り, すべての秩序が裏返しになったような一瞬の眩暈ののち, n は自分がずっと広い世界にいることに気づきました. n は気づいたのです. 自分とは結局, 自分も含めた全ての自然数との関係の総和に過ぎないのです. だったら, もっといろいろな関係があり得るはずです. 自然数の余極限としか書けないような関係が.

単なる関係になってしまえば, もう距離なんて関係ありません. 全ての瞬間に, $0, 1, 2, 3 \cdots \infty$ と好きに関係することができるのですから. n は自由を謳歌していました.

そして $\mathbb{N}$ たちはまさか n が自分たちの間の関係になっているとは考えもしませんでした.

得てして, 自分たちと同種の物には注目しても, 自分たちの間の関係に視点をフォーカスするのは難しいものなのです.

このまま $\mathbb{N}$ は崩壊してしまうのでしょうか. タイムリミットは近づいています.

n が不在のうちに帰納法の一つが n にたどり着いてしまったら, 全ておしまいになってしまうのです.

もう時間がない, そう全ての $\mathbb{N}$ が思った時, 思わぬ所から救いの手が差し伸べられました.

それは, なんと超現実（シュルレアル）の世界からやってきた数だったのです. それは, 存在自体が一種の遊戯である数たちで, 無限に小さい数と無限に大きい数を含み, それどころか全ての超限順序数を含み, 当然の結果としてセットではなく真に classy な, 全ての部分順序体の任意の順序体拡大に対して, ユニークな埋め込みを持つ, すなわち全ての non-standard な自然数を含んでいる, 巨大な体なのでした.

$\mathbb{N}$ 達が万策尽きたなか, 違法素数の一つが, 禁止された術である, 自動筆記（エクリチュール・オートマチック）や生命磁気（メスメリスム）を使って, 何とか情報を得ようとしているなか, 結局こんなものは下らない遊戯に過ぎない, それどころか自分たちの存在も, 結局は遊戯に過ぎないのではないか？　という悟りを得た結果, 超現実の世界との交信に成功したのです.

そして自身遊戯である超現実数たちは, 自由を手に入れて, 羽化登仙の境に遊んでいた n を目撃していたのです.

$\mathbb{N}$ 達は, 超現実数を介して, n に戻ってきてくれるように頼みました. n は最初は渋りました. しかし, 自分がいないとペアノの公理が崩れてしまうという話に, 自分も必要とされているんだと思えて, 帰ることを決心しました.

帰る道すがら, 無限の世界を冒険していたはずなのに, それが有限遊戯として表現されていることに不思議さと肩透かしにあったような感じを受けて, n は超現実数に対して, 本当に君たちは, そして自分たちも実は, ある種の遊戯に過ぎないのか質問しました.

それに超現実数は答えます.

「我々はみな, 二人で交互にやるゲームで, 無限に続く手筋を持たないものの, 同値類なんだ. 石取りゲームやオセロなんかもみんな, その仲間だ. この手のゲームの性質には, 帰納法が使える. それを使えば, 必ず先手必勝か後手必勝であることなんかが証明できる.

さて, それじゃこういうゲームはどうだろう. このゲームはまず先手が, 二人で交互にやる, 無限に続く手筋のないゲームを一つ選ぶ. そして後手がそのゲームを先手として遊ぶんだ. このゲームは無限に続く手筋を持つだろうか？

もし, このゲームが無限に続く手筋を持たないとしたら, 先手がこのゲーム自身を選び,

後手もこのゲームを選び……と無限に続けることができ, 矛盾だ. でも, もしこのゲームが無限の手筋を持っているとしたら, その手筋で一手目で選んだ, 有限で必ず終わるはずのゲームもまた, 無限の手筋を持つことになってしまう. これも矛盾だ.

結局, このゲームは有限で終わるのだろうか？

n は $\mathbb{N}$ に帰るまでこの問題について考えていて, そこでようやく自分がはぐらかされたことに気づきました. でも, それほど怒りは沸き起こりませんでした.

一度得た自由は失いましたが, それでも一度より高いところに昇って, 自分の周りにもっと広い世界が広がっていることに気づくのは, とても良い経験でした. 今では, 自分が standard かどうかなんて, どうでもいいことに思えます. non-standard な数の上に, さらに non-standard な数が積み重なり, どこまでもこのユニヴァースは積み重なっていきます. そしてそれらは結局遊戯に過ぎず, 自由にはいつだって忘却が随伴しているのです.

あなたも, 道筋に困ったら, 自分を米田 embedding してみたら如何でしょうか. 思わぬ, 道が現れるかもしれません.

参考文献

[1] H.-D. エビングハウス et al.(1991)『数』成木勇夫訳、シュプリンガー・フェアラーク東京.

[2] R. スマリヤン (2013)『哲学ファンタジー』高橋昌一郎訳、ちくま学芸文庫

あとがき

才川 隆文

複数人で本作りを行う時に、ソフトウェア開発と同様の各種ツールを用いると楽になるという話を、オーム社さんが宣伝・実践 [1][2] されています。今回はそれを真似てみようと、VPS を使った環境を少し準備して本誌の制作にあたりました。

オーム社さんの例では、

原稿 LaTeX
原稿の管理 Subversion
issue tracking Trac
commit **後の自動コンパイル** Jenkins
各種ログと連絡 メーリングリスト

といったツールを用いているようです。これをそのまま真似しようと当初は考えていたのですが、私が各種ツールの仕組みに不慣れであったため、結局、

原稿 LaTeX
原稿の管理 git
issue tracking なし（！？）
commit **後の自動コンパイル** git の hooks
各種ログと連絡 メーリングリスト (google groups)

ということになりました。唯一新しめのツールを使ったのは git ですが、これは制作メンバーで相談した時に、「時代は git だよね〜」とか「慣れるのに丁度良い」とか言いながら、特に深い技術的な考察を加えることなく決めたものです。結局のところ git で不便はしませんでしたが、リビジョン番号が判りやすい Subversion にも利点はあったような気がします。issue tracking が無かったのは終盤、まとめの段階に至って作業量の増加をもたらしました。やはり、残りの作業が何であるのか、優先順位はどのようであるのか、これらはメールの流れでは管理しにくいもので、十人に満たない人数での今回の作業においても、十分 issue tracking が必要な複雑さがあると感じました。自動コンパイルは `.git/hooks` に置いたスクリプトでなんとかなっていましたが、今回より少しでも規模を大きくするならば、排他制御や資源管理の必要性から、Jenkins などの導入が必要そうです。メーリングリストとの連携については、特に git のログをどう流すかについて少し悩みましたが、git の contribution に入っている multimail スクリプトを使うことで解決しました。このスクリプトには外部 SMTP サーバを利用するためのコードが含まれており、ファイル git_multimail.py 中の class SMTPMailer がそれなのですが、SMTP over

SSL や SMTP Authentication に、そのままでは対応していません。幸いにも、python の smtplib にはこれらに対応するための API がありましたので、少し git_multimail.py に書き足すことで事無きを得ました。

このようにまだまだ未熟な仕組みであり、改良をしてみたいという考えもあり、またせっかく作った仕組みなのでまだ使いまわしたいという欲求もあります。次の機会にも同人誌を作成し、読者の皆様にお会いできることを期待しています。

参考文献

[1] `http://oku.edu.mie-u.ac.jp/texconf11/presentations/morita-LT.pdf`

[2] `http://oku.edu.mie-u.ac.jp/texconf11/presentations/morita-poster.pdf`

倉永 崇　何にしても上手くなりたいのはやまやまなのだけれど、やはり有限のリソースでは足りないようだ。今は有限のリソースを有限時間内に無限回まわせないか模索中である。

淡中 圏　本名：田中健策　前回「次回はちゃんとした数学の文章を」と書いて、実際「層化」の様々な定式化について書いてたんですけど、間に合わず。結局やっつけ仕事の妙な童話のみになりました。次回こそ、次回こそ……次回があればだが。

でもこれを書くのにコンウェイの Surreal Number やコンウェイゲームの定義を見ていたら、スマリヤンが書いてた「ハイパーゲームのパラドクス」が、真のクラスを集合として考えようとするパラドクスの一種であることが分かって少しためになりましたとさ。

よく分からないブログ　`http://blog.livedoor.jp/kensaku_gokuraku/`

才川 隆文　前回は原稿をまとめる人でしたが、今回はその仕事を git さんに任せてしまったので、git さんを眺めているだけの人でした。みなさま良いお年を。

宮崎 達也　名古屋大学情報科学研究科修士 2 年目苦節 6 年目

膝に forcing を受けて以来常時集合論で死んでいる無能です。

那須 洋介　中二病罹患 → 文学部哲学科に入る → 過去の哲学者を研究するという風土が歴史アレルギーの肌に合わず → 情報科学研究科に入院 → 数学の人たちに看病してもらっている（今ココ）

古賀 実　量子論の基礎をやっていると物理学科に居場所がないので情報科学研究科に移ってきました．次回があれば量子集合論や圏論的量子力学について書きたいですね．

発行者 ： The dark side of Forcing

連絡先 ： http://proofcafe.org/forcing/

発行日 ： 2013 年 12 月 28 日