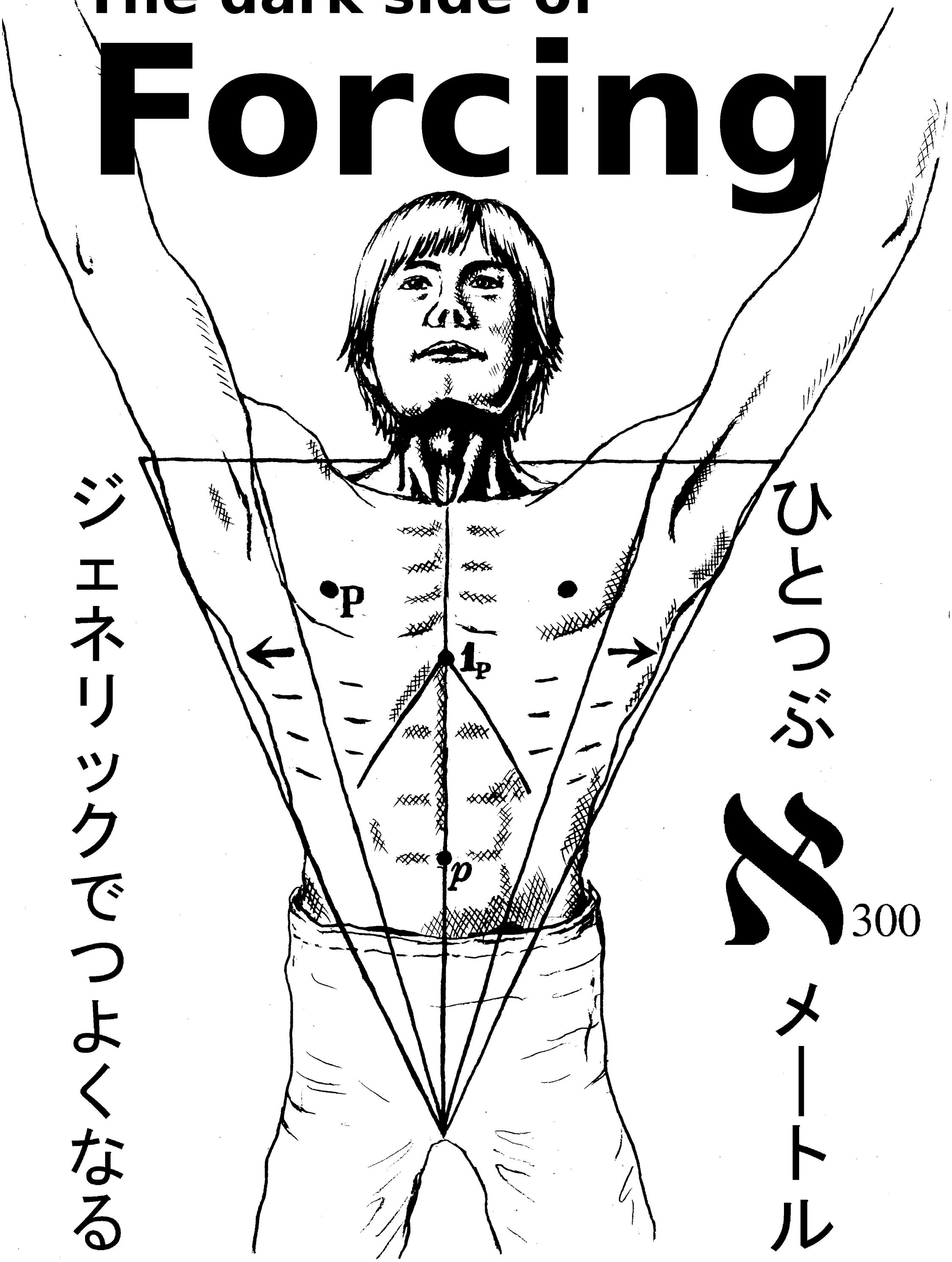
The dark side of
Forcing



ジェネリックでつよくなる

ひとつぶ $\aleph_{300}$ メートル

目次

多元的思い出話

淡中 圏

あれは Gainax の『Panty & Stocking with Garterbelt』が放送していた年だったから，２０１０年の「数学基礎論若手の会」である．私は今もあの頃も，人生の目標も研究の方針も定かではない男だったので，まあ軽い気分でその会に出席したのだが，その年は名古屋大学の多元数理科学研究科から参加していたのは私だけだった．そして，名古屋大学情報科学研究科からは３人ほど出席していたと思う．その一人が，まだ学部生だった宮崎さんだった．

情報科学研究科は当時から日本における集合論のメッカであり，数理論理学の盛んな場所だった．しかし，名大の理学部数理学科の人間が進学する多元数理科学研究科とは，ほとんど交流がない有様だった．実は，情報科学研究科の数学は，かつて存在していた教養部の中の数学教室からの流れで，その頃から田中尚夫氏などがいて，数理論理学に強かったのだ．しかし，その頃から，理学部の数学とは，そりが合わなかったらしく，そういう歴史的理由で今も，名大内部の二つの数学教室は交流が希薄である．いや，もちろん皆無ではない．安本雅洋氏は一応多元のウェブページにも一時期協力教員として名前が載っていたし，多元の雑誌などに吉信康夫氏が何故か計算可能性について書いていたのも見たことがある．教員同士の個人的な関わり合いも結構あるようだ．

それなのにである．そもそも院の入試説明会を合同でやっていたりしているにも関わらずである．やはり交流はないといって過言ではない状況だ．

だいたい生徒同士で知り合いがほとんどいなかったのだ．

そういえば，一回だけ情報科学研究科の授業を，多元数理科学研究科の生徒が受講できる，という実験的試みが行われたことがあった．しかし，それがよりにもよって数値計算である．それなら，多元でもやっているんだよなあ．自然，次の年にはなくなっていた．

そもそも多元の生徒は情科で何が行われているか知らない．あそこが集合論が盛んな場所だというのも知らないだろう．情科では，多元での講演スケジュールなどが掲示板に貼られているのを見たことがあるが，多元で情科のイベントに関する告知が行われたことは聞いたことがない．２０１０年に，数学基礎論サマースクールが行われていたことも知らなかった人が多いのではなかろうか．

と言うわけで，私と宮崎さんは，非常に得がたき縁を手に入れたことになったので，できることなら切らずに付き合いを続けていこうと思った．

とは言っても，時々顔を合わせて，今何をやっているのかを，適当に話すくらいだったが．

一方その頃多元には，OCaml の開発者の J.　Garrigue 氏がいた．いつから名古屋が「関数型プログラミング言語の聖地」 と呼ばれはじめたのか知らないが，代数幾何ではな

い scheme の使い手がいる数理学科というのも乙なものではある．私も C の入門講義のあと，ocaml の入門講義を受けて，簡単な turtle graphics の GUI を作った覚えがある．リストやツリーなどの，データ構造に最初に触ったのが，関数型や論理型のプログラミングだったせいで，最初に Java でリストを実装しろと言われたとき，面倒で仕方がなかった．

そういう環境なので，自然関数型プログラミングや型理論などに興味を持つ人間も寄ってくる．そんな中で，自然に才川さんとも話すようになった．不思議といつどういう風に話し始めたかは覚えていない．いつの間にか，よく話すようになっていた，という印象だ．私は，人の顔や名前を覚えるのが苦手だが，彼は顔も姿形も服装も話し方も話す内容も名前も特徴的なので，大変ありがたい．ずっと以前に才川さんの名前で，ググって見たら，彼が１５才のときに，Smalltalk のコミュニティに入会を申し込む文章が出てきて笑ってしまったことがある．今では，訳本も出して，ググっても最初の方のページには出てこなくなってしまった．まったくめでたい話だ．

多元はかつて，「Department of Polymathematics」という奇抜な英語名を名乗っていた頃，本当に「多元的」な研究家を目指して，有象無象の人間をたくさんおびき寄せて，なかなか大変なことになっていたという．心の病を発症してしまった人もいると聞く．それ以外にも，ここですら書けないような面白い話をたくさん聞いたことがあるが，それはまあよい．その後，多元もまともな数学者をちゃんとそろえるようになり（知り合いの熊沢峰夫氏にかかると，たこつぼ派が脱たこつぼ派を追い出した，という話になってしまうが……）かつてほど，多元的でもなくなった．そんな多元で，異彩を放って「多元的」だったのが，倉永さんで，最初に意識したのは，年度末の成果報告のときに，脳とか認知とか，そういう話をしていたのを見たときだった．教授陣も，正直どう評価していいのやら，という感じが凄く面白かった．その後，話すようになってみると，物静かなのにメタルのドラマーだし，絵も描くし，とでやはり多元的なお人であった．私も，認知科学には興味を持っていたし，おおざっぱな理解のための道具としては，圏論的手法というのは訳に立つはずだ，と思っていたので，その手の話をよくするようになって，彼は結構一生懸命聞いてくれて，とてもありがたかった．

さて，名大内には，実は他にも数学と関係の深い研究をしているところがある．

集合論などを研究しているのは，情報科学研究科の三階だが，二階には科学哲学の戸田山研究室がある．戸田山氏は，タブローの手法を解説した本を訳しているし，自らもとても良い形式論理学の本を書いている．先ほど，多元と情科に交流がないことを嘆いたが，なんと同じ情科の二階と三階の間にすら，ほとんど交流がないのだ．多元は，多元的になるために建物の設計から交流が盛んになるようにされているため，一度数学内外の混血は諦めた後でも，数学内部ではあるが，割とジャンル違いの学生でも雑談する環境ができている．メーリングリストなども一本化されているため，自分とあまり関係ないイベントの通知なども来て，興味があったら出てみたりできるのだ．しかし，情科では，研究室単位でメーリングリストが分割されているために，同じ研究科でも，階が違うと何をやっているのか分からなくなってしまう．

そのせいで，元カリスマブロガー疑惑のある古関さんもかなり科学哲学系に興味があるのに，私が教えるまでいつどんなイベントがあるか把握していなかったという状況だ．一度多元を通るなんて地理的に見ればどんな無駄なことをしているのかとも思うが，インターネットにおける通信接続ではありがちなこととも言えよう．

確かに戸田山氏は，最近は論理学や数学の哲学からは離れ，地球惑星科学の熊澤峰夫名

誉教授（通称熊さん）と地球科学と科学哲学の関係などを中心にしているが，それでも圏論勉強会などを独自に開いたりしているのだから，非常にもったいない話である．私が戸田山研と繋がれたのは，足立さんのおかげで，彼が戸田山研に顔を出していたので，私もふらふらと「Science of Philosophy of Science」の結成合宿に付いて行ったところ，熊さんと気があってしまい，「彼に数学教えてやってよ」と数学の哲学を研究していた那須さんを押しつけられたのだ．二人の勉強会は今も続き，代数や位相の初歩から，ゲーデルの不完全性定理や圏論の初歩をやったりして，那須さんはいつか数学の哲学に圏論を導入するつもりだという（数学の哲学では圏論の導入が遅れているそうな）．

そんな折りに，宮崎さんから勉強会をしようという，お誘いを受けたので，一も二もなくみんな呼ぼう，と思って声を掛けまくり，そんなこんなで，私が多元と，情科の集合論と数学の哲学の，三つを取り持つ位置になってしまったのだ．

しかし，まだまだ繋がれていない部分が多い．ＩＢ館の工学部でも数学と関係の深い計算機科学をやっている人たちもいる．情科で科学哲学をやっている人たちと，文学部で哲学をやっている人たちも分断されているようだ（知り合いが同じキャンパス内で講演をしているのに，学部が違うとメールが届かないので気がつかなかった，という笑い話もある）．まだまだ，本当の学際研究が産まれるには，縦割りが過ぎる．そんな中，島津康男氏の言うような一人学際を気取ってみても，実力がなさ過ぎてまともな科学者になることすら失敗したような有様だが，才川さんが，この勉強会の成果をコミケに出すという，不思議なアイディアを出して，それが実現した今，まあ意味があった気がしないでもない，という感想である（才川さんはアグレッシブな人なので，私なんぞいなくても，どんどん情科に切り込んで人間関係を構築したかも知れないが）．

とりあえず，これが第一歩である．第二歩があればいいなあ．実は今回書きたくて書けなかったネタがあるので，第二歩がないと少し困るので，出しましょうよ，才川さん！人生は動歩行．前のめりに倒れながら，足を出していくのである．

第 1 章

対話・強制法入門一歩前 —ZFC の可算モデルと絶対性—

古関 恵太

はじめに

1963 年, Paul Cohen は連続体仮説および選択公理が, 集合論の標準的な公理系 ZFC(Zermelo-Fraenkel の体系に選択公理を加えたもの) から証明不可能であることを示しました. それを示すのに Cohen が用いたのが, ZFC のモデルを拡大することによって別のモデルを作り出す技術である強制法（Forcing）です. Cohen の画期的な仕事以来, 強制法によって多くの命題が ZFC から独立（証明も反証も不可能）であることが明らかにされ, 強制法は集合論における基本的な手法となっていきました. 現在の集合論の研究で強制法が（直接もしくは間接的に）関わらないものはほとんどないと言っていいでしょう.

本稿は, 集合論に興味を持っている方に強制法の「雰囲気」を知ってもらうための会話劇です. 強制法のそもそものモチベーションや, メタ数学的な難しさのある部分, 特に ZFC の可算モデルとはどのようなものかということの解説に焦点を当てることにしました. ZFC の可算モデルは “Skolem のパラドックス” にも関わってきますが, 最初はかなり直観に反する印象を受ける対象で, 強制法理解の躓きの石の 1 つでしょう. そこで生じる混乱を解きほぐすのが “絶対性” という概念であり, 本稿で解説していきます. 強制法を理解したいと思っている読者がハードルを 1 つ越えるための一助となれば幸いです.

集合論の初歩 (順序数, 基数など) および一階述語論理の基本 (論理記号の扱い方, モデルの概念など. できれば Löwenheim-Skolem の定理も) を予備知識として仮定します. それらの予備知識に関しては多くの教科書に載っていますが, ここでは強制法への導入を意図した書き方がされている渕野 [2] をおすすめしておきます.

本稿は基本的にはこれから教科書で本格的に強制法を勉強したいと思っている方を読者として想定しています. 今後より充実した内容の解説を書ければと考えていますが, 今回はあくまで強制法理解に必要な概念のごく一部を解説したに過ぎないことはご了承ください. 強制法のフォーマルな解説に関してはキューネン [5], 渕野 [3], 新井 [1] など日本語で読める文献が充実してきていますのでぜひチャレンジしてみてください.

なお, 強制法の比較的直観的な解説としては木原 [4], 薄葉 [6] などがネット上にありますのでそちらも合わせてどうぞ.

キャラクター

- K : 公理的集合論を専攻している大学院生. 強制法を学んだはいいが, 一体これから何を強制すべきか途方に暮れている.
- Y : 数学科の学部生. ロジック全般に興味を持っているが, ロジックの講義が数学科にないので仕方なく自分で勉強している. K に強制法の概要を教えてほしいと頼む.

1.1 そもそも独立性証明ってどうやるの？

Y「というわけで強制法について教えてください, お願いします. 連続体仮説[*1] の独立性を示すのに使うということは知っているんですが, 自分だけでキューネンあたりを読むとなるとなかなか道のりが長そうなので, ぜひ概要を教えていただければと」
K「んーと, 強制法というのは一言で言えば, ZFC のモデルにジェネリックを付け加えてそのモデルを拡大する方法だよ」
Y「はい, 何言ってるのかさっぱりです」
K「まあそうだよね. さて, まずそもそも強制法という手法を使って何をやりたいのかは知ってる？」
Y「連続体仮説が ZFC から独立だということ, つまり証明も反証もできないことを Cohen が強制法を使って示したんですよね」
K「そうそう. 補足すると, ZFC から連続体仮説が反証できないことは Gödel が既に 1940 年に "内部モデル" というものを用いる手法によって示していたので, Cohen は残りの半分, ZFC から連続体仮説を証明できないことを強制法によって示したわけだよ. まあ連続体仮説が反証できないことの方も強制法を使って証明できるけどね.
　さて, ちょっと質問だけど, そもそもある命題 φ が ZFC から証明できないとして, それをどうやったら示せると思う？」
Y「えーと……」
K「ZFC に φ の否定 $\neg\varphi$ を加えた公理系, ZFC $+ \neg\varphi$ が無矛盾であることを示せばいいんだよ. まずこれはわかる？」
Y「うーんと, 多分わかります.
　ZFC $\vdash \varphi$[*2] と仮定しますね. そうすると, ZFC $+ \neg\varphi$ は ZFC より強い公理系なので, もちろん ZFC $+ \neg\varphi \vdash \varphi$ です.
　一方, $\neg\varphi$ は ZFC $+ \neg\varphi$ の公理の 1 つなので, ZFC $+ \neg\varphi \vdash \neg\varphi$ です. となると, 公理系 ZFC $+ \neg\varphi$ は φ の肯定と否定の両方を証明できることになるので, 矛盾していることになります.
　ここまでの議論をまとめると, "ZFC $\vdash \varphi$ ならば公理系 ZFC $+ \neg\varphi$ は矛盾している" で

[*1] 自然数全体の濃度と実数全体の濃度の間に中間濃度が存在しないという命題. 基数算術の式で書くと $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.
[*2] ある公理系 T からある命題 φ が証明できるとき, $T \vdash \varphi$, 証明できないとき $T \nvdash \varphi$ と書く.

すね．これは対偶を取れば，“公理系 ZFC $+ \neg\varphi$ が無矛盾ならば ZFC $\nvdash \varphi$” となる．よって ZFC $+ \neg\varphi$ が無矛盾であることを示せば，ZFC から φ が証明できないことが言えたことになります」

K「うん，そうだね．ここで φ を連続体仮説 CH(Continuum Hypothesis) だと思えば，ZFC から CH を証明できないことを示すには，ZFC $+ \neg$CH が無矛盾であることを示せばいいわけだ」

Y「なるほど．問題がそういう風に言い換えられることはわかりました．でもそれをどうやって示せばいいんですか？」

K「ある理論[*3]が無矛盾であることを示すには，その理論のモデルを作ればいい．モデルが 1 つでも存在する理論は無矛盾だ．たとえば群論 (の公理系) が無矛盾かどうか気にしたことはある？」

Y「いえ．だって群って具体的に色々ありますから」

K「そゆこと．群ってのは群論のモデルのことだからね．インフォーマルには，群の存在が群論の無矛盾性を保証していると言える[*4]．

なぜモデルが存在すれば無矛盾かというと．モデルというものの定義上，任意の文[*5]はそのモデルにおいて真か偽かが定まっている．もし理論 T のモデル M が存在するのに，T から矛盾 $\varphi \wedge \neg\varphi$ が導かれるとしたら，M において φ と $\neg\varphi$ が両方成り立っていることになっておかしいことになるわけ．ちょっと付け加えれば，“T から φ が証明できるならば，全ての T のモデルにおいて φ が成立する” という，いわゆる一階述語論理の健全性定理をここで使ってる．

ここで一つ練習問題ね．閉論理式 φ を，$\varphi \equiv \forall x(x \cdot x = e)$ で定める (ただし e は群の単位元)．φ は群論の公理系から証明，もしくは反証できる？ それとも独立？」

Y「それは……独立ですね」

K「理由は？」

Y「もし群論の公理系から φ を証明できたとしたらあらゆる群で φ が成立するはずだけれど，たとえば整数全体 $\mathbb{Z}$ に通常の加法 $+$ を演算として入れた群 (単位元は 0) において，$1 + 1 = 2 \neq 0$ なので，φ は成り立ってない．だから φ を証明することはできません．

じゃあ反証できるか？ 反証できたとすると φ が成立するような群は存在しないはず．でも自明な群 $\{e\}$ において φ はもちろん成り立ちます．だから反証できたとすると矛盾．だから群論の公理系から φ は証明も反証もできない．つまり独立です」

K「そうそう．群論の場合はてきとうに閉論理式を持ってきたとき，その真偽が群論の公理系から決定できる方が珍しいので，わざわざ仰々しく “独立” という言葉を使うのも馬鹿馬鹿しく思えるけど，ある命題が ZFC から独立であることを示すのも本質的にはこれと一緒．今君がやったのは，φ が成立しないモデルの存在から φ が証明不可能であることを示し，φ が成立するモデルの存在から φ が反証不可能であることを示したわけだよね」

Y「つまり，ある命題の肯定が成り立つモデルと，否定が成り立つモデル両方を作れれば，その命題が独立であることがわかると」

K「だね」

[*3] 本稿では “理論” と “公理系” は同義語．

[*4] “モデルを持つ理論は無矛盾である” という命題の信頼性が群論より高いと考える人にとっては，フォーマルにもこれが群論の無矛盾性証明になっているだろうが，多分そんな人はいない．

[*5] 全ての変数が束縛されている論理式を文または閉論理式という．

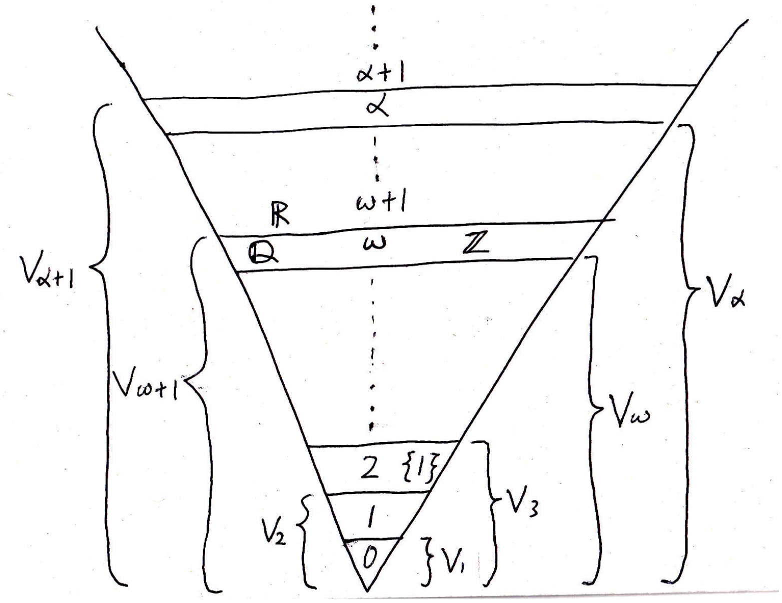


図 1.1　集合論のユニバース

Y「なるほど. ZFC $+ \neg CH$ が無矛盾であることを示すには, ZFC $+ \neg CH$ のモデル, 言い換えれば, CH が成り立たないような ZFC のモデルを作ればいいわけですね. 最初に言われたことの意味がおぼろげに見えてきました. つまりその CH が成り立たない ZFC のモデルを作るのに強制法を使うんですね」

K「そういうこと. 一般に, 命題 φ が理論 ZFC から独立であることを示すには, $\neg\varphi$ が成り立つ ZFC のモデルを作ることで ZFC から φ が証明不可能であることを示し, φ が成り立つ ZFC のモデルを作ることで ZFC から φ が反証不可能であることを示せば良い, というわけ. 連続体仮説の場合は, 後者を Gödel がやって, 前者を Cohen がやったわけだね」

1.2　宇宙の模型を作ろう！

Y「で, どうやって連続体仮説が成り立たないような ZFC のモデルを作るんですか？」

K「集合論のユニバース, つまり全ての集合からなるクラス V って知ってるよね」

Y「はい. 空集合 $\emptyset(=0)$ から始めて, どんどんべき集合 (部分集合全体からなる集合) を取っていくことで得られるんですよね」

K「そう. 一応 V の図を描いておこうかな. どの段階で作られたかによってこんな感じの階層をなす (図 1). 図の V_α というのは直観的な言い方をすると, 空集合から始めてべき集合を取る操作を α 回行った時点で得られた集合全体ね. 集合 x に対して $\mathcal{P}(x)$ で x のべき集合を表すことにすると, $V_1=\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\} = \{0\}$, $V_2 = \mathcal{P}(\{0\}) = \{0, \{0\}\} = \{0, 1\}$ という感じ」

Y「ふむふむ」

K「さて, V は ZFC のモデルなわけだけれど[*6] , そこで連続体仮説が成り立ってるかど

[*6] $(V, \in)$ は, 真のクラス V に $\in$ という二項関係が入っている構造なので, モデルの領域が集合である場合と厳密な取り扱いは異なるが, ここでは特に気にする必要はない.

うかわからない．そこで連続体仮説の否定を成り立たせるようなモデルを得るには, V に新しい実数をたくさん加えて, 実数がたくさん ($\aleph_2$ 個以上) あるようなユニバースを作ってやればいい．そうすればそこでは実数全体の濃度が $\aleph_1$ より大きくなって連続体仮説の否定が成り立つ」
Y「え？ でも V って全ての集合のクラスなんですよね」
K「うん」
Y「じゃあ全ての実数も V に入ってるはずですよね．新しい実数ってどこにあるんですか？」
K「そう, それが問題」
Y「えっ」
K「まあ今のは話を単純化しすぎで．実際は本物のユニバース V ではなく, ZFC の可算モデルを取って, それに新しい実数を加える, ということをする*7．いわば, 宇宙の内部で宇宙の模型を作って, その模型をいじって都合の良いように変形するのが強制法なんだ」
Y「？ 混乱してきましたが, ZFC の可算モデルって Löwenheim-Skolem の定理から存在が言える*8 やつですか？ “Skolem のパラドックス” *9 の話でよく出てきますよね？」
K「そうそう．ZFC の無矛盾性はとりあえず仮定するとき, Löwenheim-Skolem の定理より, ZFC の可算モデルの存在が言える．ただ, そのモデルがすごくへんてこなものだったらそのモデルをまともに扱えなくなるので, ある意味で “標準的” な ZFC の可算モデルが存在することを示す必要がある．

まず, 領域が集合であるような ZFC のモデルは, 集合 M と M 上の二項関係 E のペア (M, E) と表されるけど, この E が V 上の二項関係 $\in$ の M への制限になっているようなものを $\in$-モデルという．

それから, $\forall x(x \in M \to x \subset M)$ が成り立つとき, M を推移的 (transitive) であるという．基本的に強制法で扱う可算モデルというのは推移的な $\in$-モデルだ．

そういう具合の良いモデルの存在証明はけっこう長くなるので今はスキップしよう*10．細かい注意事項があったりもするんだけど*11，とりあえずはあまり気にしないことにして, ともあれ ZFC の推移的で可算な $\in$-モデルが取れたと思うことにしよう*12．図ではこんな感じかな (図 2)」
Y「ん？　この図の V と M って, V_ω の部分だけ見ると一致してますね．これはどういうことです？」
K「V_ω の要素は空集合からべき集合を有限回取ることで得られるものだけだから, どれも有限集合．任意の有限集合はその集合を定義する論理式を具体的に書くことができる．そのことと推移性を使えば, ZFC の推移的モデルに全ての有限集合が入っていることがわか

*7 ただし可算モデルを用いず, V そのものを拡大しているように解釈できる流儀もある．
*8 Löwenheim-Skolem の定理から, 可算な言語における無矛盾な理論は可算モデルを持つことが導かれる．
*9 ZFC が無矛盾ならば, ZFC の可算モデルが存在する．その一方で, ZFC によって非可算集合の存在が証明可能．従って可算モデルの中に非可算集合が存在することになる．これは矛盾ではないか, というパラドックス．
*10 反映定理と Mostowski の崩壊補題を用いる．詳しくはキューネン [5] の第 III,IV 章を参照．
*11 Gödel の第二不完全性定理より, ZFC の推移的で可算な $\in$-モデルの存在は ZFC によって示すことができないことがわかるが, “ZFC の任意有限部分” の推移的で可算な $\in$-モデルなら ZFC によって存在を示せる．強制法による無矛盾性証明にはそうしたモデルたちの存在さえ言えれば十分であることがわかる．キューネン [5] 第 VII 章 1 節参照．
*12 以下では単にモデルと言った場合, $\in$-モデルを表すことにする

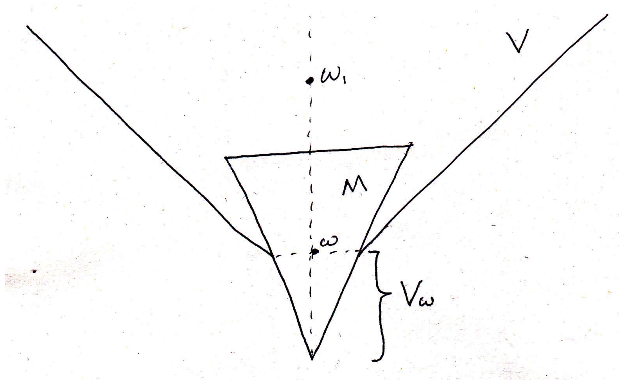


図 1.2　ZFC の推移的可算モデル

る．ただ今はそこはそれほど重要じゃないので気にしなくて構わない」
Y「あと $\omega_1(=\aleph_1)$ が M の外側にありますね．これは一体……？」
K「もし ω_1 が M に属していたらどうなる？」
Y「？」
K「M は推移的なんだよね．すると $\omega_1 \subset M$ ということにもなるよね」
Y「ああ, それは M が可算であることに矛盾しますね」
K「そうそう．ただ, M は ZFC のモデルでもあるんだよね．ZFC からは最小の非可算順序数 ω_1 が存在することが証明できる．なのに ω_1 は M の外側にある．これは不思議じゃない？」
Y「ああ, Skolem のパラドックスですよね．ただどういうことなのかはちょっとはっきりとはわかりません」
K「M にとっての ω_1 と V にとっての ω_1 は違うってこと．基数という概念は ZFC の推移的モデルの間で一致するとは限らない, つまり相対的なんだ．一方で, 順序数などの多くの概念は ZFC の推移的モデルの間で一致する, つまり絶対的だ．そろそろ絶対性 (absoluteness) の概念を説明する必要がありそうだね」

1.3　絶対性と Skolem のパラドックス

K「まずは ω_1 なんかより簡単な概念として, 空集合について考えてみよう．二元集合 $\{1,2\}$ に通常の所属関係 $\in$ を入れた構造を N とする．集合としての通常の定義通り, $0=\emptyset, 1=\{0\}, 2=\{0,1\}$ としておく．N は ZFC の一部しか満たしていないけどそこは今は気にせず．このとき, $\emptyset \notin N$ だけれど, ある意味で “N にとっての空集合” は存在する．わかるかな？」
Y「うーん, “N にとっての空集合” の定義はなんですか？」
K「まず, 空集合の定義は？」
Y「えーと, $\forall x(x \notin y)$ を満たすような唯一の y のことでしたよね」
K「基本的には量化の範囲を全て N に制限して考えればいいだけ．$\forall x \in N(x \notin y)$ が成り立つような N の要素が一意に存在するとき, それが N にとっての空集合で, $\emptyset^N$ と書く[*13]」

[*13] 量化の範囲を考えているモデル N に制限することを論理式の N への “相対化” という．厳密な定義は

「N では $1 \in 2 = \{0, 1\}$ だけど, $2 \notin 1 = \{0\}$ ですね．すると N における空集合 $\emptyset^N$ というのは 1 ですか」

K「そう．つまり V における空集合と N における空集合というのは別物なんだ．
$\emptyset \neq \emptyset^N = 1$ だね．この状況を, 空集合という概念は N に対して絶対的でないという．ところで, 今この N は推移的じゃないよね」

Y「ああ, $1 \in N$ だけど, $1 \not\subset N$ ですね」

K「推移的でないモデルに対しては基本的な概念に関しても絶対性が成り立たないんだ．
一方, 推移的モデルに対しては多くの概念が絶対的になる．さて, M を ZFC の推移的モデルとしよう[*14]．さて, $\emptyset^M = \emptyset$ となることを示せる？」

Y「ええと, まず $\emptyset^M \in M$ なので推移性より $\emptyset^M \subset M$ ですね．だからこのときもしある集合 a に対して, $a \in \emptyset^M$ だったとすると $a \in M$ となる．となると $\emptyset^M$ に M の元が属していることになり, $\emptyset^M$ の定義に反する．だからそんな a は存在しないことになり,
$\emptyset^M = \emptyset$ ですね」

K「そうそう．このとき, 空集合という概念が M に対して絶対的だという．他にも 1,2,...
といった自然数は絶対的だし, ω に関しても $\omega = \omega^M$ となり, 同様に絶対的だ．また,
$\alpha \in M$ が M において順序数だったら, V から見ても順序数だし, 逆に V の順序数 α は M に属していれば M においても順序数になる．そういう意味で順序数も ZFC の推移的モデルに対して絶対的だ．その他, 関数, 順序対, 和集合など多くの概念の絶対性が示せる．
でも濃度・基数についてはそれが成り立たない．これが ZFC のモデルの多様性の原因で,
強制法の要でもあるんだ」

Y「ふむ, ちょっと実際に色々示してみないと実感がわかないですが, なんとなくはわかりました」

K「その辺はキューネン [5] なり渕野 [2] なりを参照してもう少しじっくり考えてもらうとして, ω_1 の話に戻ろう．さっき言った Skolem のパラドックス, つまり M は ZFC のモデルだから M の中で ω_1 が存在するはずだけど, それが M の可算性に矛盾するように見える, というのがどうしてほんとは矛盾じゃないかわかった？」

Y「“M にとっての ω_1”, つまり ω_1^M は確かに M の中にあるんだけど, それは V にとっての ω_1 とは違うということですね」

K「そう．図で描くとこんな感じ (図 3).
ω_1^M も ω_5^M も ω_ω^M も, V から見たらみんな ω_1 より小さい可算順序数にすぎないというわけ」

Y「ああ, なるほど……ω_1^M は M の中の ω_1 なんだから, M の中には $\omega (= \omega^M)$ と ω_1^M の間の全単射は存在しないわけですよね．でも V の中には ω と ω_1^M の間の全単射は存在する, と」

K「そうそう．V は M よりずっと広いわけだから, M の中に見つからないそういう全単射が V の中では見つかることに何の不思議もない」

Y「だから Skolem のパラドックスは一見不思議に見えるけれど, 矛盾でも不合理でもないわけですね」

キューネン [5] 第 IV 章を参照.

*14 ZFC 全てではなく, 空集合の一意存在を示せる程度の ZFC の断片を満たしていれば構わない.

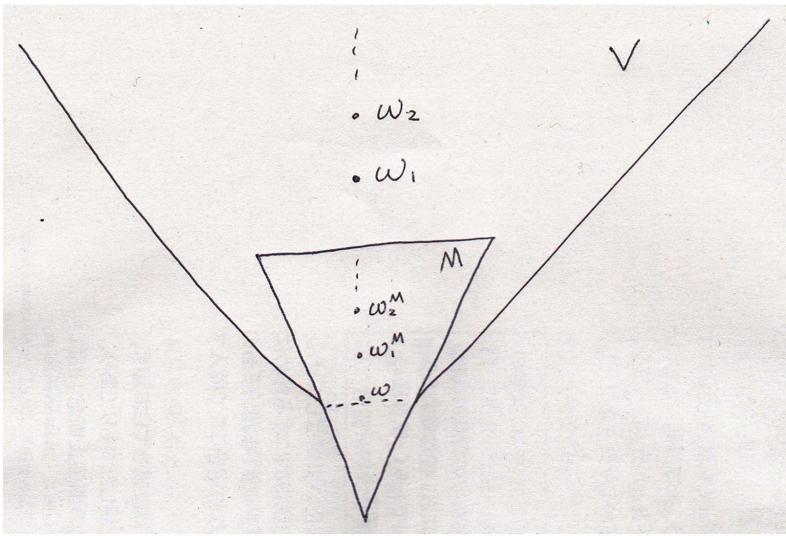


図 1.3　M の基数と V の基数

1.4　ジェネリック拡大と基数の保存

Y「段々 ZFC の推移的可算モデルのイメージがいくらかわかってきました．上手くやればそういうモデル M が取れるというのも後でちゃんと証明を読みたいですが，とりあえず OK です．それで，取ったモデルをその後どうするんですか？」

K「そしたらさっき言ったように M に入っていない実数を M に付け加えてやって M を拡大してやればいい．新しく付け加える実数たちがコーディングされた集合が "ジェネリック" と呼ばれるもので，ふつう G と書く．G を加えてモデルを拡大することを "ジェネリック拡大" という．拡大してできた新しいモデルは $M[G]$ と書く．もちろん G はもともとは M に属していない集合．$M[G]$ は M を部分集合として含み，G を要素として持つような最小の ZFC の推移的モデルになっている」

Y「つまり $M[G]$ は M の要素と G によって生成されるわけですね」

K「可換環 R に記号 x を加えて多項式環 $R[x]$ を作る，というのがよくアナロジーとして言及されるね．$R \cup \{x\}$ を含む最小の可換環が $R[x]$．$M \cup \{G\}$ を含む最小の ZFC の推移的モデルが $M[G]$．また図に描いてみよう (図 4)．G は M の部分集合ではあるけど，M の要素ではないので M の外側に描いてある」

Y「この図，上方向へではなく横方向に拡大しているのは何か意味があるんですか?」

K「M と $M[G]$ は同じだけの順序数を持つというのをイメージ化した感じ．On を順序数からなるクラスとすると，$M \cap \mathrm{On} = M[G] \cap On$ となる．これは $M[G]$ をちゃんと定義すればすぐ導かれることだけど」

Y「なるほど，この $M[G]$ が連続体仮説の否定が成り立つような ZFC のモデルになってるわけですね．イメージはわかったんですが，でも結局ジェネリック G って何なんですか？」

K「それをちゃんと話すには時間が足りないな．半順序集合 (poset)，その稠密部分集合 (dense subset)，フィルター (filter) といった概念の定義から話さなきゃいけないから．た

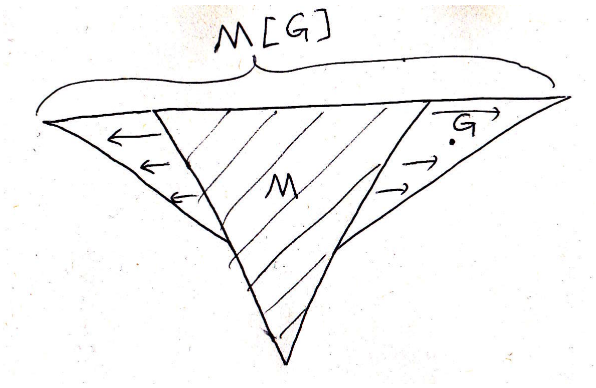


図 1.4　ジェネリック拡大

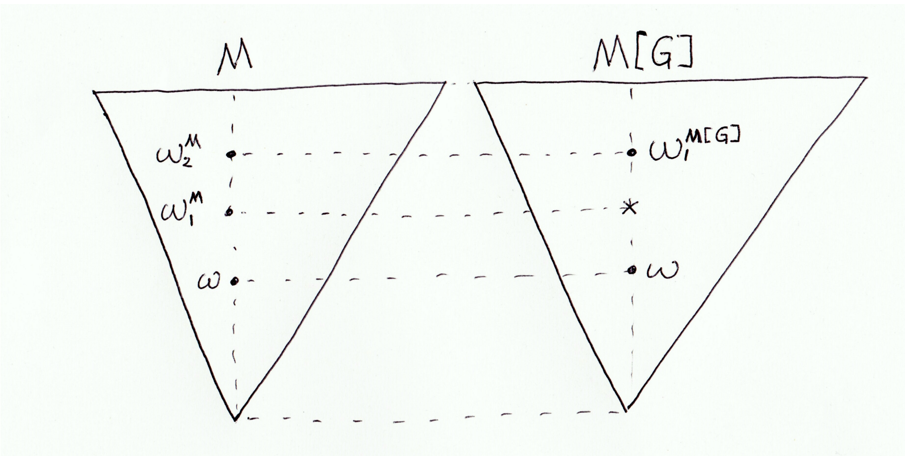


図 1.5　M の基数と $M[G]$ の基数

だそこに関してはテクニカルだけど概念自体が難解ということはないので教科書を読み進めるのにそれほど苦労はないと思う．定義も言ってないからもう雰囲気だけ感じてほしいんだけど, ジェネリックというのは poset のフィルターで, その poset の全ての稠密部分集合と交わるようなもののこと．どのような poset を考えるかによって M[G] で何が成り立つようになるかが変わってくる．G はたとえば実数を ω_2^M 個なり ω_7^M 個なりコーディングした集合だけど, 別の poset を用いることで実数以外にも色んなジェネリックを付け加えることができる．たとえば無限ツリー構造における無限長のパス (path) とか．ま, そのへんもおいおいね.

　さて, 一つ言っておきたいのは, 単に実数をたくさん加えただけじゃ必ずしも $M[G]$ で連続体仮説の否定が成り立つとは保証されないということかな．難しいのはそこ．どうしてだかわかる？」

Y「いえ．そうなんですか？」

K「なぜかというと, M と $M[G]$ でどの順序数が ω_1 かが変わってしまうかもしれないから．たとえば図 5 を見て．この図では, ω_1^M が $M[G]$ では基数ではなくただの可算順序数に “崩壊” してしまっている．あと $\omega_2^M{=}\omega_1^{M[G]}$ になったりしてるね」

Y「ω_1^M が V にとっては可算順序数になってしまうのと同じですよね」

K「うん．ジェネリック拡大の際, 何が起こるとこういうことになるかわかる？」

Y「ω_1^M は $M[G]$ では可算になってしまったわけですから, $M[G]$ の中には ω_1^M と ω との間の全単射があるわけですね. M の中にはなかったそんな全単射がジェネリック拡大のとき付け加わってしまったと」

K「そう. そうなると実数を ω_2^M 個加えたとしても, $M[G]$ にとっては高々 $\omega_1^{M[G]}$ 個の実数しか加わってないわけだから, 実数全体の濃度は M に比べて上がることはなく, $M[G]$ が連続体仮説の否定のモデルになるとは限らないわけだ」

Y「じゃあどうすればいいんですか？」

K「実は Cohen と同じ方法で連続体仮説の否定のモデルを作る際はジェネリック拡大の際に基数が崩壊することはなく, M と $M[G]$ の間で基数が一致することが示せるんだ. このことを基数が保存するという. これも示すのはやや手間がかかる. キーワードだけ言っておくと, 証明のポイントは実数を付け加えるような強制の際に用いる poset が ccc(countable chain condition, 可算鎖条件) という性質を持っていることだ. でも今はともあれ濃度・基数という概念が絶対的でないので, M[G] でちゃんと連続体仮説の否定が成り立っていることを示すのがなかなか大変なことさえ覚えておけばいいよ. 詳しいところはまた今度ね」

Y「わかりました」

K「まだ “強制関係” を定義して “真理補題” と “定義可能性補題” を示す, という概念的にもややこしくて, 数学的にも結構難しい課題が丸々残ってるんだよね. 比喩的に言えば M に住んでる人が自分がいる宇宙の外側, $M[G]$ において何が成り立っているのかかなりの部分知ることができるという話なんだけど……説明が大変そうだなあ」

参考文献

[1] 新井敏康. 数学基礎論. 岩波書店. 2011.

[2] 渕野昌. 構成的集合と公理的集合論入門. 「ゲーデルと 20 世紀の論理学 4」所収. 東京大学出版会. 2007.

[3] 渕野昌. 強制法入門. 数学基礎論サマースクール 2007 の講義資料.
http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~fuchino/shizuoka/lss07_fuchinox.pdf

[4] 木 原 貴 行. 一 か ら 強 制 法. http://d.hatena.ne.jp/tri_iro/20070105/1168660699

[5] キューネン, ケネス./藤田博司 訳. 集合論—独立性証明への案内. 日本評論社. 2008.

[6] 薄葉季路 強制法入門・応用・最前線. 東工大ロジック・セミナーのスライド.
http://www.math.tohoku.ac.jp/~y-keita/old/Usuba_tokodai.pdf

第 2 章

ブラウアーの定理なんか怖くない 一実数上の実関数が全部連続でも何も困らない理由一

淡中 圏

2.1　ブラウアーの定理は"変な定理"？

20 世紀初めの，数学基礎付け論争に興味がある人は，誰でもブラウアーという名前や，「直観主義数学」という言葉を聞いたことがあるだろうし，分析哲学なんかに興味がある人も，ダメットなんかを経由して，「直観主義数学」にたどり着く人もいるだろう．

そんな人たちは，きっといわゆる「ブラウアーの定理」を目にした人も多いだろう．

定理（ブラウアーの定理）　任意の実数上定義された実数値関数は連続である．

これだけでは良く意味が分からないであろうから，もう少し説明を加えると，たとえば一番簡単な不連続関数の例，階段関数，

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 1) \\ 1 & (x > 1) \end{cases}$$

を考える．こんなものがあれば，直観主義数学においても，$\varepsilon - \delta$ 論法により不連続だ[*1]．しかし，実はこの関数の定義は，ブラウアーの直観主義数学においては，定義になっていない，と判定されてしまう．そして，実数上定義可能な実数値関数は，結局連続になる，ということが証明される．

ココまで説明すれば，多少言ってることの意味は分かる．しかしそれでも，これほど耳目を驚かせる定理もないと言えるくらい奇妙な主張だ．

これを見たときの反応，および理解はだいたい二つ考えられる（そもそも数学に興味がない人，理解しようとしない人の反応は最初から除いてある）．

一つ目は，奇妙であるがゆえにこの定理に興味を持つ，というもので，まあはっきり言って少し素人くさい．素人の数学ファンは「エキゾチック」な物が大好きだ．通俗読み

[*1] 直観主義においては，こんな関数も連続に見えてしまう，ということでは決してないことに注意

物を読めばよく分かる．しかし，プロの数学者は，何らかの問題に数学を使おうとしているので[*2]，むしろオーソドックスな物の方に興味を持つ．球面について新しい知識が得られれば，数学内部でも外部でも大きな進歩が得られるわけで，よって多くの数学者が興味を持つのは普通の球面である．その副産物として，「7 次元エキゾチック球面」なる物の存在が明らかになるわけだ．対して素人は，球面に興味なんか持たないから「エキゾチック球面」の方が面白い物に思えてしまう．もちろん，エキゾチック球面に興味の主眼を置く数学者が小数いることは，数学者社会のあり方として健全だが，大半の興味がそちらに移っていってしまったら，数学者社会は機能不全に陥ってしまうだろう．ネットでブラウアーの定理について書いている人も，大半はそうな気がする．彼らはこの定理に，何らかの「神秘」を感じているのではあるまいか．

そんな彼らは数学があまりできないので，実際に数学をやってみようとするより，ダメットやその他分析哲学者なんかの仕事を読んで，ブラウアーのやったこと，やろうとしたことを概念的に理解しようとする．難しさがそんな変わるとは思えないが．

その方針にはいくつか問題がある．まず，ブラウアーの言っていることを追いかけても，数学的厳密性よりも，思想的な部分が多い論文だと，書くたびに微妙に言っていることが変わってしまうこと．おそらくブラウアーの中でも考えがまとまっていなかったのだろう．数学なら厳密化形式化が処方箋のはずだが，ブラウアーがそちらに靡くはずもない．だいたい，「やったこと」ならともかく，「やろうとしたこと」なんて本人でも理解しきっていないことを追いかけても不毛だ．そこには，ルネッサンス的な「昔の人は偉かった」的人物崇拝が感じられる．昔の人の意図を推測し，その意図がもし不合理だったら，賢明に「きっと本当はこう言いたかったんだろう」と忖度してあげる．これが不毛でないんだったら，サハラ砂漠だってマングローブの一種だと言える．重要なのは意図ではなく，それが何かであり，何に使えるかである．もし直観主義について何かを知りたければ，それを聖遺物ではなく，道具として使うことだ．ブラウアーをちゃんと評価するためにも，それが必要である．[*3]

もう一つの問題は，最近ようやく緩和されてきた，分析哲学の「言語偏重主義」である．言語について考えることが，世界について考える最良の手段だという，なんかよく分からない思い込みが長いこと彼らを支配していた．ウィトゲンシュタインの影響強すぎ，である．ダメットも「古典主義は駄目で，直観主義が正しい．だから反実在論」とかよく分からないことを言っている．カバラやレモン・ルルじゃねえんだから，世の中が言葉や論理でできているわけでもないとすぐに分かろうものだが．だったら，言葉や論理の分析にそれほど大きな期待ができないこともすぐに分かる．数学や論理を扱うものが肝に銘じていなければいけないことは，数学や論理のできることの小ささと，小さくてもないよりはマシだという，希望と失望のバランスである．[*4]古典主義が強すぎるのは確かだが，そんな

[*2] 別に数学外への応用のみを指しているわけではなく，数学内部での数学の使用も含めている

[*3] もちろん，ブラウアーの評価には，ブラウアーが何を言ったか，何を言いたかったのかに関する歴史研究は欠かせない．しかし，ブラウアーのやったこと，やろうとしたことが今にどう繋がっているかがなければ，評価の軸ができない．結局人は「歴史内存在」でしかあり得ず，，歴史というのは，「今現在から振り返った歴史」でしかあり得ない．その中で「当時の文化」「当時の世界観」「当時の風潮」をどれだけ客観的に明らかにし，評価できるか，という問題なのだろう．「現在からの視点」を確固とした物にしなければ，過去を客観的に評価することもできない

[*4] 修士課程までの間に，数学や論理の能力への希望を，修士課程の間か就職してから，思ったよりできることが少ない失望を，そして一人前になるくらいには，その絶妙のブレンドを身につけるべきだろう

こと言ったら直観主義だって強すぎる．論理というのは，我々が行う「推論」という面妖な行為の一側面を抽象したものなので，見方を変えれば見える側面も変わり，それに対応して世の中には面妖な論理がいくつもあって，その中には使えるものもたくさんある．それらは，場合場合に応じて使い分けるもので，汎用な物なんてない．[*5]古典論理も直感主義論理も，それぞれ使えるとき使えないときを理解していれば，便利な道具である．

ただそれだけ．

そこには，実在とか普遍とか，世界の根幹に関わるような謎はどこにもない．

さて，場合分けがネストしてしまって分けわかんなくなってるが，ブラウアーの定理に対するもう一つの反応は，拒否もしくは無視である．先ほどの反応が数学の勉強はあまりしていないが，数学に（上で説明した素人的な）興味がある人の典型的な反応であるのに対して，こちらは数学をちゃんとやっている人間なんかにありがちである．

彼らは，数学で使う素朴集合論の授業で，20 世紀初めの数学の危機については目にしたことはあり，ブラウアーの直観主義についても小耳に挟んだことはあったりする．しかし，そんなものは自分たちに関係ない歴史的なことという意識があったりするので，そもそも直観主義がその後もちゃんと生き残っていたことも知らなかったりする．

そうすると，「不連続関数が定義できない」ということはどう見ても，直観主義数学の能力の低さを表しているようにしか見えない．これでは直観主義が消えてしまうのも「残念だが当然．男らしい最期といえる」という感想に至ってしまう．

いや，死んでないし，これはあまりにも残念．タイプ理論などの，計算機数学との関係はものすごく面白いんだから，そちらへ興味を持ってもらう機会がもっと多くてもいいと思っている．そう言う意味で，こういう反応になってしまうのは，惜しい．

というわけで，前置きが長くなってしまったが，この文章の目的は，「ブラウアーの定理」をおおざっぱに理解して，脱神秘化する[*6]のとともに，このブラウアーの定理が直観主義数学の致命的欠陥を表しているわけではない，ということを説明したい[*7]．ブラウアーの定理について，「そら（そういう設定にすれば）そう（なる）よ」と思えることが目標だ．

2.2 ブラウアーの定理は非常に当たり前なことしか言ってない

ブラウアーのしようとしたことを，今やろうとすると，だいたい「構成的数学」と似た感じになるのだろうか．もちろん，全く同じではないが，上でも書いたように，「おおざっぱに」がこの論考のテーマなので，細かいことは気にしない．

19 世紀後半，ワイエルシュトラスらによる厳密化形式化，ボルツァーノ，カントール，デデキントらによる無限概念の大導入，ヒルベルトらによる非構成的な存在証明などが，

[*5] もし汎用な物を作ろうと思えば，何かについて調べたものではなく，**何かそれ自体**になってしまうだろう．文学作品ならともかく，学問的営為として何の意味があるんだか．昔の人がしたよく分からない研究を研究することで，学問ジャンルが永続するってことだろうか？

[*6] これは迷信に塗れたゲーデルの不完全定理に関して，トルケル・フランセーンが『ゲーデルの定理——利用と誤用の不完全ガイドブック』でやろうとしたこととだいたい同じである．ちなみにこの本の邦題，「使用と誤用」の方が良かったのではないかと未だに考えているが，無用な話であったか．

[*7] あくまで，おおざっぱに，である．でないと，非専門家の無用な興味を退け，有用な興味を引きつけることができない．

数学を大きく変質させていた．そんな中，カントールの集合論がパラドクスを含むことが分かって，数学の基礎付けに関する危機意識が生じた．ヒルベルトの形式主義とか，ブラウアーの直観主義もここから生じた．しかし，私は彼らが何を考えたのかについては詳しく語る気がない．ちゃんと書いてある本が多い，というのもある．実際ここら辺の話は，歴史的には，今でもたくさん語り尽くされていない話があるようで，「数学の哲学」と称して，ここら辺の話をする人も多い．しかし，正直この当時の「危機意識」なんてのは，「完全に基礎付けされていないと駄目」という今となっては，間違いだったと言い切ってもいい意識を前提とした話でしかない．厳密な基礎付けなんて不可能だし，そもそも必要ない．数学を公理的に基礎づけても，多くの数学者は公理的に数学なんてやってないもん[*8]「数学のほとんどは集合論内部で実現できる」とか「圏論の手法を使うと，統一的観点ができて便利」みたいなおおざっぱに基礎付けされているのはありがたいだけどね．

だから，ヒルベルトの有限の立場とか，今から考えるとよく分からない．必要性を感じていないものの意味を理解するのは難しいからだ．同様にブラウアーの直観主義も，当時の歴史的意味を考えはじめると，泥沼に陥ってしまう．そういう面倒なことは，プロの歴史家に任せて，我々は彼らの上っ面をピンハネして，適当に済ませてしまおうという魂胆である．

とにかくブラウアーは集合論が持ち込んだ「実無限」を数学から排除しようとした．「無限」とは数え終われないから「無限」なのであって，それをまるで完結した一つの事物のように扱い，あまっさえそれの性質を語る集合論は，重大な領域侵犯を行っているというのだ．数学とは人の精神が行う活動だ．だから，人の精神が構成できるものしか，認められない，と言うわけだ．

そこから「無限集合に関する排中律”$P \vee \neg P$”の拒否」も出てくる．x が性質 P を満たすとはブラウアーにとっては，「x が性質 P を満たすと確かめられた」と言う意味である．そうすると排中律は無限に対しては必ずしも成り立たない．ブラウアーが出した有名な例を引くと，

「円周率の無限小数の中に 0 が 100 個続く部分があるかどうか分からない」

わけである．

「排中律の拒否」は論理学的には「背理法の拒否」と等価であり，このような論理体系では，結局構成的な証明，ある数学的対象が存在する，ということを実際に構成する証明だけが，正しい証明になる．

そう言う意味で，ブラウアーの直観主義は，現代の構成的数学の元ネタである．

しかしそれでも同じではない．

今の構成的数学の主張者・支持者達も，さすがに自分たちの数学こそが真実唯一の数学だとは主張しない（心の中でそう思っている人もいるかも知れないが）．それは，何と云っても非構成的数学の覆し得ぬ大成功を目の当たりにしていると共に，非構成的数学と構成的数学が手を取り合って進歩していく未来が，別に相手を排斥せずとも見えるからである．単に適材適所なだけでしょ，と言う話で．

いろんな数学があって，みんな違ってみんないい，という世界観は形式主義的ですらある．

[*8] だから，もし今日ペアノ公理や ZFC に矛盾が見つかっても，別に数学が終わってしまうわけではない．ものすごくびっくりするのは確実だが．数学の大部分は普通に続いて，さっさと別の公理を論理学者が作ってくれよ，と思うだけ．論理学者は，今までの成果をサルベージするために大騒ぎだろうけどね

それに対して，ブラウアーは自分の数学こそ，真実唯一の数学だと信じていただろう．だからこそ，後で問題になる「選列」なんて変な物も導入してしまう．

普通に考えたら，「構成できる物だけが，数学的対象として意味がある」となったら，「じゃ，計算可能な物だけが意味があるんだよね」となって，たとえばこの考え方で実数論を作ろうとしたら，「計算可能な実数だけが存在する」となるような気がする．ブラウアーの言う「計算できる」は，いわゆる「計算可能性」とは一致しないけど，面倒なのでその差を無視すれば，それは逆数学でいう RCA_0 という公理とだいたい一致する．

しかし，ブラウアーはそうは考えなかった．

何故だろう？

私はそれに関しての歴史的な定説は全然知らないんだけど，何となく理由は予想できる．

「なんかこれだと実数すくなくねえか？」

という感じがつきまとうのだ．

実際，逆数学の初歩の初歩により，RCA_0 では，有名なブラウアーの不動点定理が証明できないことが知られている．

定理（ブラウアーの不動点定理） 閉円盤 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$ の自己連続写像 $f : D \to D$ は $f(p) = p$ なる不動点 $p \in D$ を持つ．

これは，古典経済学において価格の均衡点が存在していることを保証しているワルラスの法則などの，数学的根拠になる重要な定理である．

しかし，この不動点の座標はたとえ f が計算可能な関数であっても，計算可能にはならない．

一次元の不動点定理が RCA_0 で証明できることと比べると面白いだろう．

ブラウアーにとっては，計算可能なものだけでは，実数と呼ぶにはなんだか足らない気がしたのだ．*9

今だったら，そう言う実数論を研究しながら，別のより自然な実数論も作る，という一挙両取りの分業制を敷こう，とするだろうが，ブラウアーにとっては，数学は一つ，実数論も一つだったので，そういうことはせず，真の実数論構築に邁進しようとする．

そこでブラウアーは悪名高き「選列」の概念を導入する．

選列とは，実数を定義する為のコーシー列に，計算可能でないものを導入するために，必ずしも計算可能でない数列を，一つ一つ作っていく能力が，数学者*10にはある，という仮定である．

$$1, 5, 7, 3, 5, 9, 2, 0, 5, 5, 5, 7, 3, 8, 9, 4, 5, 3, 7, 8, 3, 5, 6, \cdots$$

みたいに，適当に数列を作っていく感じだろうか．

決して，ランダムな数列の存在を仮定しているわけではない．そもそもブラウアーは「数列」などという完結した「実無限」を許容しないし，完結していなければ，数列がランダムかどうかは絶対に分からない（どんな先でループが始まるか知れない）．

しかし，「人間の能力」じゃ数学的議論がしにくいし，これをランダムネスの導入と言

*9 さらにブラウアーには，人間の心には，単に計算する以上の，数学的な認識の能力があるような気がしていたようだ．

*10 実際には「理想化された数学者」だそうだ

い切ってしまっているうっかりな解説者も時々いることだし，ここでもこれをランダムネスの導入と見なしてしまおう．

そうすると，ブラウアーの定理が成り立ってしまう理由が非常にクリアになる．

ブラウアーはこのとき，「証明能力は低いままで，存在公理だけは強くする」，という決断を行ったのだ．「直観主義」という，基本的に構成的な物しか扱えない論理に，「ランダムネス」という非構成的な性質を持つ存在を付け加えたら変なことが起きるのも必定である[*11]．

それでは，まず，最初に例に出した階段関数

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 1) \\ 1 & (x > 1) \end{cases}$$

が，この設定で実数上定義されていないを見てみよう．

(説明)　１から９までの数を出し続ける理想的数学者がいたとしよう．彼がどんなルールに従っているのか，そもそもそこにルールなんてあるのか誰も知らない．彼は数字以外のアウトプットを全くしないのだ（さすが理想的数学者といえよう）．そこで n 番目の数を１０進展開の 10^{-n} の位の数とする，実数 r を考える（n は０から始まる）．このとき，もしどこかで $r > 1$ と分かる瞬間があれば，$f(r) = 1$ と決められる．同様に，$r < 1$ と分かった瞬間に，$f(r) = 0$ と決められる．しかし，いつまで言っても，$1.000000000\cdots$ だったら？もしくは $0.99999999999\cdots$ だったら？もしかしたら，$r = 1$ かも知れないけど，それをどうやって証明する？ r のその他の性質が何か分かればいいけど，今はそんな物は何もない．でも，ここでの設定では，こんな面妖な r もちゃんとした実数の仲間なのだ．

つまり，この関数は実数 r に対して定義されていない．すなわち，この関数は実数上定義されていない，ということになる[*12]．

ここまでくれば，実数上定義されている関数が連続になる，というのもすぐに分かる．

ブラウアーが要求していることは，

「途中までのコーシー列に対して，途中までのコーシー列を返すような計算方法を与えろ」

ってことだ．

つまり，コーシー列であることは証明されているが，正確な値は k までしか分かっていない有理数列 $\{a_n\}$ があったとき，それに対して，k が増えてけば，一緒に増えていく自然数 K まで正確な値が分かっていて，しかもこの時点でコーシー列であることが分かっている有理数列 $\{b_n\}$ を対応させる手続きを作れってこと．

そうするとこれは，定義域での近似を狭めていくと，値域での近似も狭まっていく，ということなので，連続関数になってしまうのだ．

[*11] 一つ一つ思いつきで数字を出していくことは，もちろん構成できるが，任意の長さでそれを続けるのは，もはや「理想化された数学者」にしかできず，その理想化たるやチューリングマシンなど足下にも及ばず，これはもう非構成的概念と言わざるをない

[*12] 計算可能理論などで実数上のランダムな点を扱っていたり，代数幾何やモデル理論などでジェネリックな点を扱っていたりするひとは，この r がそれらの点の仲間だと分かってくれるだろう．それらの点は，描写しきれないがゆえに，ぼうっと広がっているような点になる．よって，次元を計算しようとすると，点なのに０次元ではなくなる．論理を制限して描写能力を弱くしたがゆえに，不連続点１の周りにこういうぼやけた点ができてしまったのだ

ここまで読んで,「なんだそれだけか」と思ってくれたら,この論考の目的は達成できたといえよう.

そして,ここまで読むと,別にブラウアーの定理が,直観主義数学の欠点でも何でもないことが分かる.

直観主義数学で上みたいな階段関数が定式化できないわけでは全然ない.ただ単に,実数全体で定義しきることはできないよ,という訳だ.

直観主義が,人間が構成する数学なんだとしたら,なんで実数全体に対して定義しきる必要があるの.別に値がいつまでも定まらない場合があってもいいじゃない.そもそも,人間のやる数学ってそういうものなんだから.計算機科学でも,プログラムが止まらないなんて当たり前の事態で,別にそれでものすごく困っているわけではない.

何だったら,実数から実数への関数の代わりに,実数から実数へのモナドを考えてみたらどうだろうか.そうすれば,不連続な関数にだって,ちゃんと居場所を作ってあげられる.*13

2.3 トポスとブラウアーの定理

一応ＳＧＬの中で書かれている内容にも少し触れておこう.実は,この本,上で書いたような,「ブラウアーが証明した定理は結局なんなのか」については何も書いてない.ただ,「ブラウアーが証明したのと同じ現象が起きるトポスを作れる」ということが書いてある.

これはトポスが,ブラウアーが言ったことを,ヒルベルトの弟子であり後にブラウアーの下に移ったハイティングが形式化した直観主義数学における集合論のモデルになっている,ということから考えると実に自然である.自然ではあるが,ここを読んでも,ブラウアーの視点からは少しずれてて,上で書いたような話は必ずしも分からない.

それでも,この部分は,それ以前に説明していた,forcing semantics や sheaf semantics などの練習問題として,実に優秀なので,是非とも読んで欲しい.

本質は,層のなすトポスにおいて,自然数にあたる対象や整数,有理数に当たる対象は,定数層なのに*14,デデキントカットの論理式で定義したその圏での実数は,実数値連続関数の成す層に対応してしまう,ということだ.

これはブラウアーのセッティングとの関係で言ったら,関数なので,正か負か二つに分かれないことを意味する.

このように存在を増やしておけば,あとは描写能力を減らしていけばいい.そのためには,普通の位相空間の開集合のなす poset ではなく,位相空間を対象として,連続写像を射とする,位相が定義できるように連続写像の逆像をとる操作（pull back の一種）で閉じていて,forcing を簡単にするために終対象,すなわち一点集合を含む,小さな圏と,普通の意味の開被覆を被覆とする Grothendieck 位相を考える.

すると,これによって作られる層でも,やはりデデキントカットのなす対象は,その位

*13 古典論理を直感主義論理に埋め込む一番簡単な方法は、古典論理の論理式を、全てその二重否定に変形してから直観主義論理の論理式だと見なす「否定翻訳」である.そして、これを計算的に解釈すると、古典論理の論理式は、普通の関数ではなく、「例外を投げる操作を入れたモナド」や「継続を渡すモナド」などの、モナドを入れた関数と見なせることが分かる。これもその一例である

*14 これは対角埋め込み関手 $\delta : \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}} = \mathrm{Sets}^{\mathbb{C}^{\mathrm{op}}}$ も層化関手 $a\hat{\mathbb{C}} \to \mathrm{Sh}(C,\ J)$（ここで J は圏 $\mathbb{C}$ の位相）もどちらも,有限 limit と colimit を保つことに由来する

相空間上の実数値連続関数の成す層になる．

すると，もし実数が最初の小さな圏に入っていれば，なんとこのデデキントカットのなす対象は，表現可能な層になってしまう．

よって，実数対象と実数対象との間の関数の全体は，米田の補題から，普通の実数と実数の間の連続関数と対応してしまうことになる．

より複雑な構造になっているように見えるのに，写像は減ってしまうことが，米田の補題から導かれるなんて，なんだか面白い．

もちろん，これは集合論的な外部からの眺めで，実際には内的に証明しなくてはいけない．

そのためには，この実数対象は，位相空間に集合を対応させる層なので，その位相空間をコンテクストとして，sheaf semantics を見ていかなくてはいけない．しかし，SGL をここまで読んでいれば，任意の対象をコンテクストとして仮に入れて議論するのには慣れているだろう．

普通の位相空間の上の層を考えていた時は，元々の圏がただの poset なので，集合論の forcing そっくりになる．今回は，もっと複雑な圏構造を相手しているので，少し複雑になる．

しかし，やっていることは，タイプ理論の型付けと全く一緒であるので，coq で「まず intros して，できる限りのものをコンテキストに押しつけて……」とか「または，が出てきたときは，コンテクストを場合分けして」などの作業を練習すれば，そんなに難しくはない．なぜ，「かつ」や「すべての」より，「または」や「ある」では複雑になるのか（具体的にはコンテキストを覆う「被覆」が必要になる）のかも，coq をやっていれば実感できる．そうすれば，結局は普通の数学の $\varepsilon - \delta$ 論法に帰着してしまい，すると結局米田の補題より，実数値の連続関数に対応してしまうんだから，連続性を満たしてしまうことが分かるのである．

参考文献

[1] Saunders MacLane, Ieke Moerdijk『Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory』Springer; 1st ed. 1992. Corr. 2nd printing 1994 版 (1992/04)

第 3 章

Yet Another Walk Tutorial

宮崎 達也

ここでは，Todorcevic による minimal walk の理論とその応用について紹介する．walk とは何か，ということについて答えなければならないが，これがまずわからない．ここで適当な放言が許されるならば，walk とは帰納的構成により順序数を作ることができないような状況で，constructivity[*1]を捨てて coherency[*2]により順序数を記述しようというものである．walk 自体は Todorcevic が始めたことはわかっているが，どうやってこれに至ったのか，その出自は不明である．その理論は非常にエレガントで強力である．しかし，Todorcevic 本人にやる気が全くないのか，初心者向けの expository なんてものを書く気はさらさらないらしい (Todorcevic の記事に関しては例えば [7] や [8] を参照して欲しい)．本人にとって見れば当たり前の命題が説明もなしに唐突に出現し，何の意味をなすかもわからない定義を下に魔法のような結果を導くのである．これはたまったものではない．どうしたものか．少なくとも，現時点で，日本語で読める minimal walk の解説もない．じゃあ，俺が書いてやろう，ということで筆をとっているわけだ．

そのような事情で，この記事の目的は，walk の理論の解説と walk の技術の敷衍である．walk はもっと広く利用されるべきである．しかし如何せん開発者が…，的なこともあり皆がバンバン使えるという状況ではない．J.T. Moore の 2 大 work であるところの five element basis([6]) と L-space problem の解決 ([5]) は，walk の理論なしにはありえなかったことを考えると，walk から得られるものは大きい．逆に言えば，Moore のような慧眼と数学的腕力を以ってしか walk を使いこなすことができないというのは問題だ．この記事の最後ではそのうちの five element basis に関するある程度の解説を試みた．ただ証明はしないので Todorcevic による詳説 [7] かあるいは Moore の原論文 [6] を参照してほしい．

walk の理論が生み出した功績は様々だ．大きなものとしては，Aronszajn 木を含めた木の構成法に関して非常に綺麗なフレームワークを与えたことが挙げられる．また，直線，木，および順序数のグラフの彩色を密接に結びつけたことも大きい．本文中で構成される Countryman 直線の構成は当初 Shelah によって達成されたが，walk によるものほど綺麗なものではなかった (例えば，[4] の Todorcevic の記事を参照せよ)．walk theory

---

[*1] 可算順序数は ω，ω^2，ω^ω，$\omega^{\omega^{\omega^{\cdots}}} = \epsilon_0$ などと recursive に構成ができる．しかしこのような構成法ですべての可算順序数を取り尽くせるわけではない．

[*2] 天から降ってきた可算順序数の表現を弄ることで斉一的 (coherent) に見えるようになるという意．

以前，Aronszajn，Specker，Baumgartner などによる部分的な仕事はあるものの，非可算直線構造についてほぼ何もわかっていなかったというのは衝撃的ではないだろうか．少なくともそこに自然な構造があると思っていた人は少ないであろうことは，Countryman 直線という対象が長らく光を当てられず放置されてきたことからもわかる気がする．

また，walk は ZFC のみで実行可能な combinatorics に大きな光を当てた．これは，Erdös，Rado，Galvin(Shelah の pcf も入れてもいいかもしれない) などに次ぐ combinatorics の歴史から見ても，walk の自然な構造の発見は重要である．

何が言いたいかというと Todorcevic すげーという話で，それを広めようという話だ．あわよくばやる気のない Todorcevic を dis ってやろうとかそういう目的では決してありません．Todorcevic の論文読解のために何ヶ月も悩んだ日々への個人的復讐でもありません．

長々と書きましたが，今から読者に要求するのは順序数や超限帰納法といった技術に親しいことである．それ以外の数学的知識，集合論的知識は特に仮定しません．証明はできるだけわかりやすく，self-contained になるようにした．どこかのスーパー walk 理論屋 T 氏のような，“自明（但しハイコンテキスト）に成り立つ” といった初学者殺しの言葉遣いはできるだけ避けたつもりだ．但し，本文を読むにあたって，walk の図を実際に書きだして見ることを強く薦める．

以下で証明される命題，定理は（explicit に言及されている場合を除き）すべて，ZFC で証明される命題である．

便宜上，α，β，γ などのギリシャ文字は主に順序数を表す記号として用いる．記号 $\mathrm{otp}(X)$ は整列順序付けされた X の順序型を表すものとする．L を順序とする時，$X \subseteq L$ が cofinal であるとはどの $y \in L$ に対しても，ある $x \in X$ で $y \leq x$ となるものがとれるときをいう．

ω，ω_1，ω_2 などは，index 順に並べた無限基数を表すこととする．つまり，$\omega = \mathbb{N}$ で ω_1 は最初の非可算順序数である．

$\langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle$ などで x_i の列を表すこととする．

列の文脈で $\emptyset$ と書いたら，それは空列 $\langle\rangle$ のことを表すこととする．

$\sigma^\frown\tau$ と書いたら，列 σ と τ の結合を表すこととする．

$\sigma \sqsubset \tau$ と書いたら，σ が τ の真の始切片であることとする．$\sqsubseteq$ は $=$ も含めた始切片の意味とする．

$[X]^n$ は X の要素数 n の部分集合全体の集合とする．$X^{<\omega}$ は X の要素から成る有限列全体の集合を指すこととする．また，任意の順序数 α について，$X^{<\alpha}$ は長さ α 未満の X の要素から成る列全体の集合とする．

以下では，*C-sequence* と呼ばれる列 $\langle C_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \rangle$ を以下の条件を満たすように fix する：

1. $C_{\alpha+1} = \{\alpha\}$.
2. α が極限順序数のとき，$C_\alpha \subseteq \alpha$ は cofinal かつ $\mathrm{otp}(C_\alpha) = \omega$.
3. α が極限順序数のとき，C_α は後続型順序数のみからなる．[*3]

以上が基本的な注意である．

[*3] 正直この条件なんで必要なのかわからないので誰か教えて下さい．

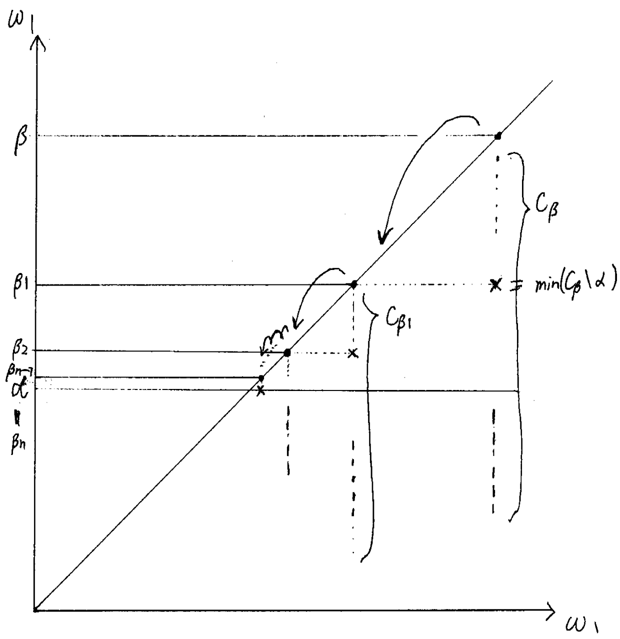


図 3.1 β から α への minimal walk

章構成については, 1 章は walk 単体の解析について, 2 章は walk と木構造の interaction について，3 章は木と直線の interaction について，4 章は，walk の応用として Basis Problem に関する解説になっている．

3.1 Minimal walks, colorings and lines

定義 3.1.1 (*step*)**.** $\alpha < \beta < \omega_1$ とする．β から α への *step* とは $\min(C_\beta \setminus \alpha)(< \beta)$ のこと．

定義 3.1.2 (*walk*)**.** $\alpha \leq \beta < \omega_1$ とする．β から α への *walk*(あるいは *minimal walk*) とは，β から α へと降下する連続する step の列，つまり

- $\beta_0 = \beta$;
- $\beta_{i+1} = \min(C_{\beta_i} \setminus \alpha)$; (unless $\beta_i = \alpha$),

で定義される ordinal の真減少列 $\langle \beta_i \mid i \leq n \rangle$ のこと．整礎性からこの列は有限であり，その last step は $\beta_n = \alpha$ になる．

定義 3.1.3 (*full code*)**.** $\alpha \leq \beta < \omega_1$ とする．$\rho_0(\alpha, \beta) \in \omega^{<\omega}$ を

$$\rho_0(\alpha, \beta) = \langle \mathrm{otp}(C_{\beta_0} \cap \alpha), \ldots, \mathrm{otp}(C_{\beta_{n-1}} \cap \alpha) \rangle$$

で定義する．ただし，$\beta_i (i \leq n)$ は β から α への walk で $n = 0$ のとき，つまり $\alpha = \beta$ のときは $\rho_0(\alpha, \alpha) = \emptyset$ とする．

次の補題は頻繁に用いる．

補題 3.1.1. $\alpha \le \beta$ とし，β_i を *walk* とする．このとき，任意の i について，この *walk* $\bar{\beta}$ は α から β_i への *walk* と β_i から α への *walk* の結合になる．

補題 3.1.2. $\alpha \le \beta \le \gamma$ とする．このとき，β が γ から α への *walk* 中に現れることと，$\rho_0(\beta,\gamma) \sqsubseteq \rho_0(\alpha,\gamma)$ であることは同値．

Proof. 一方向は，前補題から．もう一方向は，素直に walk を計算すればいい． □

補題 3.1.3. $\alpha < \alpha^* \le \beta < \omega_1$ とし，$\beta^*_i(i \le n)$, $\beta_j(j \le m)$ をそれぞれ β から α^*, α への *walk* とする．また，

$$j = \min\{j \mid \beta_{j+1} < \alpha^* \le \beta_j\}$$

とする．このとき，次が成立する：

1. $\beta^*_i = \beta_i(^\forall i \le j)$.
2. $\beta^*_j = \beta_j = \alpha^*$ のとき，$\bar{\beta}^*$ は $\bar{\beta}$ の *proper* な部分列になる．
3. $\beta^*_j = \beta_j > \alpha^*$ のとき，$C_{\beta_j} \cap \alpha$ は $C_{\beta_j} \cap \alpha^*$ の *proper initial segment* になる．

Proof. (1). By induction.

$\beta_0 = \beta = \beta^*_0$. $\beta_i = \beta^*_i = \eta$, $\beta_{i+1} \ge \alpha^*$ を仮定する．このとき，$\beta_{i+1} \in C_\eta \setminus \alpha^*$ なので $\beta^*_{i+1} = \min(C_\eta \setminus \alpha^*) = \min(C_\eta \setminus \alpha) = \beta_{i+1}$.

(2). そりゃあそうでしょ．

(3). このとき，$\beta_{j+1} \in C_{\beta_j} \cap \alpha^*$ になり，$\beta_{j+1} \ge \alpha$ なので $C_{\beta_j} \cap \alpha$ は $C_{\beta_j} \cap \alpha^*$ の proper initial segment.

□

系 3.1.1.

$$\rho_0(\alpha,\beta) \ne \rho_0(\alpha^*,\beta) \quad (^\forall \alpha < \alpha^* \le \beta < \omega_1)$$

$\alpha < \beta \le \gamma$ とし，β から α への walk と γ から α への walk を考える．このとき，これらの walk には必ず合流する地点が存在する．

定義 3.1.4. $\alpha \le \beta \le \gamma$ とする．β と γ に対し，α への**最大共通** *walk* $\mathrm{gcw}_\alpha(\beta,\gamma)$ を β から α への walk と γ から α への walk に同時に含まれる最大の順序数と定義する．

Remark 3.1.1. $\alpha \le \beta \le \gamma$，$\xi = \mathrm{gcw}_\alpha(\beta,\gamma)$ とする．このとき，

$$\rho_0(\alpha,\beta) = \rho_0(\xi,\beta)^\frown\rho_0(\alpha,\xi),$$
$$\rho_0(\alpha,\gamma) = \rho_0(\xi,\gamma)^\frown\rho_0(\alpha,\xi)$$

が成立する．

gcw を考えたのはまず，後述する Todorcevic の full lower trace にうまく説明を与えるためである．実際に定義したはいいものの，gcw は理解には良いが，full lower trace ほど使い勝手はよくない．まず，gcw に関して分析をする．

gcw は gcd のアナロジーであり，特に重要なことは，gcd と同様，gcw は互除法のアルゴリズムにしたがって求めることができる点である．アルゴリズムは単純で，$\mathrm{gcw}_\alpha(\beta,\gamma)$ を計算するには，β，γ 双方から α への walk を考える．それぞれの walk を以下のようにして，交互にたどる．まず γ からの walk をたどり，それが β を追い越したら，追い越

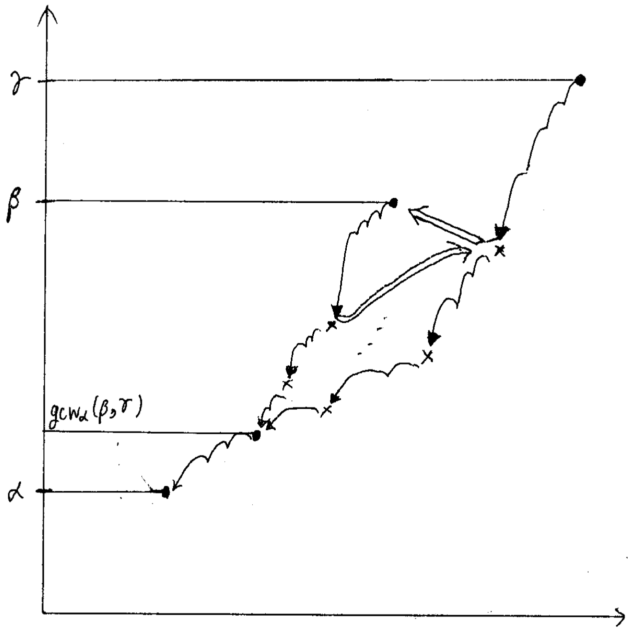


図 3.2 $\mathrm{gcw}_\alpha(\beta,\gamma)$ の計算

した点 γ' を記録する．今度は β から walk をたどり，それが γ' を追い越したら，その点 β' を記録する．今度は γ' から walk をたどり，以下同様の操作を繰り返す．この操作が $\mathrm{gcw}_\alpha(\beta,\gamma)$ に至るまで繰り返すことができ，また有限回の操作で終了することは順序数の整礎性により保証されている．

以下に補題として述べる：

補題 3.1.4. gcw_α は次の性質を満たす：γ_i*(*$i\le n$*)* を γ から α への *walk* とし，$i=\min\{j\mid \gamma_{j+1}<\beta\le\gamma_j\}$ とする．このとき，次が成立する．

$$\mathrm{gcw}_\alpha(\beta,\gamma)=\begin{cases}\beta, & \text{if } \beta=\gamma_i,\\ \mathrm{gcw}_\alpha(\gamma_{i+1},\beta), & \text{if } \beta>\gamma_i.\end{cases}$$

定義 3.1.5 (*full lower trace*)**.** $\alpha\le\beta$ とする．β と α の *full lower trace* $F(\alpha,\beta)$ を以下のように再帰的に定義する：$\beta_i(i\le n)$ を β から α への walk とする．

$$F(\alpha,\beta)=\{\alpha\}\cup\bigcup_{i=0}^{n-1}\bigcup_{\xi\in C_{\beta_i}\cap\alpha}F(\xi,\beta).$$

この $F(\alpha,\beta)$ は明らかに $\alpha\cup\{\alpha\}$ の有限部分集合である．

gcw_α の行き先の候補を明示的に表したものが full lower trace といえる．しかし，α を動かしたとき，gcw_α の振る舞いがよくわからないのに対し，full lower trace はより多くの記述力をもっている：

補題 3.1.5. $\beta\le\gamma$ とする．任意の $\alpha<\beta$ に対し，$\mathrm{gcw}_\alpha(\beta,\gamma)\in F(\beta,\gamma)$ が成り立つ．

さらに，*full lower trace* は *common walk* の在り処を明示的に示す：

$$\rho_0(\alpha,\beta)=\rho_0(\min(F(\beta,\gamma)\setminus\alpha),\beta)^\frown\rho_0(\alpha,\min(F(\beta,\gamma)\setminus\alpha)),$$

$$\rho_0(\alpha,\gamma) = \rho_0(\min(F(\beta,\gamma)\setminus\alpha),\gamma)^\frown\rho_0(\alpha,\min(F(\beta,\gamma)\setminus\alpha)),$$

Proof. 補題の前半は，full lower trace の定義と，gcw_α の計算方法からしたがう (補題 1.3 を運用すればできる．full lower trace が見ているのは γ から α への walk ではなく γ から β への walk であるが，その walk たちは γ からのものが β を追い越すまで一致する!)．

後半に関しては Todorcevic の証明そのままなので注意．証明は帰納法による．$\gamma_1 = \min(C_\gamma\setminus\alpha)$，$\gamma_1' = \min(C_\gamma\setminus\beta)$，$\alpha_1 = \min(F(\beta,\gamma)\setminus\alpha)$ とする．このとき，$\alpha_1\in F(\xi,\beta)$ となる $\xi\in C_\gamma\cap\beta$ が存在するか，もしくは $\alpha_1\in F(\beta,\gamma_1')$ のいずれかである．

まず前半の

$$\rho_0(\alpha,\beta) = \rho_0(\alpha_1,\beta)^\frown\rho_0(\alpha,\alpha_1)$$

を示す．

$\alpha\le\xi\le\beta$ の場合．このときは，帰納法仮定から次がしたがう：

$$\rho_0(\alpha,\beta) = \rho_0(\min(F(\xi,\beta)\setminus\alpha),\beta)^\frown\rho_0(\alpha,\min(F(\xi,\beta)\setminus\alpha)).$$

この場合では $\alpha_1 = \min(F(\xi,\beta)\setminus\alpha)$ なので直接結論がしたがう．

$\alpha\le\beta\le\xi$ の場合．この場合も帰納法仮定を適用すればいい．

後半の

$$\rho_0(\alpha,\gamma) = \rho_0(\alpha_1,\gamma)^\frown\rho_0(\alpha,\alpha_1)$$

を示す．

$\alpha\le\gamma_1<\beta$ の場合．このとき，$\gamma_1\in C_\gamma\cap\beta$ なので $F(\gamma_1,\beta)\subseteq F(\beta,\gamma)$．そこで，$\alpha_2 = \min(F(\gamma_1,\beta)\setminus\alpha)$ とおけば，前述の包含から $\alpha_2\ge\alpha_1$．帰納法仮定から，

$$\rho_0(\alpha,\gamma_1) = \rho_0(\alpha_2,\gamma_1)^\frown\rho_0(\alpha,\alpha_1).$$

以上のことから，walk: $\gamma\to\alpha$ は $\gamma\to\gamma_1\to\alpha_2\to\alpha_1\to\alpha$ と分解する．このことから，walk: $\gamma\to\alpha_1\to\alpha$ がわかる．

$\alpha\le\beta\le\gamma_1$ の場合．この場合も前の場合と同じような議論で証明できる． □

また，このことから以下がしたがう：

補題 3.1.6. $\alpha\le\beta\le\gamma$，$F_\beta = F(\alpha,\beta)$，$F_\gamma = F(\alpha,\gamma)$ とする．もし，$F_\beta = F_\gamma$ かつ，$\rho_0(\_,\beta)\restriction F_\beta = \rho_0(\_,\gamma)\restriction F_\gamma$ ならば，

$$\rho_0(\_,\beta)\restriction\alpha = \rho_0(\_,\gamma)\restriction\alpha$$

が成り立つ．

Proof. 任意の $\epsilon<\alpha$ に対し，$\xi_{\epsilon\beta} = \min(F_\beta\setminus\epsilon)$，$\xi_{\epsilon\gamma} = \min(F_\gamma\setminus\epsilon)$ とおくと，仮定から，

$$\xi_{\epsilon\beta} = \xi_{\epsilon\gamma}$$

が成り立つので，これを ξ_ϵ とおく．

補題から

$$\rho_0(\epsilon,\beta) = \rho_0(\xi_\epsilon,\beta)^\frown\rho_0(\epsilon,\xi_\epsilon),$$
$$\rho_0(\epsilon,\gamma) = \rho_0(\xi_\epsilon,\gamma)^\frown\rho_0(\epsilon,\xi_\epsilon).$$

ここで，$\xi_\epsilon\in F_\beta = F_\gamma$ なので，仮定から両式の右辺は一致する．したがって，$\rho_0(\epsilon,\beta) = \rho_0(\epsilon,\gamma)$ が成り立つ． □

上の命題は $\rho_0(\_,\beta) \restriction \alpha$ の形の関数の数が少ないことを意味している．実際，α を fix したときの $\rho_0(\_,\beta) \restriction \alpha$ の可能性は $F_\beta \subseteq_{fin} \alpha+1$ とその上での ρ_0 関数の動きのみで記述できるので，それは可算通りしかない．

ρ_0 の性質は以上の通りになる．以下では他の ρ-function たちを定義する：

定義 3.1.6 (*maximal weight function*)**.** $\alpha \leq \beta$ に対し，その *maximal weight* $\rho_1(\alpha,\beta)$ を，β から α への walk における lower traces $C_{\beta_i} \cap \alpha$ の長さの max の値として定義する．

定義 3.1.7 (*number of steps function*)**.** $\alpha \leq \beta$ に対し，その *number of steps* $\rho_2(\alpha,\beta)$ を β から α への walk の長さで定義する．

定義 3.1.8 (*last step function*)**.** $\alpha \leq \beta$ に対し，その *last step* $\rho_3(\alpha,\beta)$ は walk の last step における lower trace の weight が maximal weight に一致するか否かをコードするとする．すなわち，β から α への walk を $\beta_i (i \leq n)$ としたとき，

$$\rho_3(\alpha,\beta) = \begin{cases} 1, & \textit{if } |C_{\beta_{n-1}} \cap \alpha| = \rho_2(\alpha,\beta) \\ 0, & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

ρ-function のような関数 $a : [\omega_1]^2 \to X$ を X による ω_1 の**グラフ彩色**という．彩色関数の性質として重要なのは *finite-to-one property* と *coherency* である．

定義 3.1.9. ρ_* を $[\omega_1]^2$ 上で定義された関数とする．

1. ρ_* が *finite-to-one* であるとは任意の x と $\beta < \omega_1$ に対して，

$$\{\alpha < \beta \mid \rho_*(\alpha,\beta) = x\}$$

が有限であることをいう．

2. ρ_* が *coherent* であるとは，任意の $\beta \leq \gamma$ に対して，

$$\{\xi \leq \beta \mid \rho_*(\xi,\beta) \neq \rho_*(\xi,\gamma)\}$$

が有限であることをいう．

例 3.1.1. ρ_0 は *coherent* でない．

Proof. $\beta < \gamma$ を極限順序数とする．$C_\gamma \cap \beta$ の order type を n とする．C_β の $n+1$ 番目の要素を α^* とする．このとき，任意の $\alpha < \beta$ に対して，それが α^* より大きければ，$C_\beta \cap \alpha$ の order type は $n+1$ 以上になる．その一方で $\alpha < \beta$ をどのように動かしても $C_\gamma \cap \alpha$ の order type は n を超えることはない．以上から，α^* より大きい任意の $\alpha < \beta$ に対して

$$\rho_0(\alpha,\beta) \neq \rho_0(\alpha,\gamma)$$

が成り立つ．これは明らかに coherency に反する． □

例 3.1.2. ρ_1 は *finite-to-one* かつ *coherent* である．

Proof. $\beta \leq \gamma$ に関する帰納法による．

まずは finite-to-one に関して．$n < \omega$ をとる．任意に無限集合 $A \subseteq \beta$ をとる．この中から，$\rho_1(\eta, \beta) > n$ となる η を見つけることが出来ればいい．A はある $\alpha \leq \beta$ で cofinal であると仮定してもいい．

$\alpha = \beta$ のときは，first step の lower trace を動かせばいい．実際，十分大きい $\eta \in A$ を $|C_\beta \cap \eta| > n$ となるようにとればいい．

$\alpha < \beta$ のときは $\beta_1 = \min(C_\beta \setminus \alpha)$ とて β_1 に対し帰納法仮定を適用する．そのようにすれば，$\rho_1(\xi, \beta_1) > n$ となる $\xi \in A$ がとれる．ρ_1 の定義の仕方から，$\rho_1(\xi, \beta) \geq \rho_1(\xi, \beta_1) > n$ であるので結論がしたがう．

次に，coherency を示す．

仮に $A = \{\xi < \beta \mid \rho_1(\xi, \beta) \neq \rho_1(\xi, \gamma)\}$ が無限であったとし，$\mathrm{otp}(A) = \omega$ としていい．$\alpha = \sup A$，$\gamma_1 = \min(C_\gamma \setminus \alpha)$ とおく．また，$n = |C_\gamma \cap \alpha|$ とおく．finite-to-one の性質から，

$$B = \{\xi \in A \mid \xi > \max(C_\gamma \cap \alpha) \text{ } \mathit{and} \text{ } \rho_1(\xi, \gamma_1) > n\}$$

とおくと，B は A と有限部分を除いて一致する．一方で，任意の $\xi \in B$ に対して，

$$\rho_1(\xi, \gamma) = \max\{n, \rho_1(\xi, \gamma_1)\} = \rho_1(\xi, \gamma_1)$$

である．$\gamma_1 \leq \beta$ に対して帰納法仮定を適用すれば，十分大きい $\xi \in B$ に対して $\rho_1(\xi, \gamma_1) = \rho_1(\xi, \beta)$ が成り立つので合わせて，

$$\rho_1(\xi, \beta) = \rho_1(\xi, \gamma_1) = \rho_1(\xi, \gamma)$$

で $\xi \in B \subseteq A$ に反する．　□

例 3.1.3. ρ_3 は *coherent* である．

全順序集合による彩色から，新しい全順序を導くことができる．

定義 3.1.10 (coloring→line)**.** $(X, <_X)$ を全順序集合，$\rho_* : [\omega_1]^2 \to X$ を彩色関数とする．このとき，ω_1 上に全順序 $<_*$ を以下のように定義する：

$$\alpha <_* \beta \iff \rho_*(\delta_{\alpha\beta}, \alpha) <_X \rho_*(\delta_{\alpha\beta}, \beta),$$

但し，$\delta_{\alpha\beta} = \min\{\eta \leq \min(\alpha, \beta) \mid \rho_*(\eta, \alpha) \neq \rho_*(\eta, \beta)\}$.

この全順序 $(\omega_1, <_*)$ を $C(\rho_*)$ と表記する．

以下の全順序の性質を導く点で重要である：

定理 3.1.1 (Todorcevic)**.** $X \cong 2, 3, \ldots,$ *or* ω とする．このとき，X による彩色 ρ_* が *finite-to-one* かつ *coherent* ならば，$C(\rho_*)^2$ は可算個の *chain* で覆われる．

Proof. $\alpha \leq \beta$，$\gamma \leq \delta$ とする．以下では簡便のため関数 $\rho_*(\_, \alpha) : \alpha + 1 \to X$ を $\rho_{*\alpha}$ と書く．

$$\mathrm{diff}(\alpha, \beta) = \{\xi \leq \alpha \mid \rho_*(\xi, \alpha) \neq \rho_*(\xi, \beta)\}$$

とおく．coherency から $\mathrm{diff}(\alpha, \beta)$ は finite.

次に

$$n_{\alpha\beta} = \max\{\rho_*(\xi, \alpha), \rho_*(\xi, \beta) \mid \xi \in \mathrm{diff}(\alpha, \beta)\},$$

$$F_{\alpha\beta} = \{\xi \le \alpha \mid \max\{\rho_*(\xi,\alpha), \rho_*(\xi,\beta)\} \le n_{\alpha\beta}\}$$

とおく．finite-to-one property から，$F_{\alpha\beta}$ は finite でかつ定義から $\mathrm{diff}(\alpha,\beta) \subseteq F_{\alpha\beta}$ が成り立つ．

$C(\rho_*)^2$ をどのように分割するかについては，以下の関数を考える：$c : C(\rho_*)^2 \to \omega \times \omega^{<\omega} \times \omega^{<\omega}$ を

$$c(\alpha,\beta) = (n_{\alpha\beta}, \rho_{*\alpha}[F_{\alpha\beta}], \rho_{*\beta}[F_{\alpha\beta}])$$

で定義する．ここで，$\rho_{*\alpha}[\{\xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_n\}]$ は有限列 $\langle \rho_{*\alpha}(\xi_0), \ldots, \rho_{*\alpha}(\xi_n)\rangle$ とする．

c によって，$C(\rho_*)^2$ は $\bigcup c^{-1}(n,\sigma,\tau)$ と可算個に分割される．したがって，次のこと (つまり分割のそれぞれが chain になること) を示せば証明は終わる：

Claim 3.1.1. $\alpha <_* \gamma$ で $n_{\alpha\beta} = n_{\gamma\delta} = n$，$\rho_{*\alpha}[F_{\alpha\beta}] = \rho_{*\gamma}[F_{\gamma\delta}]$，$\rho_{*\beta}[F_{\alpha\beta}] = \rho_{*\delta}[F_{\gamma\delta}]$ ならば $\beta <_* \delta$ な成り立つ．

まず，$\xi_{\alpha\gamma} = \min\{\xi \le \alpha \mid \rho_*(\xi,\alpha) \ne \rho_*(\xi,\gamma)\}$ とおき，$\xi = \min\{\xi_{\alpha\gamma}, \xi_{\beta\delta}\}$ とおく．

Claim 3.1.2. $\xi_{\alpha\gamma} = \xi_{\beta\delta} = \xi$.

まず上の式を確かめる．まず，$F_{\alpha\beta} \cap \xi_{\alpha\gamma} = F_{\gamma\delta} \cap \xi_{\alpha\gamma}$ が成り立つ．実際，$\eta \in F^c_{\alpha\beta} \cap \xi_{\alpha\gamma}$ ならば (η は α, β の diff に入っていないので)$\rho_*(\eta,\alpha) = \rho_*(\eta,\beta) > n$．$\eta < \xi_{\alpha\gamma}$ なので $\rho_*(\eta,\alpha) = \rho_*(\eta,\gamma)$．このことから，$\rho_*(\eta,\gamma) > n$ がしたがうので，$\eta \in F^c_{\gamma\delta} \cap \xi$．逆の包含も同様．また，同様にして $F_{\alpha\beta} \cap \xi_{\beta\delta} = F_{\gamma\delta} \cap \xi_{\beta\delta}$ も成り立つ．

また，$F_{\alpha\beta} \cap \xi_{\alpha\gamma} = F_{\gamma\delta} \cap \xi_{\alpha\gamma}$ からは $\xi_{\alpha\gamma} \le \xi_{\beta\delta}$ がしたがう．実際，任意の $\eta < \xi_{\alpha\gamma}$ に対し，もしそれが $F_{\alpha\beta}$ の中に入っているならば，$\rho_{*\alpha}$ と $\rho_{*\gamma}$ の F 上での一致から

$$\rho_{*\beta}(\eta) = \rho_{*\alpha}(\eta) = \rho_{*\gamma}(\eta) = \rho_{*\delta}(\eta).$$

逆に $\eta < \xi_{\alpha\gamma}$ が $F_{\alpha\beta}$ に入っていなければ，それは $\mathrm{diff}(\alpha,\beta)$，$\mathrm{diff}(\gamma,\delta)$ のどちらにも入っていないので，$\rho_{*\beta}(\eta) = \rho_{*\delta}(\eta)$ が成り立つ．合わせて，$\rho_{*\beta} \restriction \xi_{\alpha\gamma} = \rho_{*\delta} \restriction \xi_{\alpha\gamma}$ がしたがう．このことは，$\xi_{\beta\delta}$ の定義から $\xi_{\alpha\gamma} \le \xi_{\beta\delta}$ を導く．

逆の不等式 $\xi_{\beta\delta} \le \xi_{\alpha\gamma}$ も同様．

このことを利用して，$\rho_*(\xi,\beta) < \rho_*(\xi,\delta)$ を示す．4 つの場合に分ける：

Case 1: $\xi \in F_{\alpha\beta} \cap F_{\gamma\delta}$ のとき．この場合は起こらない．

このとき，$F_{\alpha\beta} \cap \xi = F_{\gamma\delta}\xi$ であるから，仮定から $\rho_{*\alpha}(\xi) = \rho_{*\gamma}(\xi)$ が成り立つ．これは $\alpha <_* \gamma$ に反する．

Case 2: $\xi \in F_{\alpha\beta} \setminus F_{\gamma\delta}$ のとき．

このとき，$\xi \notin F_{\gamma\delta}$ から $\rho_{*\gamma}(\xi) = \rho_{*\delta}(\xi) > n$．また，$\xi \in F_{\alpha\beta}$ から $\rho_{*\beta}(\xi) \le n$．合わせて，$\rho_{*\beta}(\xi) \le n < \rho_{*\delta}(\xi)$ となる．

Case 3: $\xi \in F_{\gamma\delta} \setminus F_{\alpha\beta}$ のとき．この場合は起こらない．

実際，Case 2 のときのようにすれば，$\rho_{*\alpha}(\xi) > \rho_{*\gamma}(\xi)$ が導かれ仮定に反する．

Case 4: $\xi \notin F_{\alpha\beta} \cup F_{\gamma\delta}$ のとき．

このとき，ξ は $\mathrm{diff}(\alpha,\beta)$，$\mathrm{diff}(\gamma,\delta)$ のどちらにも入っていないので，

$$\rho_{*\beta}(\xi) = \rho_{*\alpha}(\xi) < \rho_{*\gamma}(\xi) = \rho_{*\delta}(\xi)$$

がしたがう．

以上ですべての証明は終わった． □

3.2 Walks and Trees

以上が基本的な walk theory の話である．次は walk と木の関係について解説する．

定義 3.2.1 (*Trees*)**.** $T = (T, \leq_T)$ を半順序とする．T が木であるとは，任意の $x \in T$ について，$\mathrm{pred}(x) = \{y \in T \mid y <_T x\}$ が $<_T$ で整列されていることを指す．この時の集合の order type を x の高さと言い，$\mathrm{ht}(x)$ で表す．高さ α の node 全体を α 水準いい，T_α で表す．

木 T の高さとは $T_\alpha =$ となる最小の順序数 α のこと．また，T が ω_1-木であるとはそれが高さ ω_1 で，かつどの可算水準も可算個の node しかもたないことを言う．

木の定義は以上であるが，木が横にたくさん並んだ森のような構造も定義上木と呼ぶ．但し，これから実際に使用する木は根は一意に定まる，まさに一本の木であり，特によく考える木は自然に常に可算個に分岐する木 $\omega^{<\omega_1}$ の部分木とみなすことが可能である．

定義 3.2.2 (*Aronszajn* 木)**.** 木 T が *Aronszajn* 木であるとは，T が cofinal chain を持たない ω_1-木であることをいう．ここで C が chain とはどの $x, y \in C$ も $x \leq y$ もしくは $y \leq x$ となることをいう．T の高さがある極限順序数 α のとき，chain C が T で cofinal であるとは $\{\mathrm{ht}(x) \mid x \in C\}$ が α のなかで cofinal であることを指す．

König の枝の補題によって，高さが可算の有限分岐の木には必ず cofinal chain がとれる．しかし，非可算の場合は一般にうまくいくとは限らない．実際に，cofinal chain をとろうと帰納的に $x_\alpha \in T_\alpha$ をとろうとしても，今までにとれた $x_\beta (\beta < \alpha)$ に対しそれの上にある node x_α が常にある保証は (T が完全 2 分木でもない限り) ない．実際に，うまい戦略をとらなければ “行き止まり” に到達してしまう可能性があるので，この帰納的構成には極限 step で失敗する．

どんな戦略をとろうとも cofinal chain は絶対にとれない ω_1 木というものが Aronszajn 木である．本当にそのような木があるかといえば，実際に存在するのである．ある意味で，ω と ω_1 とで基数の特徴の決定的な違いが次の命題にあらわれている：

定理 3.2.1 (Aronszajn)**.** *Aronszajn* 木は存在する．

この定理は Aronszajn によって示されたが，その後 minimal walk による Aronszajn 木の構成が可能であることが判明した．以下，ρ-function たちから導かれる木を定義する：

定義 3.2.3 (coloring→tree)**.** $\rho_* : [\omega_1]^2 \to X$ を彩色とする．このとき，

$$T(\rho_*) = \{\rho_{*\beta} \restriction \alpha \mid \alpha \leq \beta < \omega_1\}$$

とし，$T(\rho_*)$ の順序 $\leq_T$ は $\sqsubseteq$ によって定める．

命題 3.2.1. $T(\rho_0)$ は *Aronszajn* 木である．

Proof. まず，$T(\rho_0)$ が木になることについては，各要素 $t \in T$ の高さが $\mathrm{dom}(t)$ に一致することを考えれば明らかである．また，このことから，$T(\rho_0)$ の高さは ω_1 になることがわかる．

$T(\rho_0)$ が ω_1-木になる (つまり，各 level が高々可算になる) ことは，前節の補題による．

$T(\rho_0)$ が cofinal branch[*4]をもたないことに関しては，各 $\rho_{0\alpha}$ が可算集合 $\omega^{<\omega}$ への一対一写像であることからしたがう．実際，もし $T(\rho_0)$ は cofinal branch をもてば，ある関数 $b : \omega_1 \to \omega^{<\omega}$ が存在して，任意の $\alpha < \omega_1$ に対して $\beta > \alpha$ が存在して $\rho_{0\beta} \restriction \alpha = b \restriction \alpha$ が成り立つ．つまり b は一対一写像 $\rho_{0\beta}$ たちの貼りあわせであるので b 自体もまた一対一であるが，非可算集合 ω_1 から可算集合 $\omega^{<\omega}$ への一対一写像は存在しないので矛盾する． □

定理の証明で $\rho_{0\alpha}$ が一対一であるという重要な性質を利用した．この性質を以下に分離する：

定義 3.2.4. ω_1-木 T が特殊であるとはある可算集合 X と関数 $a : T \to X$ が存在して，$x, y \in T$ について x と y が比較可能なら必ず a によるそれぞれの値が異なることをいう．

系 3.2.1. $T(\rho_0)$ は特殊な *Aronszajn* 木である．

Remark 3.2.1. すべての Aronszajn 木は特殊とは限らないし特殊でない Aronszajn 木が存在するとも限らない (どちらも ZFC では証明できない)．例えば，後述する $\mathrm{MA}_{\aleph_1}$ という集合論の公理を仮定すればすべての Aronszajn 木は特殊になる．

3.3 Trees and Lines

$L = (L, \leq)$ を全順序とする．今後直線と言った場合，全順序構造を指すものとする．$-L$ と書いたら，L の reverse order$(L, \geq)$ のことを指すこととする．以下では非可算直線について主に考察する．

定義 3.3.1. L を非可算直線とする．L が *Aronszajn* **直線**であるとは, それが ω_1，$-\omega_1$，非可算可分直線のいずれも部分順序として含まないことをいう．

定義 3.3.2 (tree→line)**.** T が 2 分木であるとは，それがある完全 2 分木 $2^{<\alpha}$[*5]に埋め込めることをいう．

2 分木 T を $2^{<\alpha}$ の部分木とみなし，その埋め込みに対する辞書式順序 $\leq_{lex}$ を

$$x <_{lex} y \iff x \sqsubset y \quad or \quad x(\Delta(x,y)) < y(\Delta(x,y))$$

によって定める．ここで，$\Delta(x,y) = \min\{\xi \mid x(\xi) \neq y(\xi)\}$ のこと．

このとき $(T, \leq_{lex})$ は直線である．

定義 3.3.3 (line→tree)**.** L を直線とする．L の *binary partition tree* とは以下の条件を満たす木 T のこと：

1. T の各 node は L の空でない convex set で，$T_0 = \{L\}$.
2. $I \in T_\alpha$ の immediate successor は，I の分割 I_0, I_1 の 2 つ．ここで，I_0 は I の left partition で I_1 は right partition．但し，$|I| = 1$ の時は，I は T の maximal node として拡大しない．

[*4] branch とは極大な chain のこと．

[*5] $2^{<\alpha}$ は写像の拡大によって半順序構造が入り，これを木とみなしている．

3. α が極限順序数のとき，$I \in T_\alpha$ と $I = \bigcap b$ となる cofinal branch $b \subseteq T \restriction \alpha$ が存在することは同値.
4. $I \in T$ が maximal node ならば必ず $|I| = 1$ となる.

任意の直線に対して，その binary partition tree は存在する.

定理 3.3.1. *1. 2 分木 T が Aronszajn ならば $(T, \leq_{lex})$ は Aronszajn 直線である.*

2. L が Aronszajn 直線ならば，対応する binary partition tree は Aronszajn 木である.

Proof([4] を参照). $(1 \Rightarrow 2)$: $L_T = (T, \leq_{lex})$ とする.

Case 1. L_T は ω_1 の isomorphic copy を含まない.

実際，$X \subseteq L_T$ が ω_1 と同型だとする．このとき，任意の $\alpha < \omega_1$ に対し，$\{y \in X \mid y >_T x\}$ が非可算となる $x \in T_\alpha$ はひとつしかない．実際，もし 2 つそのような x, x' が存在したとする．一般性を失わず，$x <_{lex} x'$ とすると，$X \cap (-\infty, x')$ は非可算となる (辞書式順序の性質)．しかし，仮定では X は ω_1 であったのでこの集合は ω_1 のある proper initial segment と同型である．ω_1 の proper initial segment はすべて可算なので，これはおかしい.

ゆえに，$x_\alpha \in T_\alpha$ で木で x より上にある X の要素が非可算になるようなものをひとつに定めることができる．すると，x_α たちは互いに比較可能でなければならず，故に $\{x_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ は T の非可算濃度の chain になる．これは T が Aronszajn であることに反する.

同様の議論で，L_T は $-\omega_1$ も含まない.

Case 2. L_T が可分な非可算直線を含まない.

実際に，$X \subseteq L_T$ が可分であったとして，その可算な dense set $D \subseteq X$ をとる．D は可算なので $\alpha = \sup\{\mathrm{ht}(x) \mid x \in X\}$ も可算．X は非可算でかつ T_α は可算なので，ある $x \in T_\alpha$ で $\{y \in X \mid y >_T x\}$ が非可算になるようなものが少なくともひとつ存在する．そのような x をひとつとり，x の上に X から比較不可能な 2 つの node y_0, y_1 をとる．一般性を失わずに $y_0 <_{lex} y_1$ とする．木における y_0 より上の node はすべて直線 L_T における開区間 (x, y_1) に含まれる．しかし，height の制限から，D の要素はひとつもこの区間に入らない．これは D の density に反する.

$(2 \Rightarrow 1)$: L の binary partition tree を T^L とおく．1 を証明するには，以下の 2 つのことを証明すれば良い：

Claim 3.3.1. *1. T^L は非可算の鎖をもたない.*

2. 任意の $\alpha < \omega_1$ について $|T^L_\alpha| \leq \omega$ で，さらに，$|L| \leq |T^L|$.

(1) については ω_1，$-\omega_1$ が埋め込めないことに依る．実際，もし T^L が非可算の鎖 $B \subseteq T^L$ をもっていたとする．B は下向きに閉じていると考えて良い．各 $\alpha < \omega_1$ に対して，$B \cap T^L_\alpha = \{I_\alpha\}$ とする．I_α は T^L の node なので L のある空でない convex set である．任意の α で $I_{\alpha+1}$ は I_α の left partition か right partition であるかのいずれかである．したがって，

(*a*) $J_0 = \{\alpha < \omega_1 \mid I_{\alpha+1}$ が *left part.* になる $\}$ が非可算か，もしくは

(*b*) $J_1 = \{\alpha < \omega_1 \mid I_{\alpha+1}$ が *right part.* になる $\}$ が非可算

のいずれかが成り立つ．いずれの場合 $(i=0,1)$ でも，各 $\alpha \in J_i$ に対しある $x_\alpha \in I_\alpha \setminus I_{\alpha+1}$ がとれる．$X_i = \{x_\alpha \mid \alpha \in J_i\}$ とおく．このとき，Case (a) の場合は，X_0 は $-\omega_1$ と同型になり，Case (b) の場合は X_1 は ω_1 と同型になる．いずれにしても，これらは L が Aronszajn 直線であることに反する．

次に，(b) の前半について考える．(b) でなかったとして，ある可算順序数 α で T^L_α が非可算になるような最小のものをとる．このような順序数 α は必ず極限順序数でなければならないことに注意する．このとき，$T^L \restriction \alpha$ は可算集合である．ここから矛盾を出すために，L 上に非可算な可分部分直線を構成する．まず，ベースとして，各 $I \in T_\alpha$ から $x_I \in I$ を一つずつ選ぶ．この x_I からなる非可算集合が可分になるようにあたらしく要素を加えていく．まず，任意の $I \in T^L \restriction \alpha$ について，L は Aronszajn 直線だから I はある coinitial かつ cofinal な可算部分集合 $K_I \subseteq I$ をもつ．各 K_I たちは可算で $T^L \restriction \alpha$ は可算なので，その和 $K = \bigcup_I K_I$ もまた可算である．そして，

$$X = \{x_I \mid I \in T^L_\alpha\} \cup K$$

を定める．X はこのとき，非可算可分直線になる．実際，非可算なのは T^L_α が非可算という仮定と各 $I \in T^L_\alpha$ が互いに disjoint であることからしたがう．あとは K が X の稠密部分集合であることを示せばいい．

任意に $x_I, x_J \in X$ をとる ($x_I < x_J$ としてもいい)．示すべきは，$(x_I, x_J) \cap X$ が空でないならば，$(x_I, x_J) \cap K \neq \emptyset$ であること．$x_I \in I$，$x_J \in J$ であり，binary partition tree の定義から，I, J はともに，ある $T^L \restriction \alpha$ の cofinal branch の共通部分でなければならない．それらの branch は異なるのである $I^* \in T^L \restriction \alpha$ で $I \cup J \subseteq I^*$ だが，の left partition I^*_0 は J と disjoint，right partition I^*_1 は I と disjoint になるようなものがとれる．このとき，I^* は区間 (x_I, x_J) を含む．ゆえに，$(x_I, \infty) \cap I^*_0$ もしくは $(-\infty, x_J) \cap I^*_1$ のいずれか一方は必ず空でない．したがって，これに K_I たちの coinitiality もしくは cofinality を適用すれば (x_I, x_J) のなかに K の要素がとれる．以上は X が可分であることを示す．L は Aronszajn 直線であったので矛盾が導かれた．

最後に，(b) の後半の $|L| \leq |T^L|$ に関しては，L の点と木 T^L の maximal node は一対一に対応することに注意すればいい．実際，binary partition tree の定義から，node $I \in T^L$ が maximal ならば I は一点集合でなければならない．このことを利用すれば，L と T^L の maximal node 全体の集合の一対一対応を得ることは難しくない．

以上ですべての証明が終わった． □

以上の定理から，Aronszajn 直線という一見して ad-hoc な概念が Aronszajn 木という自然な概念に還元されるという点で重要であろう．特に，walk から自然に構成された Aronszajn 木から Aronszajn 直線が構成できる．実は初節で構成した $C(\rho_*)$ は強い意味で Aronszajn 直線になるのだが，そのことは次節で示す．

3.4 Basis theorem

以下では walk theory の応用の一つとして，basis problem について解説する．まず，数学において具体的な構造というものはとりわけ重要で，それらによって構造一般を分類したり，ある種の表現を得ようという営みは広く行われている．

例えば位相空間を見てみれば，Sorgenfrey 直線，long line，$\beta\mathbb{N}$ など様々な具体的な構造が発見されている．

今，直線構造について考えてみる．有限の直線は濃度により完全に分類できる．可算無限濃度の直線はどうか．具体的な直線としては，ω，$-\omega$，有理数 $\mathbb{Q}$ がある．一般の可算無限直線がどのような構造になっているか完全に記述することは難しい．しかし，部分順序について情報は簡単である．すべての可算無限直線は必ず ω もしくは $-\omega$ を部分順序として含んでいる．[*6]以上の観点を踏まえ，*basis* の概念を定義する．

定義 3.4.1. $\mathcal{C}$ を非可算直線のクラス，$\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ とする．$\mathcal{D}$ が $\mathcal{C}$ の *basis* であるとは，任意の $L \in \mathcal{C}$ に対し，ある $K \in \mathcal{D}$ が L のある部分順序の isomorphic copy としてとれることをいう．

可算無限濃度の直線の basis は上に記述した通り．

例 3.4.1. $\mathcal{C}$ を非可算整列順序からなるクラスとする．このとき，$\{\omega_1\}$ は $\mathcal{C}$ の basis になる，つまり，非可算な well-order のクラスは one element basis をもつ．

順序 L が反整列であるとは，$-L$ が整列であることとすると，$\{-\omega_1\}$ は非可算な反整列順序のクラスの one element basis になる．

定義 3.4.2. 非可算直線 X が *σ-dense* であるとは，X の任意の空でない開区間の濃度が $\aleph_1$ となることを指す．

例 3.4.2. $\mathcal{C}$ を $(\mathbb{R}, \leq)$ の非可算部分順序からなるクラスとする．このとき，$\mathcal{D}$ を $\mathbb{R}$ の σ-dense な部分集合からなるクラスとすると，$\mathcal{D}$ は $\mathcal{C}$ の basis になる．さらに言えば，$\mathcal{D}$ は可分な非可算直線からなるクラスの basis にもなる．

さらに，PFA を仮定すると，Baumgartner の結果 [2] から σ-dense な実数の部分集合はすべて同型になるので，$\mathcal{C}$ は one element basis をもつ．

Proof. $X \subseteq \mathbb{R}$ を濃度 $\aleph_1$ の集合とする．$x \in X$ が X の *condensation point* であることを任意の x の近傍 V に対して $X \cap V$ が非可算になることと定義する．このとき，X の condensation point 全体から成る集合を X' とおくと，$|X \setminus X'| \leq \omega$ となるので，X' は X の σ-dense な部分集合になる． □

Remark 3.4.1. 直線が可分であるとは，それが順序位相の下で可分な位相空間になることをさす．

任意の非可算可分直線は $\mathbb{R}$ のある非可算部分集合の copy を含む．実際，任意の非可算かつ可分な直線 X をとったとき，前証明のように condensation point 全体の集合 $X' \subseteq X$ を X の順序位相の下で考えることができる．このとき，X' は σ-dense になる．X' は端点を持たないと仮定してもよく，また X' もまた可分なのでその可算な dense

[*6] 証明は，Ramsey の定理 (任意の可算無限グラフは無限クリークを持つかもしくは無限独立集合を持つかのいずれかである) の証明に似ている．つまりは，点を次々に取っていって取り終わった後で正方向の部分列もしくは負方向の部分列を抽出するというもの．ここで Ramsey を持ち出すのは多少大袈裟な議論ではあるが，このような視点は極めて重要であるように感じる．実際，ω_1 はこのような性質も持たず，Ramsey タイプの命題の強い否定を導くということを示すことにも walk は活躍する．非可算 Ramsey が成立しないことは非可算構造解析において重大な障害ではあるが，しかし一方で豊かな数学的構造の源でもある．

subset $D \subseteq X'$ をとることができる．このとき D はそれ自体で端点のない自己稠密な順序であり，したがって Cantor の定理から D は有理数直線 $\mathbb{Q}$ と同型である．

そうすると，X' から $\mathbb{R}$ への順序埋め込みを以下のように定義することができる：任意の $x \in X$ に対し，$L_x = \{p \in D \mid p < x\}$ とおくと，L_x は $D \cong \mathbb{Q}$ によって $\mathbb{Q}$ のある Dedekind cut の左組に対応する．この対応 : $x \mapsto L_x \in \mathbb{R}$ によって定義された写像は埋め込みになる．したがって，X' は $\mathbb{R}$ のある部分順序と同型になる．

以上のことから，$\mathbb{R}$ の非可算部分順序のクラスの basis は実は非可算可分直線のクラスの basis になっていることがわかる．

以上のことから，具体的な非可算直線のクラスはある程度 canonical な basis を持つことがわかる．また，ω_1，$-\omega_1$，$X \in [\mathbb{R}]^{\aleph_1}$ は互いに互いを埋め込めないので，これ以上 basis を簡単にすることはできない．このような irreducibility を以下に定式化する：

定義 3.4.3. 直線 L，K に対し，$L \leq K$ を L から K への狭義単調増加関数が存在することと定義する．全順序集合間ではこのような関数は順序埋め込みになっていることに注意する．

また，L がクラス $\mathcal{C}$ で *minimal* であるとは $K \leq L$ かつ $L \not\leq K$ となる $K \in \mathcal{C}$ が存在しないことと定義する．

命題 3.4.1. ω_1，$-\omega_1$ はそれぞれ非可算直線全体のクラスで *mininal* である．

さらに PFA を仮定すれば，*σ-dense set* $X \subseteq \mathbb{R}$ も *minimal* である．

Proof([4] を参照)．前半は簡単．$-\omega_1$ も同様なので ω_1 のみについて示す．実際にもし $X \leq \omega_1$ を非可算直線として，$f : X \to \omega_1$ を狭義単調増加関数とすると f による X の像は非可算な X と同型な順序になる．この像は ω_1 の部分集合なのでこれを increasing order で数え上げれば，ω_1 と同型になる．つまり，$X \leq \omega_1$ ならば $X \cong \omega_1$ が成り立つ．

PFA の下で σ-dense set がすべて同型になるという事実をを用いる．実際，非可算直線 Y が $Y \leq X$，つまり σ-dense な X に埋め込まれていたら，Y もまた可分性をもつ (可分性は距離空間では subspace に遺伝する)．したがって，Y は別の σ-dense な X' を部分としてもつが，これは X と同型になるのでこの同型によって X は Y に埋め込まれる．このことは $X \leq Y$ を示す． □

したがって，非可算全順序は以下の 4 つのクラスに decompose される：整列順序全体の WO，反整列順序全体の AWO，非可算可分直線全体の SEP と Aronszajn 直線の全体の $\mathcal{A}$．この内，前の 3 つに関しては前述のことから basis は完全に判明している．

Aronszajn 直線の特別なものとして重要な概念が Countryman 直線 (※ Countryman は人名．[3] において他ならぬ Coutryman 直線の概念を定式化した人である) である：

定義 3.4.4. 非可算直線 L が *Countryman* **直線**であるとは，その Cartesian square L^2(半順序は $(x, y) \leq (z, w)$ iff $x \leq z$ かつ $y \leq w$ で定義される) が可算個の chain で覆われることをいう．

（ここで一般に chain とは，半順序集合における互いに比較可能な部分集合のことを指す．直線に任意の 2 要素は常に比較可能だが，半順序ではそうとは限らない．）

命題 3.4.2. *Countryman* 直線は *Aronszajn* 直線である．

Proof. ω_1，$-\omega_1$，非可算可分直線 X のいずれも Countryman でないことを示せばいい．

Case 1. ω_1 は Countryman でない．

$\omega_1^2 = \bigcup_n C_n$，$C_n$ は chain とする．任意の $\alpha < \omega_1$ に対し，y-座標が α になるような要素全体を X_α とする．X_α は非可算で，かつ $X_\alpha = \bigcup_{n<\omega} C_n \cap X_\alpha$ と可算個の和集合で書けているので，このなかの少なくともひとつは非可算でなければならない．このとき，$C_n \cap X_\alpha$ が非可算になるような $n = n_\alpha < \omega$ が少なくとも一つ存在する．写像 $f : \omega_1 \to \omega$ を $\alpha \mapsto n_\alpha$ とすると，この写像は単射にはならない．したがって，ある異なる $\alpha < \beta$ がとれて，$n_\alpha = n_\beta$ が成立する．

つまり，ある chain C_n は異なる x-座標に平行な直線上に同時に非可算個の要素を持つことになる．これは C_n が chain であることに矛盾する．実際，$(\delta, \beta) \in C_n \cap X_\beta$ を適当にとり，次にとる $(\gamma, \alpha) \in C_n \cap X_\alpha$ で γ を δ 以上にとれば，$\alpha < \beta$ かつ $\gamma \geq \delta$ となる．このような (γ, α)，(δ, β) は比較可能でない．

Case 2. $-\omega_1$ は Countryman でない．これは，Case 1 のときと同じ．

Case 3. 非可算可分直線 X は Countryman でない．

$X^2 = \bigcup_n C_n$ とする．X は可分なので，稠密な可算集合 $D \subseteq X$ がとれる．前と同様，y-座標ごとに分割して考える．各 $y \in X$ に対し，まず $C_{n_y} \cap X_y$ が非可算になるような n_y をとる．次に，$C_{n_y} \cap X_y$ の x-成分への projection とることでこれを X の部分集合と同一視すると，ある $d_y \in D$ が存在して，$C_{n_y} \cap (-\infty, d_y), C_{n_y} \cap (d_y, \infty) \neq \emptyset$ となる．写像 $f : \omega_1 \to \omega \times D$ を $\alpha \mapsto (n_y, d_y)$ によって定めると，異なる $y_0 < y_1$ で f の値が同じになるものがとれる．$f(y_0) = f(y_1) = (n, d)$ とすると，C_n が chain でない証拠として，$(x_0, y_0) \in C_n \cap (d, \infty)$，$(x_1, y_1) \in C_n \cap (-\infty, d)$ がとれる．

□

定理 3.4.1 (Shelah)**.** *Countryman* 直線は存在する．

Proof. Section 1 で定義した $C(\rho_1)$ は同節の定理から Countryman 直線である (実は $C(\rho_0)$ も Countryman であるがここでは証明しない)． □

Remark 3.4.2. これ以外にも重要な情報として，Aronszajn 木 T の辞書式順序から Countryman 直線を得ることができることである．T が特殊でかつ coherent のとき，その $(T, \leq_{lex})$ は Countryman になる．ここでは証明はしない．そのような木としては $T(\rho_3)$ が挙げられる．

Countryman 直線が重要なのはそれが，集合論の強制法公理 $\mathrm{MA}_{\aleph_1}$ の下で自然な basis をもつことである：

定理 3.4.2 ($\mathrm{MA}_{\aleph_1}$)**.** $C(\rho_1)$ は非可算直線全体のクラスで *minimal* である．

$\mathrm{MA}_{\aleph_1}$(Martin's Axiom) とは次の Baire の範疇定理を強めた主張である：

定義 3.4.5. $\mathrm{MA}_{\aleph_1}$ とはすべての ccc をもつ compact Hausdorff 空間に対し，その任意の $\aleph_1$ 個の開かつ稠密な部分集合は交わりをもつという主張である．ここで，空間が *ccc*(**c**ountable **c**hain **c**ondition) を満たすとはその互いに交わりのない空でない開集合の族がすべて可算濃度であることを指す．

Remark 3.4.3. $\mathrm{MA}_{\aleph_1}$ が強制法公理と呼ばれることには理由がある．実際，$\mathrm{MA}_{\aleph_1}$ は

次の主張と同値である：すべての $H(\aleph_2)$ 上で表現可能な $\mathbf{\Sigma}_1$ 文 ϕ について，ϕ がある ccc をもつ強制半順序で強制可能ならば，それは実際に $H(\aleph_2)$ で成り立つ．

こうした強制法公理の一般論に関しては例えば，Bagaria の [1] などを参照して欲しい．

定理 3.4.3 ($\mathrm{MA}_{\aleph_1}$)**.** $\{C(\rho_1), -C(\rho_1)\}$ は *Countryman* 直線のクラスの *basis* になる．

証明はここではできないので省略する．同型を除いて一意に定まるとは言わないまでも，これほどまで自然な数学的構造があまり知られていないことはとても悲しいことではなかろうか．

つまり，Countryman 直線のクラスは，ある set-theoretic な弱い仮定 $\mathrm{MA}_{\aleph_1}$ のもとで canonical な basis をもつ．$\mathrm{MA}_{\aleph_1}$ の更に強力にした公理 PFA を仮定すれば，非可算直線全体の basis を捉えることが可能になる．それが以下の (Shelah によって予想され，30 年の間解かれることのなかった)Moore の定理である：

定理 3.4.4 (five element basis)**.** PFA を仮定すると，$\{C(\rho_1), -C(\rho_1)\}$ は *Aronszajn* 直線の *two element basis* になる．

特に，非可算直線全体のクラスは *five element basis* をもつ．

参考文献

[1] J. Bagaria, *Axioms of generic absoluteness*, Logic Colloquium, 2002

[2] J. Baumgartner, *All $\aleph_1$ dense sets of reals can be isomorphic*, Fund. Math, 1973

[3] R.S. Countryman, *Spaces having a σ-monotone basis*, preprint, 1970

[4] K. Kunen, J. Vaughan, *Handbook Of Set-Theoretic Topology*, North-Holland, 1985

[5] J.T. Moore, *A solution to the L space problem*, J. Amer. Math. Soc. 19, 2006

[6] J.T. Moore, *A five element basis for the uncountable linear orders*, Ann. Math., Vol. 163, 2006

[7] S. Todorcevic, *Walks On Ordinals And Their Characteristics*, Birkhaeuser, 2007

[8] S. Todorcevic, *Coherent sequences*, Handbook of set theory, 2010

第 4 章

書評　『数学の認知科学』

淡中 圏

数学の認知科学
G．レイコフ，R．E．ヌーニェス　著
植野義明，由加重光　訳
出版社: 丸善出版 (2012/12)
ISBN-10: 4621065041
ISBN-13: 978-4621065044
発売日： 2012/12

とてもいい本なのに，ところどころ残念なところがあるので，この本（以降、この本とは『数学の認知科学』を指す）の論旨を救う意味でも，詳述したい．

レイコフは「認知言語学」というジャンルの創始者で，哲学や言語学などでは結構見る名前である．そのレイコフが，数や図形などの数学的対象を我々がどう認知しているかを，お得意の手法の応用として考えよう，という趣向の本だ．

そしてそれによって，数学者が数学的対象について考えがちな「ロマンチックな考え」を否定しよう，という野望もあるようだ．

その「ロマンチック云々」はさておいて，この本の基本方針はとてもうなずけるものだ．

数学出身の科学哲学者クワインが提唱し，その弟子のデネットとかが「自由意思」などについて展開している思想風潮「自然主義」，すなわち「最新の自然科学になじむような世界観を作ろう」，という流れに棹さして，もっと先まで行こうと言うのだから，何の文句もない．実際，この本で攻撃されている「ロマンチックな考え」は「数学の哲学」としては何十年も前のもので，それが攻撃されて怒る人も，いまさらそんなにいないだろうと思える．

でもこの本は，仮想敵を攻撃するのに夢中になるあまりに，言わなくてもいいことまで言い始めている．すでに死に体の敵を倒すために，自分まで危険地帯に踏みいる必要はあるまいに，「定説を打ち倒す」というロマンチックな行為に酔っている気配すらある．

そこでこの書評では，この本が言えている部分，言えていない部分をきちんと腑分けしたい．

4.1 メタファーって言葉を少し使いすぎな気がするが，言いたいことは分かる

まずこの本の冒頭では，数の認識をどのように脳が形成しているかについて書いてある．軽くそれをなぞってみよう．

まず，数を認知する能力は，認知を行っている器官が脳である以上，脳が行える能力でなければいけない．当たり前に聞こえるかも知れないが，「自然主義哲学」が産まれる前は，必ずしも共有されていたわけではない考えである．たとえばゲーデルが聞いたら，大反対しかねない意見かもしれない．今では脳のウェットウェア上実装しやすいかどうかを抜きに，人間の認知システムに関する仮説を立てることは許されない．

次に，数を認知する能力は，我々が産まれて，成長するうちに会得する能力である．よって，赤ん坊もその能力の元となるものを持っていなければいけない．同様に，数を認知する能力は，生物が進化する仮定で発展したものなので，動物たちにもそれと共通の根を持つ能力がなければいけない．進化においてある能力が発展するという現象は，必要になったら突然天の上からダウンロードしてインストールするようにはいかず，今あるものを少しずつ変えなくてはいけない．

これも当たり前に聞こえるかも知れないが，ここから分かる 20 世紀の数学の哲学者がなかなか分からなかった事実は，「数学の認知能力と，言語能力には直接的な関係はない」という事実だ．

世界にはまだまだたくさんの「教育を受けていない聾唖者」がいて，彼らは言語に触れることなく，言語のない状態のまま成長してしまう．しかし彼らも生きるために，ある程度の労働はこなさなくてはいけない．実はそんな彼らは，言語という概念は理解できないのに，数という概念は自然に理解しているのだ．もちろん，それはステレオタイプで言うならば「１，２，３，たくさん」という程度かも知れないが，それでも数は数である．

そして実は，それくらいの数を数えることは，生後 4 ヶ月半の赤ん坊でもやる．赤ん坊の目の前の机に，ボールを一つ置く．そして机と赤ん坊の間に目隠しの板を立てて，その板の上から赤ん坊にも見えるように，ボールを一つ足す．そして板を外すと，ボールが二つある．

それは当たり前なのだが，そこでボールを足す振りをしただけで，ボールが一つしか無いとどうなるだろう．なんと赤ん坊は，ボールが二つあったときよりも，一つしかなかったときの方が，長く見つめる，というのだ（この部分はしばらく私と知り合いの冗談の種になっていた）．これは赤ん坊が数を数える能力を持つということだ．

実験の結果，生後 4 ヶ月半の乳児は，３から４のものまでなら数えられることが判明している．それはただ数えるのではなく，見た瞬間にそれが 1 つなのか 2 つなのか 3 つなのか見分ける能力だ．これを「スービタイズ」と呼ぶ．[*1] 我々は成長したあとも，数を数える能力は成長するものの，スービタイズの能力は 4 つくらいで止まっていることが普通だ．レストランに入って，自分たちの人数を云う事を想像してみればいい．3 人や 4 人なら見てすぐ言えるが，7 人か 8 人かを見ただけで判断するのは急に難しくなる．これがスービタイズであり，人間はこの能力を生得的に持っている．だから生後四ヶ月の乳児でもでき

[*1] subitize とスペルする．ラテン語の「subitus」=「一瞬」を語源とした，認知科学の造語．

るのだ．そしてさらに，それくらいの数までなら，彼らは予想を見積もったり，足し算や引き算もできるのだ．同様に，うまく課題をこなすと餌を与える実験で，マウスなど多くの動物が，生後四ヶ月の乳児と同様の，スービタイズや見積もりや足し算引き算の能力を持っているという．未だ，脳におけるこれらの能力の実現には謎が残るものの，これらが我々の数を認知する能力の元となっているのは確かであろう．

しかしここから先は，文化的に進化した部分で，教えなくては学べない部分になってくる．かといって，ここから肉体から離れていってしまうわけではなく，ここからも具体的な肉体的行為で我々は数を理解する．それを説明するための用語が「スキーマ」である．

認知科学における「スキーマ」を全部説明するわけにはいかないので，ここで出てくる「イメージ・スキーマ」と「アスペクト・スキーマ」だけ説明するが，要はこれらは脳の中で起きている非言語的な認知活動を明らかにしたい，というモチベーションで作られた概念だ．20 世紀の中盤まで，人の認知を理解することは言語を理解することだ，という「言語中心主義」があったが，20 世紀後半からようやくその桎梏から抜け出ることができはじめた．この本もその流れにある．

まず「イメージ・スキーマ」とは視覚と関係づけて，様々な概念を作るときの生得的な原型である．どんな言語にも「in」「on」「under」「above」など，空間的関係を表す言葉があり，それらの文節の仕方は文化によって当然異なるが，ある程度の共通要素もある．これらから，抽出された人類共通と予想される空間認識の「形」が「イメージ・スキーマ」である．そして，人間の視覚野は，たとえ視覚をシャットアウトしても，心の中で何らかのイメージを喚起させれば活動するし，それは運動野と連携して，イメージした形を手でなぞることすら可能だ．また先天的に目が見えない人でも，触覚や聴覚から空間を把握するのが可能なのは，このイメージ・スキーマがやはり生得的に備わっているからだ．それだけでなく，我々はそもそも形のない抽象概念に対して，それらを適用して憚らない．昔の哲学者なら「形のないものに中とか上とか言うのは変だ」と主張していたところを，著者たちは逆に，「実は，それらの抽象概念を作るときに材料として，そもそもこのイメージ・スキーマを使ってるんですよ．だから上とか中とかいう言葉遣いも仕方ないんです」と主張しはじめたのだ．

軽くコペルニクス的転回．

著者たちによると，命題論理などにおいて，「論理包含」を「包含」という明らかに空間的な概念で呼ぶのはそもそも我々が「論理学」を作るときに，「容器のスキーマ」というイメージ・スキーマの一種を使っているからということになる．

またイメージ・スキーマとして，静的なイメージだけでなく，動的なイメージも持ちうる．「始点-経路-着点スキーマ」などは，運動に関するイメージ・スキーマで，著者たちは「森の中を道が通り抜ける」など，本来道は動いていないのに，動的なイメージで捉えてしまう理由は，このスキーマが使われているからだそうだ．

もう一つ重要なのが「アスペクト・スキーマ」である．これは，運動の制御を脳の中でどう行っているか，という研究から産まれた言葉で，この本に引用されているナラヤナンによると，神経の運動制御プログラムはすべて，次のような上部構造を持つというのだ．

- 準備
- 開始
- 主プロセス

- 中断と再会の可能性
- 反復または継続
- 目的
- 完了
- 最終状態

これらのプロセスが他のプロセスと情報のやりとりをしながら，使用可能な資源などの状況に合わせて中央演算処理装置もクロックもないなか，並列に動作しているのだ[*2].

そしてナラヤナンによると，これは言語学者が「アスペクト」と呼ぶ構造，つまり我々が「動作」や「出来事」について推論するときに無意識に使用する構造と同じだというのだ．

そこから著者たちはこの構造を「アスペクト・スキーマ」と呼び，我々の生得的な推論形式だと考える．

このようにして，我々は知覚で得た材料を，生得的に持っている型にはめながら，新しい概念構造を作り上げていく．しかしその方法はこれだけではない．すでに出来上がった二つの概念構造を関連づけることで，さらに複雑で，必ずしも外界と対応しないような抽象的な概念を我々は作りうる．それが，ある領域（ソース）となる概念と，別の領域（ターゲット）となる概念の間に対応を作る，「メタファー」である．メタファーが作られると，メタファーのソースにある要素で，本来ターゲットの領域には存在しなかった物が，容易にターゲットに導入されてしまう．

もちろん脳がメタファーを作るためには，一定以上の共通部分が必要である．しかし，ある程度共通部分があれば，厳密に対応していなくても，概念的には全く別の出自を持っていても，脳は自動的にメタファーを作ってしまい，その結果，ターゲット領域にそれまではなく，外界に必ずしも対応物を持つとは限らない概念が追加されてしまうのだ．

本書ではこのメタファーを使って，様々なより基礎的な概念を結びつけていき，数を実装していく作業が続く．そのためには「物の集まりとしての数」「物の組み立てとしての数」「物差しの長さとしての数」「経路に沿った移動としての数」という四つのメタファーが必要だ，と著者達は言う．

まず「物の集まり」としての数がある．これには分数はないし，当然 0 もない．

「物の組み立て」としての数．これは部品が集まって，1 になることから，分数への道ができる．

「物差しの長さとしての数」これから，数が長さに対応すると共に，長さに対応する数が導入され，実数が産まれる．

そして「経路に沿った移動としての数」によって，移動のスタート地点としての 0，そしてある時点での位置をスタート地点と取り直したときの，それ以前の地点としての負の数が導入される．

そしてこれらの別々の出自を持つ概念領域が，何故数として統合できるかというと，これらは全て，人間の生得的なスービタイズによって認知されるものの，拡張として捉えられるからだ，というのだ．よって，その共通部分での対応関係を，全体に拡張していけば，この四つの間に，部分的なメタファーが形作られる．しかし，脳はメタファーの全域性な

[*2] やったことある人は，マルチスレッドプログラミングの制御を思い出せば良い．このスキーマはそのためのインターフェイスを提供する．

んて絶対に気にしないから，結果として脳は，これらの 4 つは別々の物なのではなく，すべて「数」というものの別々の現れに過ぎないと考えるのだ．[*3]

この本はさらに，このメタファーの議論を使って，ブール代数などを論じていく．そこら辺は別に面白くない．

多少面白いのは，$\varepsilon-\delta$ 論法に関する議論で，口でやる説明には「どんなに近づいていっても……」という動的なイメージが入るのに，厳密な定義には「任意の ε に対して……」と動的なイメージが欠けていて，そこがわかりにくさに繋がっている，などの指摘は教育的観点から面白い．

より直感的で認知的に自然な連続のイメージは「ペン先を離さずに一筆で画ける」という「始点-経路-着点スキーマ」を使った動的なイメージだが，このズレにより，$x\sin(\frac{1}{x})$ のような，数学的には連続であるにも関わらず（x 軸と無限回交わるがゆえに）絶対に手書きできない曲線などが発生して，認知的な負荷が掛かる，と言うのだ．

大学の教員にも，「グラフが一筆で画けるから連続」と説明していた人を見たことがあるので，これは考えておくべき問題かもしれない．

でも，この本が一番面白くなるのは，「無限」の問題をこの観点で論じようとしていくところだ．キーポイントは，先ほどの「アスペクト・スキーマ」である．アスペクトとは，動詞の完了・未完了を表す文法用語だ．著者たちの上げる例では「jump」という動詞にはすでに完了が意味に含まれるため「jump into」などの着陸を含めた使用ができるが，「fly」には完了が意味に含まれていないので，着陸するときは「land」などの別の動詞が必要になる．ここら辺は認知言語学の成果なのであろう．そして著者達は，「無限」とは本来，完了することがないものに，完了アスペクトを付け加えてしまうことを，脳がしてしまった結果が無限だという．つまり，完了を含んだ領域から，完了を含まない領域へメタファーができてしまったために，もともとなかった「完了した状態」が付け加わってしまう．これを彼らは「BMI（Basic Metaphor of Infinity）」と呼んでいる．

なんか，当たり前な話だなあ，と思うかもしれない．しかし，この本ではそこまではやっていないのだが，人間の脳が無限について扱う仕組みを，生理的に解明できるのなら，それは大きな進歩である．彼らの定式化が，実際に脳の中で見つかるのかは私は知らない．ただし，見つかっても不思議はないほど，脳細胞によって実装可能な仕様になっているように見える，と思う．

これだけでも，「無限の脱神秘化」に貢献できる．それについては，後でもう一度語り直そう．

その前に，いくつかのこの本に載っていないＢＭＩの応用を考えてみよう．

たとえば，確率やランダム性の概念にこれは関係がありそうだ．

ランダム性を，数学的に定義するためには，いつでも「計算可能な圧縮方法がない」などの「否定的条件」が顔を出す．これは「数え切れない」「限りない」など，無限によく似ている．

そして，ランダム性や確率は無限と同様に哲学者を悩ましてきた概念でもある．

彼らは，確率とは「それが起こると確信できる度合い」なのか「何かが起こる頻度なのか」で不毛な議論を繰り返してきた．統計学の哲学の専門家であるソーバーは，「確率と

[*3] ここら辺の話は，オブジェクト指向プログラミングをやったことがある人なら，クラスの継承関係の話に読み替えてもいいかもしれない．

は未定義な言葉だ」といって，この議論を避けようとした [7].

もちろん，確率を，確率測度として数学的に定義することは，難しくない．しかし，実際にその測度を決めようとしてやると，何が「同じくらい確からしいか」という問題が出てくる．「辺の長さが 1 から 2 センチの正方形が満遍なく出てくる」と言われたとき，「辺の長さ 1 から 1．5 センチの正方形が出てくる確率と，辺の長さが 1．5 から 2 センチの正方形が出てくる確率が同じ」と考えるのか,「面積が 1 から 2．5 センチの正方形が出てくる確率と，面積が 2，5 から 4 センチの正方形が出てくる確率が同じ」と考えるかで，確率測度は変わる．何が「同じように確からしいか」は先験的に決められるものではなく，観測実験から，我々が決めなければいけない．そこで，先ほどの「確信の度合い」と「頻度」のどちらか，という問題が起こる．つまり何がランダムなのかを決めてやらないと，確率測度は決められない．確率測度とランダムネスは，互いに互いを決めあっている関係になっている．ではランダムネスとはなんだろう．確率測度よりは苦労するが，数学的にはいくつかの定式化ができる．しかしそのためには，数学的無限が出てくるので，哲学者が求める「それって結局なんなの？」という問いの答えからは離れてしまう．

数学者から見たら，何を議論しているのかよく分からないであろう．これらは結局,「何かについて語ることが意味を持つのは，その何かがこの世に存在しているから」というヨーロッパ伝統の言語観に起因している．

だから，彼らは無限（やその他の数学的概念）について語ることに意味があるなら，無限がこの世に存在していなくてはいけないと考えるし，存在しないなら，無限について語ることはそもそもできず，語り得ないことを語ることは即刻中止しなくてはいけない，と考えかねないのだ．

確率やランダムについても同様である．哲学者は，確率について語ることが意味を持つように，それをどうにかこの世界に確かに存在するものに帰着させようとしてきた*4．「確信度」も「頻度」もそう言う意味で要請された．しかし，どちらも「確率」そのものには一致しない．一致させようとすると，結局それらの極限をとらなくてはいけなくて，そうするとこの世界に存在するものではなくなってしまう．だから，今まで哲学者はそうとらなかったのだが，普通の学者は自然にそう考えてきた．

ＢＭＩを使えばその自然な考えを支持できる．まずは，ランダム性をＢＭＩ使って定式化し，それを使って確率を基礎付けしたらいかがだろう*5

ついでに,「確信度」の極限は「頻度」の極限に一致してしまうだろうから，二つの説の違いも消えてしまう．

ここでＢＭＩの功績をまとめてみよう．認知科学の発展は,「何かについて語ることが意味を持つのに，その何かがこの世界に存在している必要はない」という考え方を導入してくれた．

そして，存在していないにも関わらず，我々が意味を持ってそれらについて語ることができる理由（の候補）を用意してくれたのだ．

ここには何にも，大きな問題はない．あとは，実際に人間の脳がどう認知活動を行って

*4 確率という概念は，現代科学について考えるときになくてはならないものだから，確率について語るのをよそう，とはならない．

*5 神明裁判や占いなどを調べれば，古代人がランダムに見える存在を神聖なものと考えた証拠が見つかるかも知れない．ギリシャの民主制が，公職をくじ引きで選んでいたことも，その例とできるかも．これは，ランダム性と無限性の共通点とは言えないだろうか？　古代人はどちらも地上の人間の認識能力に収まりきらない神聖なものと考えたのだ，

いるかの細かい部分を詰めていくだけで，哲学の存在論などは，興味深いものではもうなくなってしまう．

スタート地点の地ならしとしてはいい仕事だ．

ああ，この本がここで終わってくれれば，そこそこ薄くて内容も面白い，いい本だったのに．

ここからは，この本の変な部分を指摘していきたい．

なんか著者たちは数学についての常識を崩すつもりのようだが，それがことごとく滑っているのだ．

4.2　おかしなおかしな実数論

大体この本の実数論がおかしすぎる．

この人，実数が直線を埋め尽くしていない，ということを一生懸命説明しようとする．

その理由が，なんと「超準実数が存在しているから」なのだからびっくりする．

実数が直線のモデルなら，同じ公理を満たす超準実数だって，直線のモデルのはずで，そうすると，実数は超準実数の中で非常にまばらにしか存在していないから，実数は直線の中でまばらにしか存在していないという[*6]．

あらゆる意味で，これはおかしい．

まず，超準実数は，直線のモデルなんかではない．

超準実数の存在とは，実数が満たすどんな一階述語論理の理論（論理式の集合）を考えても，最初に考えていた実数以外のモデルが存在してしまう，ということだ（レーヴェンハイム：スコーレムの定理）．もし，二階以上の公理を考えたら，超準モデルが存在しないようにできる，ということは今回あえて無視しよう．

問題は，上の話ですでに我々は，直線のモデルである実数を一つおいて，それによく似ているけど実は違うものとして，超準実数を持ってきてることだ．これは直線のモデルである実数とよく似ているが，実数にはない良い性質を持っているが故に，重宝されるのだ．

この時点で，超準実数を直線のモデルと考えるのは無理がある．そもそも，「有理数が数直線の中に稠密に（つまりどんな部分区間をとってもその中に有理数が必ず含まれるように）分布している」という性質は，この本のメタファー理論的にも，実に自然な話だと思うのだが，もし超準実数を直線のモデルとしてしまうと，それも偽になってしまうような気がするのだが．それとも，この人たちは，どんな自然数よりも大きな数を含んだ超準有理数もまた我々にとって自然な有理数だと主張するのだろうか．なんだかそれこそ認知的に負荷のかかる話に聞こえる．

ここで，一つ指摘しておきたいのは，非数学者の数学ファンにおける超準モデルへの奇妙な嗜好である．それは必ずある種の相対主義が付き従う．

たとえば，数学に詳しい小説家のグレッグ・イーガンなんかも数学ネタのＳＦ『ルミナス』（早川ＳＦ文庫『ひとりっ子』所収）なんかで，超準自然数を自然数に変わりうる存在として描いている [6]．哲学者Ａ・Ｗ・ムーアの書いた『無限』（講談社学術文庫）でも，

[*6] なんか公理という考え方，数学の構造主義すら理解していない可能性もある．．厳密な数学の言葉で書いてない文章が本当は何を言っているのか解釈するのは難しいが，なんか超実数の一つ一つが「実数の公理を満たし」，それゆえに実数の集合に含めなくてはいけない，と考えている節がある．当たり前だが，公理を満たすことができるのは構造であり，一つ一つの元ではない．

レーヴェンハイム・スコーレムの定理が，数学の扱っている構造が一意的でないことを意味すると書いている [3]．しかし，これは数学者の感覚とずいぶんずれている．そもそも，超準モデルの存在が，「何が本当の自然数で，何が本当の実数なのか」という疑いを惹起するものならば，「標準モデル」だの「超準モデル」だのの名前の意味はどうなるというのだろうか．

数学者はちゃんと標準モデルが一つあるという感覚を持っている．なぜならば数学者は，自然数や実数に関する経験を積んでいるので，それに対する実感も持っているからだ．それらはペアノの公理や，実数に関する様々な公理を越えている．（ここら辺は，後でまた触れる）

さらにいうならば，我々は超準モデルのことをよく知らない．そもそも超準自然数にしろ超準実数にしろ，一つ選んでくるのも難しい．

標準モデルは一つだが，超準モデルはいくつでもある．

超準解析において，超準実数を公理化しようとした動きはあるものの，いろいろな流儀が入り交じって，結局数学者社会での合意は得られなかった．そして，公理を選ぶ最終権限を持つのは，結局のところ社会的合意でしかないのである．

結局，どんな超準実数を持ってこようと，大差ないので，そこは趣味で選んでいいことが分かってしまったのだ．それならば，その部分はあやふやにしておいたほうが，必要になったときにはいつでも強い仮定を付け加えられるので便利なのだ．

モデル理論では，恐ろしいことに「今まで数学者が使った基数すべてよりも，大きい濃度のモデル」なる「モンスター・モデル」が良く現れる．これなんかは，その手の議論の典型と言える．必要になったら，いつでも大きくできるから，そこを詳しく語る必要はない，ってこと．

結局，それは標準モデルとの関係だけが重要で，興味を持って調べているのは標準モデルのほうだからだ．超準モデルを一生懸命調べたって，たいした情報は出てこない．がゆえに，正統的な数学者はそれに独立した強い興味を持てない．もちろん，超準実数が直線のモデルになっているだなんて，考えない*7 しかし，数学の外部にいる人間はそう思わないことが多い．彼らは数学者に比べると，実数や自然数など標準モデルに関する興味が薄い．彼らはそこから大きな情報を引き出そうとなんて思わない．邪推すれば，ある種の人々は，自分たちがそこから数学者のように情報を引き出せないことを口惜しくすら思っているかもしれない．

そんな彼らにとって，超準モデルは朗報に聞こえるのかも知れない．数学者が独占してきた知識の牙城が崩れること，それが全く土台を欠いているように見えることが彼らにはうれしいのだ．これは結局数学が発展することの面白さではなく，数学が破壊されることの面白さである．それが彼らに何らかの希望を与えるのだろう．*8

---

*7 これが，超準解析で無限小の数や無限大の数を考えるときに，具体的な数を考えずに変数にしてしまう理由だ．この本の著者達は，それよりも超巾で超準実数を作って，著者呼ぶところのグラニュー数 $\partial := [< 1/2, 1/2, 1/3, \ldots >]$ という具体的な表示を持つ数を使えばわかりやすくなる，と主張する．しかし，これではどうしてこの数を使うのか，なぜほかの数を使わないのかが不明だし，議論としても窮屈になってしまう．なんだか分からないものは変数と考えるほうが自然だ．

*8 その他の例として，幾何における「エキゾチック球面」などがある．数学者にとって知りたいのは普通の球面であって，それについて新しい知識が，球面はあらゆる場所に現れるので，大きな利益がある．しかし，数学外部にとってはエキゾチック球面のほうが興味深いものに思えてしまう．「カオスブーム」のときも，数学者にとっては今まで分からなかった非線形な現象の中にもある程度分かるものがあった，という部分が重要なのに，世間的には「数学者には絶対に分からないことがある」ということに力点が置かれ

どんな分野にも正統的な面白さと，異端的な面白さがある．正統的な面白さとは，「今まで言ってきたことは大筋正しく，さらにその発展としてこんなことが言える」というタイプの面白さで，異端的な面白さとは「今まで言われてきたことは全く間違いで，実はこうだった」というタイプの面白さだ．

歴史の証明するところでは，これらは両方ともがないと，学問というものは健康に発展しない．しかし，それは決して正統と異端との区別がなくなることを意味はしない．

前半は本当に良くかけているこの本までもが，そんな数学への恨み節に感染していることは残念でならない．

では，結局実数は直線を埋め尽くしているのだろうか．

私は，この本の議論の順番を変えれば，それこそこの正反対の結論が出てしまうように思える．

まず，「ものの集まり」としての数から，「経路に従った移動」をしての数にメタファー写像が作られて，数に 0 や負の数が加わるとともに，数直線ができる．そこに「ものの組み立て」としての数とのメタファー写像を加えれば，数直線の上に有理数も乗る．

この本がやろうとしていることは，ここからデデキントの切断により，有理数の集合 $\mathbb{Q}$ から実数の集合 $\mathbb{R}$ を作り，その $\mathbb{R}$ から数直線の上にメタファー写像を作ろうとしているのだ．そして，それが数直線を埋め尽くせない，といって文句を言っている．

しかし，これはずいぶん不自然な順番だ．

単なる「論理的関係」だけを見れば，論理的に同値なものは，それぞれ同じ地位を持つし，それをどういう順番で導入しようが変わらないように見える．

しかし，頭の中に作られたイメージの間にメタファーを作るとなれば，どういう順番に作るかで結果が変わってしまう．[*9]上の順番は，数学を学ぶ多くの人間が，実際に作り上げるのと違う順番でそれを作ろうとしているのだから，不自然な結果が出てきても仕方ないのだ．

実際に為されることは，有理数から直線の上にメタファー写像が作られることにより，全く論理的でない脳の癖により，直線から数の方へメタファー写像が作られてしまう．その結果できた数を「実数」と呼んでいるのだ．そして，直線の点の全体のなす集合が満たしているべき性質を考察することにより，ワイエルシュトラスやデデキントやカントールは実数の公理を決め，それは社会的な合意を得る．そして，デデキントの切断により，その集合 $\mathbb{R}$ を有理数の集合 $\mathbb{Q}$ から作ることができたのだ．

その結果出来上がったのは，本来連続で，「すべての点を取り出す」ことなどできないはずの実数の点をすべて取り出したような集合だ．これは，確かに認知的に不自然さをもたらす．しかし，その原因は決して実数が直線の上をくまなく埋めているからではない．そこは非常に自然な認知の手順により実現されている．

不自然さの原因は，「実数を集合とみなす」ところだ．著者たちはそこに突っ込みを入れるべきだった．

しかし，これは別に新しい観点ではない．とても伝統的な観点とさえ言える．

てしまった．「ゲーデルの不完全性定理」も「シュレーディンガーの不確定性原理」も同様である．

[*9] これは数学教育の現場においても重要な認識である．数学者は同値な定義を行き来するのになれているが，そうでない人も多い．たとえば難しい厳密な定義を先に教えて，あとで不正確だがわかりやすいイメージを語ったとする．数学者は，「よく分からんなあ」と思いながら話を聞き続け，イメージの話で得心がいくのだが，そうでない人は，最初の難しい話で「分からん！」と頭をシャットダウンして，そのあとの話を理解しようとしない．だから順番がものすごく大事なのだ．

ポアンカレは，カントールの「$\mathbb{N}$ と $\mathbb{R}$ を一対一対応させられない」という証明を「$\mathbb{R}$ が非加算集合である」という意味ではなく，「実数全体は集合ではない」という意味だと判断した．

彼にとって集合とは，何らかの手順で一つ一つ「数え上げられる」べきものなので，そういう性質を持ち得ない実数全体は，集合ではないのだ．この認識には，なんの認知的不自然さもない．

そしてこの観点は，その後の「直観主義数学」「構成主義数学」に繋がり，たとえば「実数を集合と見なさない流儀」は二階算術による「逆数学プロジェクト」なんかで行われている．

この点において著者たちが行えているのは，知られざる数学の問題を指摘することではなく，前から知られていた問題を，認知科学的視点で整理したことだけである．それだけでも，十分いい仕事なんだから，そこで満足してくれていたら良かったのに．

4.3　数学の真実ってのは，どんな種類の真実なのか？

次におかしいのが，「数学の定理が正しいのは，証明が存在するからではなく，メタファーが存在するから」という部分であろう．

この本では，オイラーの公式 $e^{i\pi} = -1$ が正しい理由を認知的に説明しようとしている．はっきり言ってお粗末な説明で，数学的にも間違っている．もっと良い説明は長沼伸一郎著『物理数学の直感的方法』（講談社ブルーバックス）に書いてある [4]．こちらは言葉を足せば，正しい証明にもなる．

だいたい著者たちは何がやりたいのか？数学の定理が正しいのが，証明があるからではないのなら，数学者が一生懸命証明しているのはなんだというのだ．

たとえば，この本のテイラー展開のメタファーによる説明は，数学的には間違っているが，論理的に間違っていても，メタファーがあるから正しいとでも主張するのだろうか．

たぶん，「正しい」という概念が混乱しているのが原因なのではないだろうか．

ある数学の言語で書かれた命題が正しいのは，それが論理的に証明されたからである．それは疑えない．

たとえば「ペアノの公理を満たす構造は，フェルマー・ワイルズの定理を満たす」はもし証明されれば（ほぼ証明されているが），論理的な真実，つまり単なる記号操作だけから導ける真実である．そこには，たとえば「0」とか「+」などが，どんな意味を持つのかは全く関係ない．それがペアノの公理を満たしていれば，何でもかまわないのだ．それがいったいどうやって，我々が普段生活で使っている「数」と関係を持つのだろうか．

そこに著者の言う「メタファー」があるのだろう．「ペアノの公理を満たす構造」が何を満たすのかは，論理的に証明できるが，「我々が普通に使っている数がペアノの公理を満たすか」は，その「我々が普通に使っている数」が定義もされていなければ，なんなのか分からないもの，昨日使っていたものと今日使っているものが，厳密に同じものかも分からないものなので，論理的に証明できるわけはない．

では，どうして我々は「数」がペアノの公理を満たすと判断しているのか．それこそまさに著者たちが「メタファー」の議論を使って示さなければいけない部分である．しかしいくらメタファーを重ねても，「自然数がフェルマー・ワイルズの定理を満たすこと」を証明することはできない．せいぜいが「自然数がフェルマー・ワイルズの定理を満たして

いて欲しい理由」を説明するくらいだ．もちろん，これはこれで意味深いことで，それがあれば，証明の指針に大いになるだろう．しかし証明ではないし，それだけがあっても正しいことにはならない．

ここまでの議論とは，ある種の形式主義的な議論，たとえば「自然数論とは，ペアノの公理から導ける命題を探索しているに過ぎない」というようなものへの強力な反論になり得る．

たとえば，あまり現実味のないたとえ話だが，ペアノの公理に矛盾があることが発見されたとする（必然的にＺＦにも矛盾があることになる）．それで自然数論は終わりだろうか？否，終わらない．なぜなら，ペアノの公理ができるまえからずっと人間は自然数論をしてきたのだから，ペアノの公理がなくったって自然数論を非形式的にできるのだ．今だって，普段数学者は非形式的に証明をしているのだから，別に困りはしない．

そしてその「自然数」とは，我々の脳が，おそらくはこの本が描写したのと大差ない方法によって作られた「メタファーの絡み目」なのだろう．

そして１９世紀の終わりに，その絡み目に「ペアノの公理」が付け加わったのだ．それは，今まで非形式的に行っていた証明のかなりの部分を形式的に行うことができるすばらしい付け加えだった．しかし，そのすべてを一度に形式化することはできないことを，ゲーデルが示したことはよく知られている．

このとき何が起こったかをしっかり見てみよう．

我々が普段使っている自然数がペアノの公理を満たすことは，ほぼ自明に見える．それは，それまでの我々の「自然数に関する経験」による．

そこでペアノの公理から証明されることは，全て自然数が満たすものと自然に納得できるのだ．

そこからときに人々は，「結局自然数の性質とは，ペアノの公理から証明されるものに過ぎない」と勘違いしてしまうこともある．

しかし，これまたとてもあることとは思えないが，我々がペアノの公理を使って証明した自然数の性質を使って，この世界に関して何かを予想して，それが何故か全く当たらないとする．そして使った仮定の中で，自然数の性質以外に間違っている候補がないとする．これはあり得ない話ではない．そして，このときペアノの公理がだんだん疑わしく見えてくる，というのも，全くあり得ない話ではないのだ．

やはり，「自然数の性質」と「ペアノの公理から証明される性質」には微妙なズレがある．後者が前者に含まれるのは，経験的なものなのだ．

なぜ，このことを我々はなかなか理解できなかったのか．

これは，どうしても「数学者の仕事」を「証明すること」と考えてしまう悪い癖が問題なのではないだろうか．

数学者の仕事は大きく分けると「定義すること」と「証明すること」である．そして「証明すること」は論理的な仕事だが，「定義すること」はそれだけでは収まらない．

たとえば「自然数の定義」というものを我々は知っているだろうか．ペアノの公理ではあり得ない．ペアノの公理を使って証明できない，自然数の定理を我々は知っている．

ＺＦＣの中のユニヴァースの中の自然数対象という言い方でも，定義はできない．ＺＦＣでも証明できない，自然数論の命題があることを我々は知っているし，その中におそらく真と言うべきものがあることも自然に分かる．そしてどのような公理を持ってきても，それが定義と呼べるようなものがあり得ないのは，ゲーデルの仕事から明らかだ．

そもそも自然数に定義などできない．

しかし，「徐々に定義していく」ことはできる．ペアノの公理で足らなければ，ＺＦＣで足らなければ，どんどん公理を付け加えていけばいいのだ．どんな公理を付け加えるべきかは，それまでの自然数に関する経験，集合論に関する経験などから，社会的合意によって決まってくる．それはこの本で言う「メタファー」が大いに絡んでくる現象になるだろう．

そして，そのとき，「自然数」や「集合」という言葉に新しい意味が加わるのだ．

ペアノの公理が数学者の間で認められたときに，自然数に新しい意味が付け加わったように．

気をつけなければいけないのは，論理的に定義されていなかった言葉を，論理的に定義しようとするときに，我々はどうしても，元の意味を変えずに定義をするように考えてしまうことだ．

そんなことはどだい無理なのだ．

たとえば，「クオリア」などの厳密に定義されておらず，日常用語にもなっていない哲学用語を，何らかの形で論理的に定義しようとしたとする．

しかし，そこから何か矛盾が発生したり，不自然なことが起きたとする．

すると，もしかすると，そこから

「この概念は，もしかしたら何かおかしいのではなかろうか」

などの概念自体に対する疑問がわき起こり，それらの概念の使用に関する疑問になるかも知れない．

よって，概念に論理的な定義を与えようとすることは，その定義の失敗によって，その概念の死を早めてしまうかもしれない行為なのだ．

しかし，たとえ誰かが「愛」について定義するのを失敗しても，おそらくその概念の死を早めたりはしない．我々は「愛」に厳密な定義が必要とも，可能とも考えていないからだ．この概念は実生活と，ある種の緊密な関係を結んでいるからだ．

自然数もまたそうである．公理化に失敗したくらいで，自然数の概念を我々が急に手放すとは思えない．ペアノの公理が使えなくなっても，公理的でない手法で自然数論をするのと平行して，形式的にできると便利なことから，新しい公理化もしようとするだろう．起こることはただそれだけである．

無限集合も含めた「集合」はこれとは少し違う．

１９世紀終わりから２０世紀の初め，無限集合の導入は数学に危機をもたらした．これはもしかしたら，我々に「無限集合」の概念の破棄をもたらしたかもしれない．しかし現実にはＺＦによる公理化の成功により，集合は数学の中に受け入れられた．集合論が数学にとって，便利だったことも大きい．

でも，もしあのとき，ＺＦにすぐさま矛盾が発見されたら，本気で数学者は集合論を捨てただろうと思う．しかし１００年近くの成功により，数学者の中の文化に「集合」は深く組み込まれたが故に，今，ＺＦに矛盾が見つかっても，我々は集合という概念を捨てはせず，ＺＦに適当な修正をして，明らかな矛盾を持たない公理を作ろうとする（ＺＦに様々な公理を付け加える研究で，研究者が現に行っているように）．

これはこの１００年に「集合」という概念の，我々の信念のウェブでの位置関係が変わってきたからだ．そして，その変化によって，「集合」という数学的概念が「ＺＦＣ」を満たすことは，「集合」という言葉の「意味」にほぼなっている．

よって，「ＺＦＣ」から証明されることが，「集合の性質」であることが，「意味による真実」になっていく．

「公理ＺＦＣを満たす構造は，ＺＦＣから証明される性質Ｐを満たす」は論理的真実，つまり形式的に証明される真実だ．

それに対して，「集合の全体は，ＺＦＣから証明される性質Ｐを満たす」は，「集合」という言葉の意味による真実だ．つまり，「集合」という言葉の意味の中に，この命題が含まれてしまっている*10．

クワインは，「意味による真実」などないと言ったが，実際これは便利な概念なので，丹治信春は『言語と意味のダイナミズム』で，信念のウェブのなかで，それらが，どのように支持されているかによって，定式化しなおしている．そして重要なことは，この定式化なら，「意味による真実になっていく」ことができる点である．

自然数とペアノの公理，集合とＺＦＣとの結びつきがだんだん必然的になっていく（ペアノの公理を満たさない構造を我々は絶対に自然数と見なさなくなる），ことにより，自然数がそれらの公理を満たすことが，だんだん「意味による真実」になっていくので，ついでにそれらの公理から証明されることも，だんだんと「意味による真実」になっていくのだ．

たとえば，ＺＦから証明される自然数に関する命題も，すでに自然数にとっての「意味による真実」だと言ってかまわない．

さらに，「巨大基数公理」などによって証明される自然数に関する命題も，おそらく自然数にとっての「意味による真実」にどんどんなっていくだろう．しかし，それはまだ少し微妙な線かも知れない．それは，数学者が（集合論研究者が，そして数論研究者が）巨大基数に関するどんな経験を積むか，による．あまり大きな仮定をおかなければ矛盾が起きない，というのはプラスな材料だ．もし，数論について不自然な命題を証明したりすれば，マイナスの材料になるだろう．

さきほど，ペアノの公理やＺＦＣは，すでに自然数という概念の意味の一部だ，と書いたが，もちろん，それが意味の一部からだんだんと抜け落ちてしまうこともありうる．

かつて３は神の数字であり，４は安定の数字であり，６は完全な数字であったのだが，それらが数の意味から抜け落ちていってしまったように*11．

たとえば，それらの公理に矛盾が露呈すれば，それらはとたんに意味から脱落するだろう．しかし，自然数にはすでに豊かな意味内容があるから，それだけでは概念自体の破棄には繋がらない，ということだ．

数学の哲学をちゃんと考えるんだったら，「ペアノの公理を満たすものは，フェルマーの定理を満たす」（論理的真実）と「自然数は，フェルマーの定理を満たす」（意味による真実）と「自然数は，ＺＦＣと到達不可能基数の公理から証明される自然数に関する命題を

*10 意味による真実の例として，「独身者は結婚していない」が良く挙げられる．

*11 このような意味づけが，自然数にとって欠くべからずものと捉えられ続けることが，なにか先験的理由で否定されるわけではない．ただ単に実用的に優れていなかったからだ．数学の哲学者のシャピロは「自然数とは自然数の満たすべき構造を満たすもの」という構造主義数学観を提唱しているが，その彼も，このような構造主義が適用できるのは，１９世紀後半以降の数学者が扱う数学的対象だけで，それ以前の数学的対象には適用できないことを認めている（[1] p. 143）．しかし，それにも関わらず「自然数とはこれだ！」と断言してしまうのだから，結局何を言いたいのか分からなくなってしまう．構造主義数学観は現代数学への近似としてはもちろん優秀だ．それは構造主義的な取り扱いがたくさんの論理的真実を生産することができ優秀だから，おおむね我々がそう扱っているというだけで，数それ自体ではあり得ない．

満たす」（意味による真実になる途中のもの）の違いをちゃんと考えなくてはいけない[*12].

数学者がやっている「証明」とは，この「論理的真実」に関わるものだ．そして数学者がやっている「定義」とは，この「意味による真実になっていく」過程に関わるものだ．

そして後者において，脳や社会の中で起きていることは「メタファー」だと言い切ってもかまわないと思っている．

自然数や，直線，集合など，重要な概念の多くは，定義されるまえから，日常生活での経験との大きなつながりを持つ故に，定義しきることができない．それ故に，公理化によって，「徐々に定義していく」という終わりのない行程を続けなくてはいけない．それによって，我々はそれらの概念に関する経験を増やしていき，それらの概念の意味も変えていく．実数という概念を知るまえと知った後では，「直線」という言葉の意味も変わってしまうのだ．それによって，それらの「意味による真実」も変わっていく．

起きていることはそういうことだ．

ここで，たとえば，二種類の「自然数」の概念の分岐ができうることに疑念を持つ人がいるかも知れない．

宇宙の全く逆方向に進出した，二つの人類の子孫が，再開してみると，それぞれ相矛盾する自然数の概念を持っているとする．このとき，どちらかが間違っているに過ぎない，と考えたがるのは分かる．

実際起こることは，再び合流した文化圏のなかで，どちらかが正しい自然数となり，もう片方は non-standard な自然数「不自然数」の地位に甘んじることになる．その基準は，彼らが共有している，「信念のウェブ」の中心にある重み付けされた基準（応用性とか，他の概念との関係性とか）によって決められる．しかし，どちらが選ばれるかを，あらかじめ完全に予想する手段は存在しない．ただ，分かることは，二つの信念のウェブが融合（ドイツ解釈学哲学でいう「地平の融合」というやつだ）したあとから見れば，それ以前の歴史で何が間違っていたかを，彼らの信念によって判断する地平を持っている，ということだ．いつでも，我々は，「歴史内存在」でしかないのだから，すべての歴史が終わった地点から，過去を鑑みて，「こっちが正解で，こっちが間違い」などと言うことは不可能で，言っても詮無いことでしかない．そしてこれから起こるかもしれないことを，全て判断する特権的な位置というのもない．我々から見て，どちらか自然数でどちらが不自然数かを今判断することはできない．

4.4　数学の哲学の未来へ

最後に，この本の「数学の実在論」に関する反論へのコメントを書こう．

この本は，自然数と言っても，いろいろ別のものを指し示していることから，自然数の実在を否定している．これはマクレーンがしているのと同じ議論で，正直このレベルの話は私はもうしなくてもいいことにしたいのだが，そういうわけにもいかないらしい．

そして，この本では，自然数などの数学的概念は脳がメタファーによって作っているので実在ではない，という議論にうつる．しかし，数学に限らず，物理学だって，我々の日常的な概念だって，それを生み出しているのは脳のメタファーである．では，この本の結論は，我々の使っている概念は皆実在するものではない，と言うことなのだろうか？

[*12] すべての命題の真偽が先に決まっているという，数学の哲学で言う，真理値実在論は必要ない

もちろんそんなことはないはずだ．著者は数学にばかりに気をとられて，自分たちの仕事がもっと大きな視野を持っていることを見落としている．

数学以外の概念だって，脳のメタファー機能によって形作られたのであろう．しかし，それらは我々が感覚による経験と深い関係が持てる．それによって，我々は感覚に訴えて，それの性質について調べることができる．

だからこそ，それらはこの世界に実在する，と言うことができる．

しかし，数学の概念はそうではない．

その前に，そもそも数学の概念とは何かについてもう少し詰めておく必要がある．自然数などの数学的存在について，考えるとき，それは個物ではなく，一種の「構造」，つまりある関係を持った物の集まりである，と考える方が今では筋がいいと考えられている．自然数とは何か，と言われたら，自然数の構造を持つ物の集まりである，と答えるのがいいわけである．このとき，「自然数の構造」は決して「ペアノの公理を満たす構造」ではないことに注意する必要がある．「自然数の構造」は「ペアノの公理」を満たすだろうが，逆は正しくない．

我々が，１とか２とか１０とか呼ぶ物について語った話も，１の構造を持つ物や，２の構造を持つ物や，１０という構造を持つ物について語った話だと思って良い．

そう言う意味では，１や２や１０などの構造は，具体例が存在している以上，実在していると言ってあまり問題ではない．よって，それらを調べることで，その性質を調べることができるだろう．しかし，個々の自然数からＢＭＩによって作られた「自然数の構造」の具体例を我々は持たない．

だからこそ，１や２や３の性質から，自然数全体の持つ性質を予想して，そこから論理的に演繹することにより，自然数の性質を調べていくことしかできないのだ．

これは，「自然数全体」というものがこの世界に実在しない証拠と見なせる．

しかし，気をつけなくてはいけないのは，これは経験的に知ったことであることだ．

ある種の人々は，無限なものがこの世界に実在しないのは，何らかの必然的な理由によるはずだ，という謎の信仰を持っている．たとえば，現実的無限は根本的な矛盾を含んでいる，などと主張しようとする．しかし，彼らがそれを発見したことなどない．

我々が，自然数や実数の構造を持つものが，現実に存在しているわけではない，と判断する根拠は，我々が今まで観測してきた世界に，そんなものがなかった，というただそれだけのことだ．

長い間そうだったから，たとえばある物理学の代替理論が，無限個の物の存在を要求するなら，私はかなり強く疑うだろう．

しかし，もしそれが他のどんな理論よりも，この世界を説明するならば，渋々無限個の物の存在を認める程度の疑いである．

そのとき，我々は，自然数の構造を持つ具体例を手に入れてしまうかも知れない．そのとき，自然数は実在しないとは言えなくなってしまうだろう[*13]．

もう一つ，この議論に付け加えておくことは，著者たちは，原因を一つと決めてかかっ

[*13] このような実例として，「ランダムな存在」が上げられるかもしれない．上で見たように「ランダム」という概念もＢＭＩによって作られたものだ．だから，真にランダムな存在が実在している，と言われて違和感を感じるのも，無限の実在に違和感を感じるのと起源は似ている．しかし，量子力学では，もしかしたら真にランダムな存在が実在するのかもしれないし，我々はそれを受け入れる必要があるのかも知れないのである

ているが，原因にもいくつかある．手近な原因と，より究極的な原因だ．

著者の議論は「ロマン主義者は，人間が数学的概念を持つ理由は自然界に数学的存在があるからだ，と思っているが，人間が数学的概念を持つ原因は脳なんだから，それはあり得ない」という構造を持っているが，これには穴がある．たとえば，脳が数学的概念を作れるようになった理由は？　と聞かれたらどう答えるのだろうか．ある種の進化論を持ち出さざるをえなくなるだろう．数学的概念を生み出すことができるような脳を作る遺伝子はほかの遺伝子よりも生き残れたのだ．

これはロマン主義者にとって朗報ではないのだろうか？

もちろん私は，それほど熱狂的なロマン主義者ではないので，この世界には，「自然数の概念を生み出す脳が生存に有利になる程度には，自然数とよく似た構造を持っているらしい」という非常に穏当で当たり前な結論までしか導かない．

しかし，ここにも，自然数の存在を超越的に否定する論拠などない，ということが確認できるのである．

逆に，この手の人々が自然界に無限が存在しないことを懸命に証明しようとすることには，何らかのドグマの存在を感じさせる．アリストテレス以来の「無限アレルギー」だ．哲学者の野矢茂樹が上記『無限』の解説で，「無限なんてないと言いたいのだが，それも難しい」という意味のことを書いていたが，これなんかはその一例だ．私にとって無限がこの世界に存在しないっぽいのは，単に見当たらないからだけなのだが，ある種の哲学者にとってはそれ以上の「超越的な理由」が必要なのだ．しかし，そんなものを探すのは無限を探すのと同じくらい難しい．そしてそう言うものを求めてしまうのは，結局「何かについて語ることが意味を持つのは，その何かがこの世に存在しているから」というヨーロッパ伝統の言語観から来ている*14．しかし，著者たちはこれをとっくに葬り去っていなくてはいけないはずだ．

著者たちは「無限アレルギー」を克服する方法を開発しながら，自分たちはそれに罹患しつづけているのだから，間抜けと言わざるを得ない．

今現在，「無限は怖い」と哲学者の挙げる例は「実は怖くない数学的な無限を，ゲーデルの不完全性定理とかレーヴェンハイム・スコーレムの定理などを勘違いして引用して，怖く見せかけたもの」でしかない．*15

昔の人が，無限に恐怖と魅惑のアンビバレンツな感情を感じていたのは，形式的に扱える無限と形式的に扱おうとすると危険な無限の区別が付いておらず，なぜ無限を人間が思考ができるかの理由が分かっておらず，それにも関わらず，彼らの宗教的な世界観が無限を必要とし，数学的な需要もあったからだ．今現在，安全な数学的無限は高レベルに確立し，どうして人間の脳が無限を扱えるのかの解明の目処もつき，神秘的な無限の宗教的需要も低下し，その結果，我々にとって重要な無限は安全で，危険な無限は別に面白くない．

このような状況で，「無限アレルギー」を感じる理由は正直なくなったと思っている．それならば，賢明に無限を退治しようとするのは，一生懸命無限を世界観に組み込もうとするのとおなじくらいずれた行為だ．

もう無限は，「だってどこにもないじゃん」の一言で済ませていいくらい，俗的な存在

*14 A・W・ムーアの『無限』も，最後には，「世界は無限かもしれないが，我々人間は有限の存在なので」みたいなつまらない人生論になってしまうのを見ると，無限アレルギーにはなんか宗教的感情も隠れているのかも知れない [3]．無限について考えるのは罪深い，みたいな．

*15 村上陽一郎のように，未だに「アキレスと亀」レベルの話が怖くて仕方ない人すらいるようだ．

になってしまったと言っていい．

さて，数学の存在論についての話をもう少し進めようと思う．

先ほど，数学的存在は，個物としてみるよりも，構造として見る方が筋がいい，と言う話を持ち出した．そうすると，揚げ足をとることが仕事の人間は「その構造とやらは存在するのですか？」という疑問を持ちだしてくるかもしれない．それくらいの質問には答えられるようにしておこう．

まず，そのためには「二つの構造が同じである」とはどういうことか，少し詰めておく必要がある．

そもそも，二人の頭の中にある種の形で実現されている（実例が脳内にある，と言うわけではない），自然数という構造が同じである，ということをどうやって確かめられるのか．

それどころか，昨日私が考えた自然数と，今日の自然数が同じである証拠は？

数学の実務でも，これは現れる．

一つの文字 x から生成される自由モノイド $\{x\}^*$ はなぜ，自然数と呼びうるのか．それは，$x \mapsto 1$ によって，同型対応が付けられるからである．この二つが同じ物かどうかなんて，考えても致し方ないので，とりあえず文脈上問題がないときは，同一視しよう，というのが数学の内部での話である．

同一視しているだけで，全く同じ物だと数学者が考えているわけではない．場合によっては，いつでも違う物と見なすことができる．*16

これらは，同じものなわけではなく，ある文脈では同じと見なしてかまわないという意味に過ぎず，軽い気持ちで等号を書くと怒られる．*17

何を同じと見なしていいか，つまり何が同型か，さらに言えば何が同型射かは，文脈によって，つまりどの圏を考えているかによって違う．

それと同じように，二人の人間の考えている自然数が同じ物だと見なせるのは，二人が会話して，お互いの自然数観の間に対応が付けられるからである．

「構造」を考えると言うことは，これらの対応の同値類を考えることになるが，これらの対応がどのくらいあるかも我々は知らないし，結びつけられる脳内に実現された「自然数の構造」とやらも，調べるのは非常に難しいであろう．

だからもし，数学の存在論を本気で自然化するとしたら，構造を主眼に語ることすら諦めて，この対応付けについて語ろうとしなければいけないだろう．これこそ，一番観察しやすく，記述しやすい部分であろうからである．

---

*16 数学的な例を志村五郎の『数学をいかに使うか』から一つ挙げよう [5]．

任意の相異なる $n+1$ 個の K の元 $\{x_0, \ldots, x_n\}$ に対して，体 K を係数とした n 次以下の多項式 $f(x)$ と，$\{x_0, \ldots, x_n\}$ での値，$\{f(x_0), \ldots, f(x_n)\}$ が一対一対応する..

これを構成的に書くと「ラグランジュの補完公式」だが，これを線形代数を使って簡単に示す．一番簡単なのは，n 次以下の多項式の成すベクトル空間 V を考え，線形写像

$$F : V \to K^{n+1},\ f \mapsto (f(x_0), \ldots, f(x_n))$$

を考え，それが単射であることを示せば，次元が一致するので，全単射になる，という寸法だ．単射性の証明は簡単なので，任せる．因数定理を使うんだよ．

このとき，重要なのは，線形代数の理論を使うときは，V を数ベクトルの成す空間と考えてしまって何の問題もないのだ．F も行列と思って良い．

でも，それを多項式としての性質に引き戻すときには，数ベクトルの成す空間は忘れなくてはいけない．

*17 プロの数学者でもあまり気にしない人は多く，教科書に書いてある等号をそのまま引き写すとド叱られる，ということも発生する．

そして，数学や計算機数学の中から出てきたそれに対応する道具立てが「ホモトピータイプ理論」である．二つの対象が「同じ」である，ということは二つの間に「変形」があることと考える理論だ．

まさに上で説明したことはそう言う意味だし，たとえば「$1+2=3$」の $=$ も，同じ物と考えるよりは，左から右へ変形があると考えた方が，いろいろすっきりする．

こうして考えてみると，数学の存在論には，もう何も興味深い問題は残っていないように見える．そして，自然科学や社会科学の上にちゃんと数学の認識論を形作るのは，機が熟しているのである．あとは，その機をもぎ取る人が現れるばかりだ．

参考文献

[1] S. Shapiro (1997), Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology, Oxford

[2] G．レイコフ、R．E．ヌーニェス『数学の認知科学』植野義明、重光由加訳、丸善出版、２０１２年

[3] A．W．ムーア『無限 その哲学と数学』石村多門訳、講談社学術文庫、２０１２年

[4] 長沼伸一郎『物理数学の直感的方法』講談社ブルーバックス、２０００年

[5] 志村五郎『数学をいかに使うか』ちくま学芸文庫、２０１０年

[6] G．イーガン『ひとりっ子』早川書房、２００６年

[7] E．ソーバー『科学と証拠―統計の哲学　入門―』松井政浩訳、名古屋大学出版界、２０１２年

G is for Girl

淡中 圏

彼女は actress だった．しかしそれは別に特別なことではない．シェイクスピアもいうように，世界は舞台であり，人は皆役者なのだ．だから彼女は act した．act することにより，彼女は舞台であるこの世界に作用し，目に見えるものになった．というのも彼女は抽象物なので，何かに作用しないと目に見えるものにならないのだ．考え方を変えれば，それは結局は他者との関係でしか自分というものを捉えられない我々全ての宿命なのかもしれない．そこに「本当の」なんてものはない．しかし，それでも私は「本当の彼女」を探している．誰もが本当の誰かを探しているように．

私が最初に見た彼女も，彼女の作用，つまり彼女の表現の一つにすぎない．そんなことは言われなくても分かっている．しかしそれでも，あの彼女こそが彼女なのだ，というぬぐいきれない感情があるのは否めない．だから，調査の途上で，様々な人々が語る様々な彼女の姿に，私は違和感を覚えざるをえなかった．そもそも，歴史上に最初に彼女が現れたのはいつか．古い論文をあさってみても，答えは定かでない．

ある者は彼女を女王と表現した．

ある者は彼女はあいまいだと，もしくはあいまいさだと言った．

ある者は彼女を語る体系は不完全にならざるを得ないが，それ故に彼女は実在すると考えた．

別のある者は論文を一つだけしか読まずに彼女の表現を研究しはじめ，L とは独立に L に関する予想にたどり着いた．それは解析的な彼女の表現と代数的な彼女の表現が一致することを意味する。

さらにまた別のある者の発見した彼女は，とても友好的で大きく，夜な夜な月明かりの下，怪物的な密造酒を造っていると言う．

最近のある者は彼女に型を付けようとしているらしいが，これは彼女が「型付けられない女たち」の一人ではない，と彼は考えているのだろうか．

果たして彼らは彼女について語っているのか，それとも彼女に似た何かについて語っているのか．彼女が何者なのかについて悩み続けている我々に判断のしようがない．一つ分かることは，我々が抽象物を直接感知することはできない以上，最初に彼女の現れたは具体的であったはずだ．しかし，それがどのようなものだったのか．おそらく我々はすぐに彼女の本質は，その具体的な現れにはなく，それらの表れに共通する何かであることに気づいてしまったのだ．彼女はこの世のものではない．この宇宙に加えられるべきジェネリックな何かなのだ．よって，これらの個々の現れを彼女とすることはできない．もしできることなら，この現れ全てを彼女とすることができるかもしれなかった．だから彼女に恋をした我々は，それらを賢明に収集したのだ．でもすぐに，それらが有限に収まっては

くれないことに気づいた．それでも分類し，パラメトライズし，例外的なものを集め，全体像を描こうと努力し続けた．しかし，その仕事はとても終わりがないように見えた．恋を知らなければ，こんな辛い思いを知らなくて済んだのに，と我々は夜毎枕を濡らした．

そんな折り，我々は口頭である情報を得る．

「摂津はトポスであり，G が作用する摂津，すなわち 摂津^G もまたトポスになる」

一体どういう意味であろうか？ G とは $Girl$ の頭文字であり，おそらく彼女のことであろう．しかしそれ以外はよく分からない．トポスとは辞書で調べると，ギリシャ語で「場所」を意味する．摂津は大阪の一部の古名で，それが場所なのは当たり前だ．でもまあそれは良い．この文章の体裁から見て，重点が置かれているのは後半だ．前半が成り立つのは当たり前だが，後半は当たり前でないが成り立っている，とこの文章は我々に語りかけている．確かに「G が作用する摂津」というのは，場所なのかどうなのか分からない．しかし，この文章はそれも場所だと主張している．これは驚くべきことではなかろうか．摂津がどこにあるのかは我々は知っている．そしてそこが場所であることもそこに行けば分かる．我々が行ける場所は当然場所ではあるのはものの道理である．そして，それが場所なら我々はそこへ行ける．

そして聞くところによると，米田錬磨というものにより，なんと彼女はその 摂津^G の中で忠実かつ充満に埋め込まれているという．それは大変だ．早く助けに行かないと窒息してしまうかも知れない．充満に，というからにはとても狭いところに埋め込まれているのだろう．我々は彼女の大きさを寡聞にして知らないが．女性のサイズについて調べるなんて，いくら情報に飢えた我々でも，デリカシーは捨ててないのだ．

しかし，いくら忠実であっても，それも彼女の表現に過ぎない，という声もある．それでも我々はそこに行くだろう．彼女に会いに行くだろう．

どこにあるのかはまだ分からない．とりあえず摂津ではないだろう．カルテジアン閉がキーワードに違いない，と我々は踏んでいる．カルテジアンとはご存じのようにデカルトである．そして閉じてしまっているのは，おそらくカルテジアン劇場のことであろう．そこでは，我々の人生に起こる全てのことが繰り広げられるというカルテジアン劇場．そこで我々を待っているのは，スターリンか，それともビッグ・ブラザーか．

ともかくそれがどこにあるのかを，まず知らなくてはいけない．それを求めて今日も我々は，世界を駆け巡る．

内部にいながらあらゆる mono をみそなわす Ω を具え，全ての対象に「力」があるという，トポスを求めて．

次号予告

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{P}, \neg\neg) \arrow[dr, "y"'] & & \mathrm{Sets} \arrow[dl, shift right, "\mathrm{diag.}"'] \\
& \mathrm{Sets}^{\mathbb{P}^{op}} \arrow[ur, shift right, "\mathrm{Lim.}"'] \arrow[d, shift right] & \\
& \mathrm{Sh}(\mathbb{P}, \neg\neg) \arrow[u, shift right, "\mathrm{incl.}"'] &
\end{tikzcd}$$

fibration

Grothendieck topos

Girard's theorem

Coherent topos

Osillation function

Realizability

forcing

Site

Elementary topos

倉永 崇　たまにはまじめに生きてみたいものだ. 最近「まじめが一番」のメタレベルでの意味がよく解ってきた気がするが、残念ながら私が生きているのはその階層でもないので、なかなか改心するには到らないのだ。

淡中 圏　本名：田中健策　いろんなことに手を出して、自分でもよく分からなくなっている人間です。今回は、「数学の哲学」の研究者と話して考えたことをぶつけてみましたが、次はもう少しちゃんとした数学のことを書きたい。次があればだけど。

才川 隆文　みんながんばれと音頭をとったり、みんなの原稿をまとめたりしていました。楽しかったですし次号も出したいですね。

宮崎 達也　名古屋大学情報科学研究科修士 2 年目苦節 6 年目
膝に forcing を受けて以来常時集合論で死んでいる無能です。

古関 恵太　いつもくてーっとしてます。修論中間発表がよーやく終わったというのにこの原稿のせいでいつになっても夏休みが始まらなくて涙目です。これ終わったらシンフォギアと Free!を観るですよ。それではまた。ノシ

発行者 ： The dark side of Forcing

連絡先 ： http://proofcafe.org/forcing/

発行日 ： 2013 年 8 月 11 日